

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРА НА ТРЕНИИ

Степанов Н.Ю.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Князюк Н.В. – канд. физ.-мат. наук, доцент

В данной работе исследуется математическая модель так называемого осциллятора на трении или осциллятора Тимошенко, представляющего собой массивное тело, приводимое в периодическое движение взаимодействием с двумя горизонтальными вращающимися с одной скоростью, но в разные стороны, валами. Построенная теоретическая модель учитывает изменение коэффициента трения, зависящего от взаимной скорости между массивным телом и валами.

Качественное описание. Балка, расположенная на валах с некоторым смещением, подвержена действию нескомпенсированных сил трения со стороны точек опоры. Из-за превосходства одной силы трения над другой, балка начинает свое движение. Из-за смещения в сторону другого вала, сила реакции опоры с его стороны больше, а, следовательно, больше и сила трения. Балка останавливается и начинает движение в противоположную сторону. Процесс повторяется. Балку можно назвать осциллятором.

Математическая модель. Пусть d – расстояние между валами, l – длина балки, x – смещение балки относительно центра системы, N_1, N_2 – силы реакции опоры первого и второго вала соответственно, $F_{тр1}, F_{тр2}$ – силы трения со стороны первого и второго вала соответственно (рисунок 1).

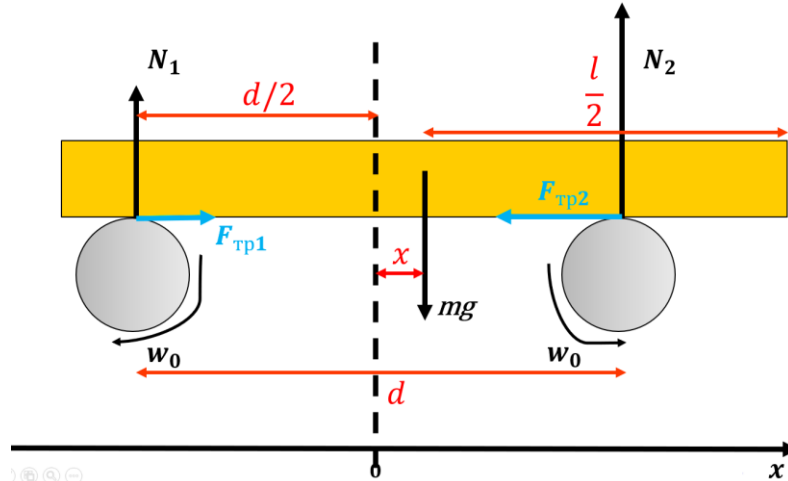


Рисунок 1 – Схематичное изображение валов, балки, сил, действующих на балку

Имеет место система из трех уравнений:

$$\begin{cases} N_2 \left(\frac{d}{2} - x \right) = N_1 \left(\frac{d}{2} + x \right), \\ N_1 + N_2 = mg, \\ F_{тр2} - F_{тр1} = ma, \end{cases} \quad (1)$$

где $F_{тр1} = \mu N_1$, $F_{тр2} = \mu N_2$ согласно закону Амальтона – Кулона. Из системы получаем

$$ma = -\frac{2\mu mg}{d} x,$$

откуда $a = -\frac{2\mu g}{d} x$, $\omega^2 = \frac{2\mu g}{d}$, где a – ускорение, ω – угловая скорость. Закон движения балки имеет вид $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$, график закона движения представлен на рисунке 2.

По графику видно, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается, что не предусмотрено теорией. Экспериментально было показано, что коэффициент трения μ зависит от взаимной скорости между валом и балкой (рис.3).

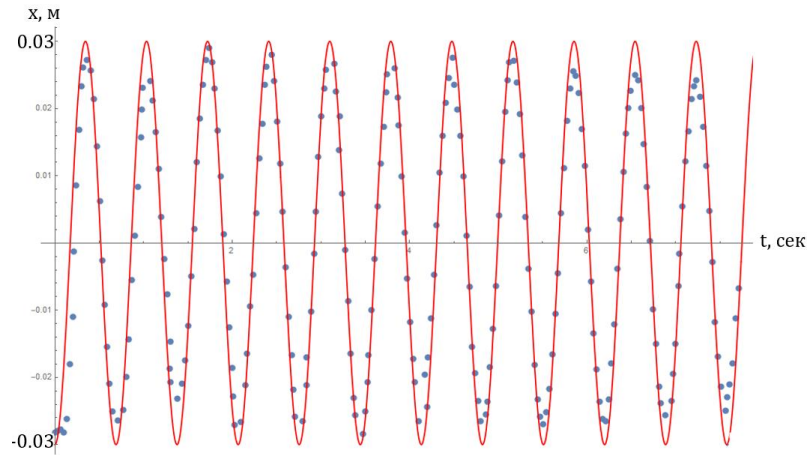


Рисунок 2 – График зависимости смещения центра балки относительно середины расстояния между валами, где красная косинусоида - теоретический закон движения, синие точки - экспериментальные точки.

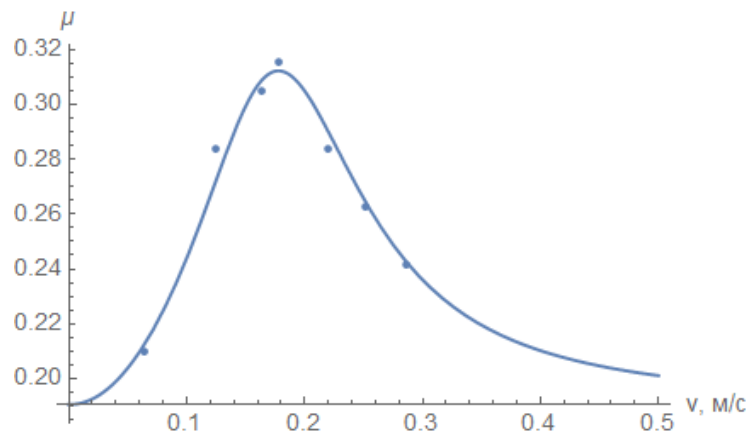


Рисунок 3 – График зависимости коэффициента трения μ от взаимной скорости между валом и балкой, где синяя кривая – аппроксимация, синие точки - экспериментальные точки.

Полученный результат позволяет сделать вывод, что коэффициент трения μ не является константой, а сложно зависит от взаимной скорости между валом и балкой. Построим расширенную математическую модель, преобразовав систему уравнений (1) с учетом того, что $\mu_{1,2} = \mu(V \mp x'(t))$. Имеем

$$\frac{d}{g} x''(t) = \mu[V - x'(t)] \left(\frac{d}{2} - x(t) \right) - \mu[V + x'(t)] \left(\frac{d}{2} + x(t) \right), \quad (2)$$

где $V = 2\pi vr$ – базовая скорость вала, v – частота вращения вала, r – радиус вала.

Предположим, что $V \gg x'(t)$, и построим линейную математическую модель осциллятора на трении, где $\mu[V \pm x'(t)] = \mu[V] \pm k x'(t)$. Тогда, линеаризация зависимости $\mu[v]$ дает $k = \mu'[V]$. Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$x''(t) + kgx'(t) + \frac{2\mu[V]g}{d} x(t) = 0. \quad (3)$$

Аналитически решая задачу Коши для полученного дифференциального уравнения (3) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$, где x_0 – начальное смещение, получим два закона движения.

Если $\frac{2\mu g}{d} - \frac{g^2 k^2}{4} > 0$, то

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{gk}{2}t} \left(\cos \left(t \sqrt{\frac{2\mu g}{d} - \frac{g^2 k^2}{4}} \right) + \frac{kg}{2\sqrt{\frac{2\mu g}{d} - \frac{g^2 k^2}{4}}} \sin \left(t \sqrt{\frac{2\mu g}{d} - \frac{g^2 k^2}{4}} \right) \right). \quad (4)$$

Полученный закон движения описывает медленное осциллирующее «затухание» (возможно как затухание ($k < 0$), так и раскачка колебаний ($k > 0$)).

Если $\frac{g^2 k^2}{4} - \frac{2\mu g}{d} > 0$, то

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{gk}{2}t} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{kg}{4\sqrt{\frac{g^2 k^2}{4} - \frac{2\mu g}{d}}} \right) e^{t\sqrt{\frac{g^2 k^2}{4} - \frac{2\mu g}{d}}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{kg}{4\sqrt{\frac{g^2 k^2}{4} - \frac{2\mu g}{d}}} \right) e^{-t\sqrt{\frac{g^2 k^2}{4} - \frac{2\mu g}{d}}} \right). \quad (5)$$

Такой закон движения описывает быстрое затухание без колебаний, которое на практике не встречалось.

Построенная линейная модель осциллятора дает некорректные результаты. На основе экспериментальных данных методом наименьших квадратов была получена следующая зависимость коэффициента трения μ от взаимной скорости между валом и балкой:

$$\mu(v) = \text{sign}(v) \left(\mu_0 + \frac{av^2}{(v-v_0)^4 + b} \right), \quad (6)$$

где по результатам экспериментов $\mu_0 = 0.1905$, $a = 1.346 \cdot 10^{-3} (\text{м/с})^2$, $b = 2.52 \cdot 10^{-4} (\text{м/с})^4$, $V = 7.84 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$. Зависимость (6) коэффициента трения μ от взаимной скорости между валом и балкой была использована в численном решении дифференциального уравнения (2), в результате чего получена хорошая сходимость численного решения математической модели с практическими результатами.