

УДК 621.391.83:681.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВНЫХ ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ И ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Мойсевич Ю.С.¹, аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники¹
г. Минск, Республика Беларусь

Ильинков В.А. – канд.тех. наук

Аннотация. Предложены удобные для моделирования способы задания составных инфокоммуникационных сигналов во временной области. Построена математическая модель составных сигналов на комплексной плоскости, основанная на кусочно-линейной аппроксимации.

Ключевые слова. Сигнал, задание, модель, временная область, комплексная плоскость, математическое моделирование

Учитывая стремительное развитие современных систем инфокоммуникаций и радиоэлектроники (СИР), математическое моделирование является основным методом их проектирования и разработки. В связи с этим все более актуальной является задача анализа прохождения различных по свойствам сигналов через реальные каналы (функциональные звенья) СИР.

Эффективная система моделирования должна базироваться на удобных моделях описания простых и составных сигналов, функциональных звеньев, обладать математическими моделями и алгоритмами расчета временных, частотных и энергетических характеристик сигналов и реакций [1, 2]. Упомянутым выше требованиям полностью отвечает моделирование сигналов и звеньев на комплексной плоскости с помощью преобразования Лапласа, которое переносит описание и расчет сигналов из области функций действительного переменного t в область комплексного переменного p [3]. Преобразование Лапласа удобно как для теоретических методов исследования, так и для реализации математического моделирования на ПЭВМ [3].

Основной задачей любой системы моделирования является нахождение реакции звена (канала) на входное воздействие $\varphi(t)$. В случае периодического сигнала $\varphi(t) = \varphi(t + T)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ Поэтому до начала моделирования необходимо задать отсчетные значения $\varphi_n = \varphi(n\Delta t)$, ($n = \overline{0, N-1}$; $N = T / \Delta t$).

Анализ разновидностей решаемых задач, технологии и практики математического моделирования показывает, что эффективная система моделирования должна обеспечивать следующие способы задания входного воздействия во временной области: 1) табличный; 2) файловый; 3) аналитический.

В первом способе задается количество отсчетных значений N и формируется таблица (массив) значений сигнала (воздействия) φ_n в точках n , полученных экспериментальным или расчетным путем.

Во втором способе используется набор готовых отсчетных значений сигналов, заданных в виде массива отсчетных значений $D_n = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{N-1}$. В общем случае это встроенная в программный комплекс библиотека сигналов.

Аналитический способ предлагает расширенные возможности моделирования. В этом случае предусматривается возможность задания составного сигнала

$\varphi(t) = \sum_{m=1}^M \varphi_m(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)$ в виде линейной суперпозиции M сигналов, описываемых сложными функциями. В результате воздействие задается в виде

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{\text{III}} \left(\varphi_{m1}^{\text{II}} \left(\varphi_{m1}^{\text{I}}(t) \right) + \varphi_{m2}^{\text{II}} \left(\varphi_{m2}^{\text{I}}(t) \right) + \varphi_{m3}^{\text{II}} \left(\varphi_{m3}^{\text{I}}(t) \right) \right), \quad (1)$$

где φ_m^{III} – функции третьего (высшего) порядка; $\varphi_{m1}^{II}, \varphi_{m2}^{II}, \varphi_{m3}^{II}$ – функции второго порядка; $\varphi_{m1}^I, \varphi_{m2}^I, \varphi_{m3}^I$ – функции первого (низшего) порядка.

Последующий анализ показывает, что для описания практически любого составного сигнала достаточно располагать следующим набором так называемых базовых функций:

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + d + a_4 \sqrt{t} + a_5 \sqrt[3]{t}, f_2(t) = at^{-1} + d, f_3(t) = ae^{ct} + d, f_4(t) = a^{ct} + d, \\
 f_5(t) &= a \ln(bt + c) + d, f_6(t) = a \lg(bt + c) + d, \\
 f_7(t) &= a \sin(bt + c) + d, f_8(t) = a \cos(bt + c) + d, f_9(t) = a \operatorname{tg}(bt + c) + d, f_{10}(t) = a \operatorname{ctg}(bt + c) + d, \\
 f_{11}(t) &= a \arcsin(bt) + c, f_{12}(t) = a \arccos(bt) + c, f_{13}(t) = a \operatorname{arctg}(bt) + c, f_{14}(t) = a \operatorname{arccctg}(bt) + c, \\
 f_{15}(t) &= a \int_0^t f(t) dt \equiv a \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) \Delta t, f_{16}(t) = 0, f_{17}(t) = \emptyset,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a, b, c, d$ – постоянные коэффициенты; $f_{17}(t)$ – пустое множество, функция, которая используется в качестве функции II или III уровня и возвращает значение внутренней функции низшего порядка.

Например, необходимо рассчитать реакцию канала на радиосигнал с периодическим изменением частоты по закону линейной частотной модуляции, который описывается выражением

$$\varphi(t) = U_m \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi \int_0^t \Delta f_1(t) dt + 2\pi \int_0^t \Delta f_2(t) dt + \Phi_0 \right), \tag{3}$$

где f_c – исходная частота сигнала; $\Delta f(t)$ – приращение частоты под действие модулирующего сигнала.

Тогда, чтобы привести функцию $\varphi(t)$ к виду (1) достаточно принять (при $M = 1$):

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}^I(t) &= f_1(t) = 2\pi f_c t, \varphi_{11}^{II}(t) = f_{17}(t) = \emptyset, \varphi_{12}^I(t) = f_{15}(t) = 2\pi \int_0^t \Delta f_1(t) dt, \\
 \varphi_{12}^{II}(t) &= f_{17}(t) = \emptyset, \varphi_{13}^I(t) = f_{15}(t) = 2\pi \int_0^t \Delta f_2(t) dt, \varphi_{13}^{II}(t) = f_{17}(t) = \emptyset, \\
 \varphi_{13}^I(t) &= f_8(t) = \cos(\varphi_{11}^{II}(\varphi_{11}^I) + \varphi_{12}^{II}(\varphi_{12}^I) + \varphi_{13}^{II}(\varphi_{13}^I) + \Phi_0).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Такая форма представления составного сигнала достаточно проста для понимания и удобна в программировании. При необходимости библиотека базовых сигналов (2) может расширяться и дополняться.

В результате задания входного воздействия получены N отчётных значений $D_n = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{N-1}$ ($n = \overline{0, N-1}$; $N = T / \Delta t$). С помощью этих отчётных значений можно выполнить аппроксимацию исходного воздействия.

Существует различные способы аппроксимации. Применительно к данной задаче при одновременном учете сложности и точности представления предпочтительна аппроксимация по способу трапеций, при которой воздействие представляется суммой трапецеидальных элементов, как показано на рисунке 1.

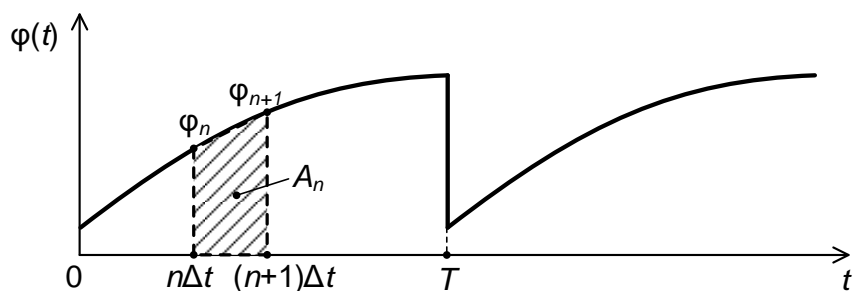


Рисунок 1 – Аппроксимация входного воздействия методом трапеций

В результате исходное воздействие на интервале $[0, T)$ описывается в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n^T(t), \quad (5)$$

где $A_n^T(t)$ – n -ый трапецеидальный элемент, соответствующий отсчётным значениям φ_n, φ_{n+1} .

Чтобы получить представление исходного воздействия (5) на комплексной плоскости, для начала необходимо рассмотреть простые сигналы и их лапласовские изображения.

В задачах моделирования СИК удобно применять следующие простые сигналы (непериодические финитные (рисунок 2, а), периодические (рисунок 2, б), непериодические бесконечно протяженные ((рисунок 2, в)) [4]. Математическое описание этих сигналов во временной области при $0 < t_1 < t_2 < T$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{1T}(t) &= \begin{cases} \varphi(t), [0, t_1) \\ 0, (-\infty, 0) \cup [t_1, \infty) \end{cases}, \quad \varphi_{2T}(t) = \begin{cases} \varphi(t), [0, t_2) \\ 0, (-\infty, 0) \cup [t_2, \infty) \end{cases}, \quad \varphi_{0T}(t) = \begin{cases} \varphi(t), [t_1, t_2) \\ 0, (-\infty, t_1) \cup [t_2, \infty) \end{cases}, \\ \varphi_1(t) &= \begin{cases} \varphi_{1T}(t), [0, T) \\ \varphi_1(t+T), (-\infty, \infty) \end{cases}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi_{2T}(t), [0, T) \\ \varphi_2(t+T), (-\infty, \infty) \end{cases}, \quad \varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi_{0T}(t), [t_1, t_2) \\ \varphi_0(t+T), (-\infty, \infty) \end{cases}, \\ \alpha_1(t) &= \begin{cases} \varphi(t), [t_1, \infty) \\ 0, (-\infty, t_1) \end{cases}, \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} \varphi(t), [t_2, \infty) \\ 0, (-\infty, t_2) \end{cases}, \quad \alpha_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), [0, \infty) \\ 0, (-\infty, 0) \end{cases}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi_{1T}(t), \varphi_{2T}(t), \varphi_{0T}(t)$ – простые непериодические финитные сигналы; $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_0(t)$ – простые периодические сигналы, $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_0(t)$ – простые бесконечно протяженные сигналы; $\varphi(t)$ – образующая аналитическая функция.

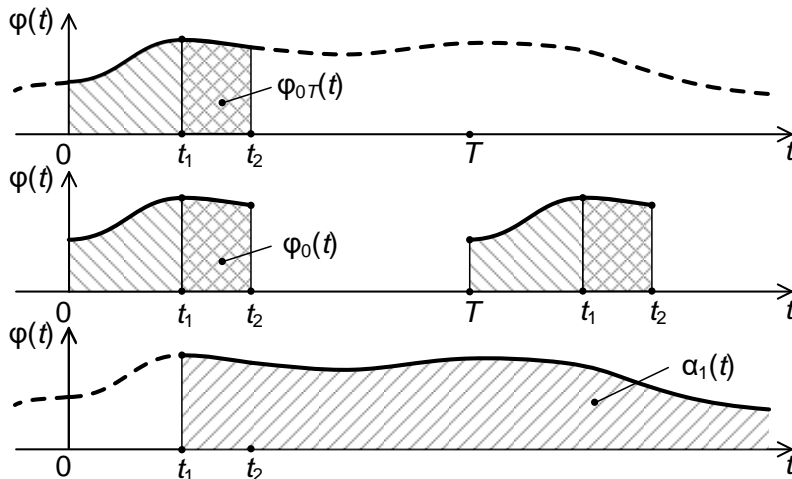


Рисунок 2 – Разновидности простых сигналов

Для сигналов (6) лапласовские изображения представляются в виде [5]:

$$\begin{aligned} \varphi_{1T}(t) &\leftrightarrow \overline{\varphi_{1T}}(p) = S_1(p)e^{-pt_1} - S_0(p), \\ \varphi_{2T}(t) &\leftrightarrow \overline{\varphi_{2T}}(p) = S_2(p)e^{-pt_2} - S_0(p), \\ \varphi_{0T}(t) &= \varphi_{2T}(t) - \varphi_{1T}(t) \leftrightarrow \overline{\varphi_{0T}}(p) = S_2(p)e^{-pt_2} - S_1(p)e^{-pt_1}, \\ \varphi_1(t) &\leftrightarrow \overline{\varphi_1}(p) = \frac{\overline{\varphi_{1T}}(p)}{(1 - e^{-pT})}, \\ \varphi_2(t) &\leftrightarrow \overline{\varphi_2}(p) = \frac{\overline{\varphi_{2T}}(p)}{(1 - e^{-pT})}, \\ \varphi_0(t) &\leftrightarrow \overline{\varphi_0}(p) = \frac{\overline{\varphi_{0T}}(p)}{(1 - e^{-pT})}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_0(t) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \varphi_{1T}(t) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \varphi_{2T}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \varphi_{2T}(t) \leftrightarrow \overline{\alpha_0}(p) = -S_0(p) = -\lim_{t_1 \rightarrow 0} S_1(p) = -\lim_{t_2 \rightarrow 0} S_2(p),$$

$$\alpha_1(t) = \alpha_0(t) - \varphi_{1T}(t) \leftrightarrow \overline{\alpha_1}(p) = \overline{\alpha_0}(p) - \overline{\varphi_{1T}}(p) = -S_0(p) - (S_1(p)e^{-pt_1} - S_0(p)) = -S_1(p)e^{-pt_1},$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_0(t) - \varphi_{2T}(t) \leftrightarrow \overline{\alpha_2}(p) = \overline{\alpha_0}(p) - \overline{\varphi_{2T}}(p) = -S_0(p) - (S_2(p)e^{-pt_2} - S_0(p)) = -S_1(p)e^{-pt_2},$$

где $\overline{\varphi_{1T}}(p)$, $\overline{\varphi_{2T}}(p)$, $\overline{\varphi_{0T}}(p)$ – изображения простых непериодических финитных сигналов $\varphi_{1T}(t)$, $\varphi_{2T}(t)$, $\varphi_{0T}(t)$; $\overline{\varphi_1}(p)$, $\overline{\varphi_2}(p)$, $\overline{\varphi_0}(p)$ – изображения простых периодических сигналов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_0(t)$; $\overline{\alpha_1}(p)$, $\overline{\alpha_2}(p)$, $\overline{\alpha_0}(p)$ – изображения простых бесконечно протяженных сигналов $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_0(t)$;

Таким образом, согласно выражениям (7), изображение элемента $A_n^T(t)$ представляется в виде

$$A_n^T(t) \leftrightarrow \overline{A_n^T}(p) = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} A_n^T(t)e^{-pt} dt = S_{n2}(p)e^{-pt_2} - S_{n1}(p)e^{-pt_1}, \quad (8)$$

где $t_2 = (n+1)\Delta t$; $t_1 = n\Delta t$.

Выполняя необходимые преобразования можно получить следующее выражение для $S_{n2}(p)$, $S_{n1}(p)$ и $S_{n0}(p)$:

$$S_{n2}(p) = \frac{(p + a_{n2})}{C_{n2}p^2}, S_{n1}(p) = \frac{(p + a_{n1})}{C_{n1}p^2}, S_{n0}(p) = \frac{(p + a_{n0})}{C_{n0}p^2}, \quad (9)$$

где

$$a_{n2} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t \varphi_{n+1}}; a_{n1} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t \varphi_n}; a_{n0} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t (\varphi_n - n(\varphi_{n+1} - \varphi_n))}; C_{n2} = -\frac{1}{\varphi_{n+1}}; C_{n1} = -\frac{1}{\varphi_n}; C_{n0} = -\frac{1}{\varphi_n - n(\varphi_{n+1} - \varphi_n)}.$$

Зная изображение $\overline{A_n^T}(p)$ одиночного элемента $A_n^T(t)$, согласно (7) находим лапласовское изображение $\overline{A_n}(p)$ периодической последовательности $A_n(t)$ этих элементов:

$$\overline{A_n}(p) = \frac{\overline{A_n^T}(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (10)$$

Тогда изображение всего периодического входного воздействия $\overline{\varphi}(p)$ определяется выражением:

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (S_{n2}(p)e^{-pt_2} - S_{n1}(p)e^{-pt_1})}{1 - e^{-pT}}. \quad (11)$$

Зная изображение исходного воздействия, можно найти реакцию линейного звена (канала), описываемого операторной передаточной функцией $K_z(p)$ [4], на данное воздействие:

$$\overline{\psi}(p) = \overline{\varphi}(p)K_z(p). \quad (12)$$

Таким образом, с помощью преобразования Лапласа получена модель описания составных сигналов на комплексной плоскости. Наиболее важным преимуществом использования преобразований Лапласа является то, что сложные операции дифференцирования и интегрирования сигналов во временной области для их изображений на комплексной плоскости заменяются простыми алгебраическими действиями (умножением и делением), что существенно упрощает моделирование и с легкостью реализуется на ПЭВМ.

Список использованных источников:

1. Трухин, М. П. Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоэлектронных средств : учеб. пособие для вузов / М. П. Трухин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 440 с.
2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов/ С. И. Баскаков. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Ленанд, 2016. – 528 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. Изд. 6-е, стереотип. СПб.: Лань, 2002. 688 с.
4. Беленкевич, Н. И. Совместное математическое описание сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники / Н. И. Беленкевич, В. А. Ильинков // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-тэxn. навук. – 2017. – № 4. – С. 93–104.
5. Ильинков, В. А. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое и непериодическое воздействие / В. А. Ильинков, Н. И. Ильинкова // Вестник БГУ. Сер. 1: Физика, математика, информатика. – 1999. – № 3. – С. 33–38.

UDC 621.391.83:681.5

SIMULATION OF COMPOSITE INFOCOMMUNICATION SIGNALS ON THE COMPLEX PLANE AND IN THE TIME DOMAIN

Maisiyevich Y.S.¹

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics¹, Minsk, Republic of Belarus

Ilyinkov V.A. – PhD in Technology

Annotation. Convenient for modeling methods of specifying composite infocommunication signals in the time domain are proposed. A mathematical model of composite signals on a complex plane based on piecewise-linear approximation is built.

Keywords. Signal, assignment, model, time domain, complex plane, mathematical modeling.