О СУЩЕСТВОВАНИИ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Каянович С.С.
доцент, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь

В динамике вязкой несжимаемой жидкости различают течения ламинарные и течения турбулентные. Первые происходят при малых, вторые – при больших числах Рейнольдса. В работе будем рассматривать движения жидкости в «плоской» трубе (течения между параллельными твёрдыми стенками) и её движения в трубе кругового сечения при различных числах Рейнольдса Re.

Экспериментально установлено существование критического числа Re, которое обладает следующим, описываемым ниже, свойством (это число назовём *нижним критическим* числом Рейнольдса и обозначим $\mathrm{Re}'_{кр}$). Если у входа в трубу происходят возмущения течения, то при значении числа Re меньшем, чем нижнее критическое значение $(\mathrm{Re} < \mathrm{Re}'_{кр})$, возмущения непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они ни были. Напротив, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}'_{кр}$ течение может стать турбулентным на всём протяжении трубы, причём для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше Re . Для того чтобы иметь возможность сравнивать возмущения и придать более строгий смысл словам «слабые» и «сильные» возмущения, введём понятие *силы возмущения* F .

Многократными экспериментами установлено, что в случае течения жидкости в трубе кругового сечения незатухающая турбулентность наблюдается уже при значении $\mathrm{Re} \approx 1800$ $(\mathrm{Re}'_{кр} \le 1800)$, в случае её течения между параллельными плоскостями (течение в «плоской» трубе) – начиная со значения $\mathrm{Re} \approx 1000$ $(\mathrm{Re}'_{кр} \le 1000)$. При очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу удаётся поддерживать течение, не переходящее в турбулентное, до очень больших значений Re (фактически его удавалось наблюдать вплоть до значения $\mathrm{Re} \approx 10^5$) [1, 2].

Проведём детальный анализ результатов экспериментов, рассмотрев течение в плоской трубе. Предположим, что вязкая несжимаемая жидкость при наличии градиента давления движется в направлении оси Ox_1 между двумя неподвижными параллельными пластинами (твёрдыми стенками), расположенными в плоскостях $x_2 = \pm h$. Такое течение можно рассматривать как течение сквозь цилиндрическую трубу прямоугольного сечения, если представить себе (см. [3]) , что жидкость заключена ещё между двумя воображаемыми плоскостями $x_3 = \pm 0.5$, расположенными на расстоянии 1 друг от друга, по которым она свободно скользит, не испытывая сопротивления трения (т.е. труба представляет собой прямоугольный параллелепипед). При нашем предположении из трёх компонент вектора скорости v_1, v_2, v_3 лишь $v_1 \ne 0$, а v_2 и v_3 тождественно равны нулю. Уравнения Навье – Стокса существенно упрощаются и дают для скорости v_1 в произвольном сечении трубы $x_1 = c$ $(0 < c < L, c = const)$ параболу

$$v_1 = -\frac{h^2}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx_1}\left(1 - \frac{x_2^2}{h^2}\right), \qquad (1)$$

где давление p зависит только от значения x_1, $\dfrac{dp}{dx_1} = const$, μ – динамический коэффициент вязкости, L – длина трубы, скорость v_1 зависит только от координаты x_2 [1]. Формулу (1) получают в предположении, что труба является бесконечно длинной. Такая идеализация реального течения подразумевает конечную, но достаточно длинную, трубу и положение сечения $x_1 = c$, в котором уже имеет место формула (1), достаточно удалённым от входа в трубу.

Из фактов, полученных в экспериментах и перечисленных выше, следует, что существует критическое число Re (обозначим его $\mathrm{Re}_{кр}$), при котором течение фактически переходит в турбулентный режим и которое может не совпадать с $\mathrm{Re}'_{кр}$. Действительно, $\mathrm{Re}'_{кр} \le 10^3$ и $\mathrm{Re}'_{кр} \le 1.8 \cdot 10^3$ для плоской трубы и трубы кругового сечения соответственно, а $\mathrm{Re}_{кр} \approx 10^5$ при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу и достаточно гладких твердых стенках . Значит, существуют течения, определяемые неравенствами $\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, которые не являются турбулентными. Такие течения называются ламинарными в [2] (правда, указывается, что в интервале между значениями $\mathrm{Re}'_{кр}$ и $\mathrm{Re}_{кр}$ ламинарное течение метастабильно) и они же называются «затянутыми ламинарными» в [1]. Зададимся вопросом: описываются ли эти последние течения формулой (1)? Для ответа на него проведём нижеследующую цепочку рассуждений, учитывая тот факт, что рассматривается движение вязкой жидкости, а наличие вязкости (внутреннего трения) приводит к диссипации (рассеянию) энергии [1, 2] .

Для проведения указанных рассуждений получим необходимые соотношения в предположении, что анализируемые течения описываются формулой (1). Находим

$$v_{ср} = -\frac{1}{2Lh}\cdot\frac{h^2}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx_1}\int_{-h}^{h}\left(1-\frac{x_2^2}{h^2}\right)dx_2\int_0^L dx_1\int_{-0.5}^{0.5}dx_3 = -\frac{h^2}{3\mu}\cdot\frac{dp}{dx_1}; \quad \mathrm{Re} = \frac{2\rho h}{\mu}\cdot v_{ср} = -\frac{2\rho h^3}{3\mu^2}\cdot\frac{dp}{dx_1}. \qquad (2)$$

Известно также: если найти производную по времени от полной кинетической энергии жидкости и затем проинтегрировать её по некоторому объёму V, то получится

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}dV = -\oint\left[\rho\bar{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-(\bar{v},\bar{\sigma}')\right]d\bar{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV, \qquad (3)$$

где ρ – плотность жидкости, σ'_{ik} – вязкий тензор напряжений, $\oint[-"-]d\bar{f}$ – интеграл по поверхности объёма V, второе слагаемое в правой части (взятое с обратным знаком) представляет собой уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией. Если распространить интегрирование по всему объёму жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (он обращается в нуль в силу условия равенства нулю скорости на стенке). Отсюда следует формула для диссипации энергии в несжимаемой жидкости [2]

$$E'_{кин} = -\frac{\mu}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \qquad (4)$$

Диссипация приводит к уменьшению кинетической энергии, т.е. должно быть $E'_{кин} < 0$. В формуле (4) $E_{кин}$ – полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости во всём объёме V, $E'_{кин}$ – производная от этой энергии по времени, интегрирование производится по всему объёму V [2]. Первое слагаемое в квадратных скобках (правая часть (3)) есть поток энергии, связанный с простым переносом массы жидкости при её движении, совпадающий с потоком энергии в идеальной жидкости. Второе же слагаемое $(\bar{v},\bar{\sigma}')$ есть поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Поскольку нас интересует влияние на характер течения лишь вязких сил, оставляем для рассмотрения только второе слагаемое и рассматриваем интеграл по поверхности для течения (1) (в $(\bar{v},\bar{\sigma}')$ остаётся только слагаемое вида $v_1 \cdot v'_{1x_2}$) .

Интеграл по боковой поверхности равен $I_1 = \int_{-0.5}^{0.5} dx_3 \int_\Gamma v_1 \cdot v'_{1x_2} dl$, где Γ – замкнутый контур, представляющий собой прямоугольник в плоскости $x_3 = 0$ со сторонами, лежащими

на боковых гранях параллелепипеда. Проходя контур в выбранном направлении с учётом, что на твёрдой стенке $v_1 = 0$ и подынтегральная функция не зависит от x_1, находим

$$I_1 = 1 \cdot \int_\Gamma v_1 \cdot v'_{1x_2} dl = \int_{-h}^{h} v_1 v'_{1x_2} dx_2 \Bigg|_{x_1 = L} + \int_{h}^{-h} v_1 v'_{1x_2} dx_2 \Bigg|_{x_1 = 0} = \int_{-h}^{h} v_1 v'_{1x_2} dx_2 \Bigg|_{x_1 = c} + \int_{h}^{-h} v_1 v'_{1x_2} dx_2 \Bigg|_{x_1 = c} = 0 .$$

Аналогично боковым граням рассматриваются верхняя и нижняя грани. Обратимся к $E'_{кин}$.

Найдя производную v'_{1x_2} и выполнив интегрирование по объёму, получим

$$E'_{кин} = -\frac{4Lh^3}{3\mu} \cdot \left(\frac{dp}{dx_1} \right)^2 . \tag{5}$$

Вернёмся к вопросу: описываются ли течения, определяемые неравенствами $\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, формулой (1), и допустим, что ответ положительный. Возьмём два значения $\mathrm{Re}_1, \mathrm{Re}_2$ $(\mathrm{Re}_1 < \mathrm{Re}_2)$ из интервала $(\mathrm{Re}'_{кр}, \mathrm{Re}_{кр})$. Более точно, пусть ρ, h, μ, L фиксированы и $\mathrm{Re}_{кр}$ – то число Re, при котором в данной трубе, при движении данной жидкости течение фактически переходит в турбулентный режим. Кроме того, пусть $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}'_{кр} + 0.1 \cdot (\mathrm{Re}_{кр} - \mathrm{Re}'_{кр})$, а $\mathrm{Re}_2 = \mathrm{Re}'_{кр} + 0.9 \cdot (\mathrm{Re}_{кр} - \mathrm{Re}'_{кр})$. Начнём рассмотрение с числа Re_1 и будем возмущать течение, происходящее при этом числе Re, увеличивая постепенно силу возмущения, пока не достигнем такой силы, которая сделает течение турбулентным на всём протяжении трубы. Из сказанного выше следует, что такая сила есть. Значит, существует такое максимальное значение $F^{(1)}_{\max}$ силы возмущения, при котором наше течение $(\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1)$ ещё не турбулентно, но незначительное увеличение этого значения приводит к турбулентности. Течение, происходящее при числе $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_1$, назовём течением 1.

Пусть течение происходит при числе $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_2$ (назовём его течением 2). Будем возмущать теперь это течение, увеличивая постепенно силу возмущения, пока не достигнем такой силы, которая сделает течение турбулентным на всём протяжении трубы (такая сила есть) . Существует минимальное значение $F^{(2)}_{\min}$ силы возмущения, при котором течение $(\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_2)$ турбулентно, но незначительное уменьшение этого значения приводит к исчезновению турбулентности.

Из сказанного выше следует, что $F^{(2)}_{\min} < F^{(1)}_{\max}$. С дугой стороны, $\mathrm{Re}_2 > \mathrm{Re}_1$. Последнее означает, что диссипация энергии жидкости при значении Re_2 больше (по модулю), чем при Re_1 (см. (2) и (5)). Диссипация же (рассеяние) механической энергии происходит за счёт той части работы внутренних сил, которая определяется вязкостью [1]. Именно наличие вязкости приводит к диссипации энергии турбулентных пульсаций и чем больше диссипация (по модулю), тем скорее эти пульсации будут подавлены. Но она больше при числе Re_2 и, значит, пульсации скорее должны быть подавлены в течении 2, тем более, что в этом течении они более слабые (поскольку $F^{(2)}_{\min} < F^{(1)}_{\max}$), но, как видим, течение 2 турбулентно, а течение 1 нет. Мы пришли к выводу: пульсации, более слабые, не подавляются большей диссипацией, а пульсации, более сильные, подавляются меньшей (по абсолютной величине) диссипацией. Этот вывод противоречит экспериментальным данным, а пришли мы к нему, допустив, что ответ на поставленный выше вопрос положительный. Таким образом, течение при условии

$\mathrm{Re}'_{кр} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ не является течением (1). Такое течение называем *стержневым.* Строгое определение стержневого течения дано в [4].

Список литературы:

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.
3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Наука, 1964.
4. Каянович С. С. Краевая задача для стержневого течения в канале. // Весцi НАН Беларусi. № 4. 2016. Сер. фiз.-мат. навук. С. 55–66.