М.А. Бейсенби, Г.Б. Дуйсенгали

# СИНТЕЗ ИДЕАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С ПОВЫШЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

*В данной работе рассматривается решения задачи синтеза идеального регулятора с повышенным потенциалом робастной устойчивости для адаптивной системы с одним входом и с одним выходом в классе однопараметрических структурно-устойчивых отображений градиентно-скоростным методом вектор-функции Ляпунова. Синтеза идеального регулятора является важной задачей при созданий адаптивной системы управления и является гарантией качественной работы системы. Исследуется устойчивость системы, робастность и качества работы объекта, градиентно- скоростным методом вектор-функции Ляпунова.*

На сегодняшний день актуальной задачей считается проектирование систем управления с высокой защитой, которые могут обеспечить робастную сверхустойчивость при любых значениях неопределённостей параметров. Под робастность системы мы понимаем умения системы управления сохранять устойчивость на разных условиях. Неопределённость в системах возникают при наличиях неконтролируемых возмущений, а также при непредсказуемых изменениях параметров.

Исследованию робастной устойчивости систем управления посвящены множества научных работ [1,2]. В частности, многие из них исследуют робастность линейно устойчивых полиномов и матриц. Но, известные методы не рассматривают задачи управления, где динамические свойства объекта меняются больших пределах

Настоящая работа посвящена разработке и изучению сверхустойчивости систем управления повышенными потенциалом робастной устойчивости основного объекта с одним входом и с одним выходом [3,4,5].

## I. Постановка задачи

Пусть система управления с одним входом и с одним выходом задается уравнением

$$\dot{x} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu} \tag{1}$$

Закон управления задается в форме одно параметрических структурно-устойчивых отображений:

$$u_i\left(t\right) = -x_i^3 + k_i x_i,\ \mathrm{i} = 1,\ \ldots,\mathrm{n} \tag{2}$$

здесь $x(\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^n$ - вектор состояния объекта управления, $\mathrm{u}(\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^m$ - вектор функции управления.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -1 \end{Vmatrix} . b = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ b_n \end{Vmatrix}$$

Уравнения состояния (1) развернутой форме представляется

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -b_n\ x_1^3 - \left(a_n - b_n k_1\right) x_1 - b_n\ x_2^3 - \\ - \left(a_{n-1} - b_n k_2\right) x_2 - b_n\ x_3^3 \\ - \left(a_{n-2} - b_n k_3\right) x_3 -, \ldots, - \\ -x_n^3 - \left(a_1 - b_n k_n\right) x_n \end{cases} \tag{3}$$

Находим установившееся состояния системы (3):

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0 \\ -b_n x_{1s}^3 - \left(a_n - b_n k_1\right) x_{1s} - b_n\ x_{2s}^3 - \\ \left(a_{n-1} - b_n k_2\right) x_{2s} -, \ldots, - \\ -x_{ns}^3 - \left(a_1 - b_n k_n\right) x_{ns} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) находим тривиальное решение:

$$x_{1s} = 0,\ x_{2s} = 0,\ \ldots,\ x_{n6} = 0. \tag{5}$$

Другие стационарные состояния системы (4) будет определятся решением уравнения:

$$\begin{cases} x_{1s}^2 - \left(k_1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = 0 \\ x_{2s}^2 - \left(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n}\right) = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_{ns}^2 - \left(k_n - \frac{a_1}{b_n}\right) = 0 \end{cases}$$

Не тривиальное решение системы (4) имеет вид

$$x_{1s}^{2,3} = \pm\sqrt{k_1 - \frac{a_n}{b_n}}, x_{2s}^{2,3} = \pm\sqrt{k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n}}, \ldots\ x_{ns}^{2,3}$$

$$= \pm\sqrt{k_n - \frac{a_1}{b_n}}. \tag{6}$$

## II. Метод исследования

1. Исследуем сверхустойчивость стационарного состояния (5) градиентно скоростным методом вектор функции Ляпунова [4].

Из уравнений состояния (3) определяем компонентов вектора градиентов.

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}=-x_2,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_n}=0 \\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3}=-x_3,\ \ldots,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_n}=0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\partial V_{n-1}(x)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V_{n-1}(x)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial V_{n-1}(x)}{\partial x_3}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_n} \\ =-x_n \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}=b_n x_1^3+b_n(k_1-\frac{a_n}{b_n})x_1,\ \frac{\partial V_n(x)}{\partial x_2}= \\ b_n x_2^3+b_n(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2, \\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3}=b_n x_3^3+b_n(k_3-\frac{a_{n-2}}{b_n})x_3,\ldots,\frac{\partial V_n(x)}{\partial x_n}= \\ b_n x_n^3+b_n(k_n-\frac{a_1}{b_n})x_n \end{cases} \tag{7}$$

Из (3) определяем разложения компонентов вектора скорости по координатам x1,…, xn системы (3):

$$\begin{cases} \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_1}=0,\ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_2}=x_2,\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_3}=0,\ \ldots, \\ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_n}=0, \\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_1}=0,\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_2}=0,\left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_3}=x_3,\ \ldots, \\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_n}=0, \\ \ldots \quad \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \left(\frac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_1}=0,\left(\frac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_2}=0,\left(\frac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_3} \\ =0,\left(\frac{dx_{n-1}}{dt}\right)_{x_n}=-x_n \\ \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{x_1}=\ -b_n\ (x_1^3\ (k_1-\frac{a_n}{b_n})x_1]\left(\frac{dx_n}{dt}\right)x \\ =-b_n[x_2^3-\ (k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2], \\ \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{x_1}=\ -b_n[x_3^3\ (k_3-\frac{a_{n-2}}{b_n})x_3]-,\ldots,\left(\frac{dx_n}{dt}\right)x_n \\ =-b_n[x_n^3-\ (k_n-\frac{a_1}{b_n})x_n] \end{cases} \tag{8}$$

Полную производную по времени от вектор функций Ляпунова представим, как скалярное произведение вектора градиента (7) на вектор скорости (8):

$$\frac{dV(x)}{dt}=-x_2^2-x_3^2-,\ldots,-x_n^2-b_n^2[x_1^3-(k_1-\frac{a_n}{b_n})x_1]^2-b_n^2[x_2^3-(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2]^2-\ b_n^2[x_3^3-(k_3-\frac{a_{n-2}}{b_n})x_3]^2-$$

$$,\ldots,-b_n^2[x_n^3-(k_n-\frac{a_n}{b_n})x_n]^2. \tag{9}$$

Условия отрицательной определенности полной производной по времени (9) от функции Ляпунова гарантированно выполняется при таком выборе градиентов вектор функции Ляпунова.

По компонентам вектора градиента (7) получим вектор-функции Ляпунова скалярной форме.

$$V(x)=\frac{1}{4}b_n x_1^4\ -\frac{1}{2}b_n(k_1-\frac{a_n}{b_n})x_1^2+\frac{1}{4}b_n x_2^4\ -\frac{1}{2}b_n(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2^2+\frac{1}{4}b_n x_3^4\ -\frac{1}{2}b_n(k_3-\frac{a_{n-2}}{b_n})x_3^2+$$

$$,\ldots,+\frac{1}{4}b_n x_n^4\ -\frac{1}{2}b_n(k_n-\frac{a_n}{b_n})x_n^2 \tag{10}$$

Условия существования (положительная) определенность функций Ляпунова (10) определяется неравенствами:

$$\begin{cases} -b_n\left(k_1-\frac{a_n}{b_n}\right)>0 \\ -b_n\left(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}\right)>0 \\ -b_n\left(k_3-\frac{a_{n-2}}{b_n}+\frac{1}{b_n}\right)>0 \\ \ldots \qquad \ldots \\ -b_n\left(k_n-\frac{a_1}{b_n}+\frac{1}{b_n}\right)>0 \end{cases} \tag{11}$$

Стационарное состояния (5) будет сверхустойчивой, если выполняются условий (11).

1. Исследуем сверхустойчивость стационарного состояния (6), градиентно-скоростным методом вектор-функции Ляпунова [5]. Для этого уравнения состояния системы (3) представим в отклонениях относительно стационарного состояния (5):

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)}=x_n \\ \dot{x}_n=b_n x_1^3+3b_n\sqrt{k_2-\frac{a_n}{b_n}x_1^2}-b_n\left(k_1-\frac{a_n}{b_n}\right) \\ x_1-b_n\ x_2^3+3b_n\sqrt{k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n}}x_2^2- \\ b_n(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2,\ldots,-b_n\ x_n^3+3b_n\sqrt{k_2-\frac{a_n}{b_n}}x_n^2 \\ -b_n(k_n-\frac{a_n}{b_n})x_n \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) определяем компонентов вектора градиента от вектора функций Ляпунова

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2}=-x_2,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_n}=0 \\ \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_3}=-x_3,\ \ldots,\ \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_n}=0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\partial V_n(x)}{\partial x_1}=b_n x_1^3+3\ b_n\sqrt{k_2-\frac{a_n}{b_n}}x_1^2-b_n\left(k_1-\frac{a_n}{b_n}\right)x_1, \\ \frac{\partial V_n(x)}{\partial x_1}=b_n x_2^3- \\ -3b_n\sqrt{k_n-\frac{a_{n-1}}{b_n}}x_2^2-b_n(k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n})x_2+,\ldots,+b_n x_n^3 \\ -3b_n\sqrt{k_n-\frac{a_1}{b_n}}x_n^2-b_n(k_2-\frac{a_1}{b_n}) \end{cases} \tag{13}$$

Из (12) определяем разложение компонентов вектора скорости по координатам системы

$$\begin{cases} \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_1}=0,\ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_2}=x_2,\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_3}=0,\ \ldots,\ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{x_n}=0, \\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_1}=0,\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_2}=0,\left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_3}=x_3,\ \ldots,\ \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{x_n}=0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{x_1}=\ -b_n\ \left[(x_1^3-3\sqrt{k_1-\frac{a_n}{b_n}}x_1^2-\left(k_1-\frac{a_n}{b_n}\right)x_1\ \right],\left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{k2} \\ =-b_n[x_2^3-\ -3\sqrt{k_2-\frac{a_{n-1}}{b_n}}x_2^2-\left(k_1-\frac{a_n}{b_n}\right)x_1\Big]-,\ldots \\ -b_n\ [x_n^3-\ -3\sqrt{k_n-\frac{a_1}{b_n}}x_n^2-\left(k_n-\frac{a_1}{b_n}\right)x_n\Big] \end{cases} \tag{14}$$

Находим полную производную от вектор-функций Ляпунова, как скалярное произведение вектора скорости (14) на вектор градиента (15)

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x_2^2 - x_3^2 -, \dots, -x_n^2$$
$$-b_n^2[x_1^3 - 3\sqrt{k_1 - \frac{a_n}{b_n}} x_2^1 + (k_1 - \frac{a_n}{b_n})x_1]^2$$
$$-b_n^2[x_2^3 - 3\sqrt{k_2 - \frac{a_{n-1}}{B_n}} x_2^2 + (k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n})x_2]^2 -, \dots,$$
$$-b_n^2[x_n^3 - 3\sqrt{k_n - \frac{a_1}{b_n}} x_n^2 + (k_n - \frac{a_n}{b_n})x_n]^2 \tag{15}$$

Функция (15) является знакоотрицательной функцией.

По компонентам вектора градиентов (13) построим вектор-функций Ляпунова скалярной форме:

$v(x) = \frac{1}{4}b_n x_1^4 - -b_n\sqrt{k_2 - \frac{a_n}{b_n}} x_1^3 + cx_1^2 + \frac{1}{4}b_n x_2^4 - -\sqrt{k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n}} x_2^3 + \frac{1}{2}b_n(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b} - \frac{1}{b_n})x_2^2 + \frac{1}{4}b_n x_3^2 - -b_n\sqrt{k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n}} x_3^3 + \frac{1}{2}b_n(k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n} - \frac{1}{b_n})x_3^2 +, \dots, \frac{1}{4}b_n x_n^4 - -b_n\sqrt{k_n - \frac{a_1}{b_n}} x_n^3$

$$+\frac{1}{2}b_n(k_n - \frac{a_n}{b_n} - \frac{1}{b_n})x_n^2 \tag{16}$$

Из (16) очевидным образом можно получить условий существования функций Ляпунова не удается. Функция (16) удовлетворяет условиям леммы Морса из теории катастроф [6,7], поэтому функцию (16) можем заменить квадратичной формой.

$V(x) \approx \frac{1}{2}b_n(k_2 - \frac{a_n}{b_n})x_1^2 + \frac{1}{2}b_n(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n} - \frac{1}{b_n})x_2^2 + \frac{1}{2}b_n(k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n} - \frac{1}{b_n})x_3^2, \dots,$

$$+\frac{1}{2}b_n(k_n - \frac{a_n}{b_n} - \frac{1}{b_n})x_n^2 \tag{17}$$

Условия положительной определенности функций (17) представляется в виде:

$$\begin{cases} b_n\left(k_1 - \frac{a_n}{b_n}\right) > 0 \\ b_n\left(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) > 0 \\ b_n\left(k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) > 0 \\ \cdots \qquad \cdots \\ b_n\left(k_n - \frac{a_1}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) > 0 \end{cases} \tag{18}$$

Если в результате исследований градиентно-скоростным методом вектор-функций Ляпунов эталонной модели адаптивной системы заданного качества имеем условий апериодической робастной устойчивости

$$-d_n^m > 0,\ -d_{n-1}^m - 1 > 0, -d_{n-2}^m - 1 > 0, \cdots - d_1^m - 1 > 0, \tag{19}$$

Или

$$d_n^m > 0,\ d_{n-1}^m - 1 > 0, d_{n-2}^m - 1 > 0, \dots d_1^m - 1 > 0, \tag{20}$$

Где $d_n^m$, $i = 1, \dots .n$ известные параметры эталонной модели , то сравнивая левые части неравенства () и () получаем

$$\begin{cases} b_n\left(k_1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = -d_n \\ b_n\left(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n} + \frac{1}{b_n}\right) = -(d_{n-1} + 1) \\ b_n\left(k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n} + \frac{1}{b_n}\right) = -(d_{n-2} + 1) \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ b_n\left(k_n - \frac{a_1}{b_n} + \frac{1}{b_n}\right) = -(d_1 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{a_n}{b_n} - \frac{d_n}{b_n} \\ k_2 = \frac{a_{n-1}}{b_n} - \frac{d_{n-1}}{b_n} \\ k_3 = \frac{a_{n-2}}{b_n} - \frac{d_{n-2}}{b_n} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ k_n = \frac{a_1}{b_n} - \frac{d_1}{b_n} \end{cases} \tag{21}$$

или

$$\begin{cases} b_n\left(k_1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = d_n \\ b_n\left(k_2 - \frac{a_{n-1}}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) = d_{n-1} - 1 \\ b_n\left(k_3 - \frac{a_{n-2}}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) = d_{n-2} - 1 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ b_n\left(k_n - \frac{a_1}{b_n} - \frac{1}{b_n}\right) = d_1 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{a_n}{b_n} + \frac{d_n}{b_n} \\ k_2 = \frac{a_{n-1}}{b_n} + \frac{d_{n-1}}{b_n} \\ k_3 = \frac{a_{n-2}}{b_n} + \frac{d_{n-2}}{b_n} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ k_n = \frac{a_1}{b_n} + \frac{d_1}{b_n} \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом система (3) является системой управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости и обеспечивает сверхустойчивость при любых значениях неопределенных параметров.

А для системы с одним входом и с одним выходом в классе однопараметрических структурно-устойчивых отображений идеальный регулятор с повышенным потенциалом робастной устойчивости адаптивной системы вычисляется по формулам (21) и (22).

## III. Заключение

Задача робастной устойчивости систем управления является одним из самых актуальных вопросов в теория автоматического управления, в связи с чем на эту тему посвящены множества научных работ. В частности, многие из них исследуют робастность полиномов и матриц. Известные методы не рассматривают задачи управления, где динамические свойства объекта меняются в неизвестном пределе.

Предлагается метод определения области изменения параметров объекта, регулятора, обеспечивая робастную устойчивость при изменениях параметров. В свою очередь это обеспечивает управления режимами неустойчивости в системе управления. Выбранный Градиентно –скоростной метод вектор-функции Ляпунова позволяет решить задачу построения идеального регулятора с повышенным потенциалом робастной устойчивости адаптивной системы

### *Список литературы*


1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С / Робастная устойчивость и управление – М.: Наука, 2002. – 303 с.*
2. *Кунцевич В.М. /Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К.: Наукова Думка, 2007. – 620 с.*
3. *Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х томах. – Т.1. – М.: Мир, 1984.*
4. *Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Наука, 2001.*
5. *Бейсенби М.А. /Исследование робастной устойчивости систем автоматического управления методом функций А.М. Ляпунова. – Астана, 2015. – 204 с.*
6. *Бейсенби М.А./ Методы повышения потенциала робастной устойчивости систем управления. – Астана, 2011. – 292 с.*
7. *Beisenbi M., Uskenbayeva G., Satybaldina D., Martsenyuk V., Shailhanova A. /Robust stability of spacecraft traffic control system using Lyapunov functions // 16th International Conference on Control, Automation and System (ICCAS), IEEE. – 2016. pp. 743-748.*



*Дуйсенгали Гулбакыт Бактыгаликызы*, докторант Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Нур-Султан, Республика Казахстан

*Бейсенби Мамырбек Аукебайулы*, д.т.н, профессор