*Геаметрыя*

УДК 514.765.14

Н. П. Можей

# АЛГЕБРЫ ГОЛОНОМИИ НЕТРИВИАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ БЕЗ КРУЧЕНИЯ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Во введении указан объект исследования – алгебры голономии аффинных связностей. В работе изучены трехмерные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность с только нулевым кручением. Определены основные понятия: однородное пространство, изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, алгебра голономии. Целью данной работы является описание ненулевых алгебр голономии нетривиальных связностей с нулевым кручением на трехмерных однородных пространствах, а также самих однородных пространств, допускающих связности указанного вида. В основной части работы для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях инвариантная аффинная связность является нетривиальной с только нулевым кручением. Также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры Риччи, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят в основном локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. В заключении изложены полученные результаты, которые являются новыми и могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики, а алгоритмы, приведенные в исследовании, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

***Ключевые слова:*** аффинная связность, однородное пространство, тензор кривизны, алгебра голономии, тензор кручения.

**Введение.** Еще Феликс Клейн [1] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т.е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Этот подход произвел революцию в изучении геометрии и продолжает влиять на ее развитие и сегодня. Основополагающим в подходе Ф. Клейна является понятие однородного пространства. Интерес к трехмерным геометриям после Г. Римана, Ф. Клейна и Н. И. Лобачевского возобновился в связи с развитием других областей науки, например общей теории относительности и трехмерной топологии; У. Терстон разработал метод исследования трехмерных многообразий; широко известны гипотеза Пуанкаре и более общая гипотеза Терстона о геометризации трехмерных многообразий [2], доказательство которых предложено Г. Перельманом. После работ Э. Картана (например, [3]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках «кривого» пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [4]. Также связности – важнейший объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А. П. Нордена, П. К. Рашевского, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии.

***Можей Наталья Павловна,*** канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. программного обеспечения информационных технологий БГУИР (Беларусь).

***Адрес для корреспонденции:*** ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

В качестве примеров можно привести голономию связности Леви–Чевита в римановой геометрии (называемую «римановой голономией»), голономию связностей в векторных расслоениях, голономию связностей Картана и др. В каждом из перечисленных случаев голономия связности может быть описана через группу Ли – группу голономии. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 г. и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 г. у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия. Э. Картан исследовал голономию для изучения и классификации симметрических пространств, позже группы голономии использовались, чтобы изучить риманову геометрию в целом. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии (т.е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работе [5] и других работах автора. Связь группы голономии лоренцевых пространств с рекуррентными тензорными полями рассматривалась в [6], применение групп голономии в супергравитации описано в [7], а также в [8]. Детальный анализ групп голономии и их приводимости для естественно редуктивных однородных пространств и произвольных римановых однородных пространств проведен Б. Костантом в [9] и [10] соответственно. Алгебры голономии тривиальных связностей изучались в работах [11; 12], целью же данного исследования является описание алгебр голономии нетривиальных аффинных связностей без кручения на трехмерных однородных пространствах, их тензоров кривизны и тензоров Риччи, а также самих однородных пространств, допускающих связности указанного вида.

**Основные определения.** Пусть $M$ – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли $\bar{G}$, ($M$, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств ($M$, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, $G$), где $G \subset \bar{G}$ (например, [13]). Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для $G$ должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [14]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе $G$. Пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется изотропно-точной, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии (например, [15]) с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). Тензоры кручения $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) =$ $-[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что $\Lambda$ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [16] об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, $V$ – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

**Алгебры голономии нетривиальных связностей.** Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [17], где $d$ – размерность подалгебры, $n$ – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а $m$ – номер пары. Связность называется тривиальной, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$, в противном случае связность нетривиальная. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны $R$ – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения $T$ – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$.

**Теорема 1. А.** *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (и ненулевой алгеброй голономии), такие, что* $\overline{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой, локально имеют следующий вид:*

| 2.8.7, $\lambda = 1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(1/2)e_1$ | $e_1$ | 0 | $u_1$ |
| $e_2$ | $-(1/2)e_1$ | 0 | 0 | $u_2$ | $(1/2)u_3$ |
| $u_1$ | $-e_1$ | 0 | 0 | 0 | $u_3$ |
| $u_2$ | 0 | $-u_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_3$ | $-u_1$ | $-(1/2)u_3$ | $-u_3$ | 0 | 0 |

| 3.13.6, $\mu = 1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $-(1/2)e_2$ | $(1/2)e_3$ | $u_1$ | 0 | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $(1/2)e_2$ | 0 | 0 | $e_3$ | $2e_2$ | $u_2$ |
| $e_3$ | $-(1/2)e_3$ | 0 | 0 | 0 | $e_3$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $-e_3$ | 0 | 0 | $-u_1$ | 0 |
| $u_2$ | 0 | $-2e_2$ | $-e_3$ | $u_1$ | 0 | $2u_3$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | $-2u_3$ | 0 |

| 4.21.11, $\mu = 1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $e_2$ | $-(1/2)e_3$ | $(1/2)e_4$ | $u_1$ | 0 | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $-e_2$ | 0 | $e_4$ | 0 | 0 | $e_2+u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $(1/2)e_3$ | $-e_4$ | 0 | 0 | 0 | $-2e_3$ | $u_2$ |
| $e_4$ | $-(1/2)e_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-e_4$ | $e_2+u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | $-e_2-u_1$ | $2e_3$ | $e_4$ | 0 | 0 | $-2u_3$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | 0 | $-u_2$ | $-e_2-u_1$ | 0 | $2u_3$ | 0 |

**Б.** *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (и ненулевой алгеброй голономии), такие, что* $\overline{\mathfrak{g}}$ *разрешима, локально имеют следующий вид:*

| 1.2.1, $\lambda = 1/4$, $\mu = 1/2$ | $e_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $u_1$ | $(1/4)u_2$ | $(1/2)u_3$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/4)u_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | 0 | 0 | 0 |

| 2.9.1, $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/4$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(3/4)e_2$ | $u_1$ | $(1/2)u_2$ | $(1/4)u_3$ |
| $e_2$ | $-(3/4)e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/2)u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_3$ | $-(1/4)u_3$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 |

| 2.9.3, $\mu = 1/4$ | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(3/4)e_2$ | $u_1$ | $(1/2)u_2$ | $(1/4)u_3$ |
| $e_2$ | $-(3/4)e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/2)u_2$ | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $u_3$ | $-(1/4)u_3$ | $-u_1$ | 0 | $-e_2$ | 0 |

| 3.13.2, $\mu = 1/4 \vee \mu = 1/2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(1-3\mu)e_2$ | $(1-\mu)e_3$ | $u_1$ | $(1-2\mu)u_2$ | $\mu u_3$ |
| $e_2$ | $(3\mu-1)e_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_2$ |
| $e_3$ | $(\mu-1)e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $(2\mu-1)u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $-\mu u_3$ | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

| 3.20.4, $\lambda = 1/4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(3/4)e_2$ | $(1/2)e_3$ | $u_1$ | $(1/4)u_2$ | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $-(3/4)e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $-(1/2)e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/4)u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | $-e_2$ | 0 |

| 3.20.26, $\lambda = 1/4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(3/4)e_2$ | $(1/2)e_3$ | $u_1$ | $(1/4)u_2$ | $(1/2)u_3$ |
| $e_2$ | $-(3/4)e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $-(1/2)e_3$ | 0 | 0 | 0 | $e_2$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/4)u_2$ | $-u_1$ | $-e_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_3$ | $-(1/2)u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 |

| 3.20.27 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $(4/5)e_2$ | $(3/5)e_3$ | $u_1$ | $(1/5)u_2$ | $(2/5)u_3$ |
| $e_2$ | $-(4/5)e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | $-(3/5)e_3$ | 0 | 0 | 0 | $e_2$ | $u_1$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | $-(1/5)u_2$ | $-u_1$ | $-e_2$ | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $-(2/5)u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | $-e_3$ | 0 |

Действительно, заметим, что если кривизна нулевая, то алгебра голономии также нулевая, т.е. будем рассматривать случай ненулевой кривизны. Случай алгебр голономии тривиальных связностей изучался в работах [11; 12], поэтому рассматриваем только нетривиальные связности. Подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ описаны, например, в [17]. Для каждой такой подалгебры найдены изотропно-точные пары, инвариантные аффинные связности на них и определены пары, допускающие нетривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии (причем кручение только нулевое).

Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = \overline{1,3}$). Рассмотрим, например, локально однородное пространство 3.13.6 при $\mu = 1/2$ (случай А), тогда $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, имеем $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{2,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_3)$, $p_{1,2} = -1$, $p_{1,1} = p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, $p_{1,1} = p_{2,3} = p_{1,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(e_3)$, то $q_{3,1} = q_{3,2} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1} + 1$, $q_{2,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2} = 0$, $q_{1,1} = q_{2,2} + 1$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$, имеем $q_{1,3} = q_{2,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, то $r_{3,1} = 0$, $r_{3,2} = -1$, $r_{3,3} = r_{1,1}$, $r_{2,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = r_{1,2} = 0$, $r_{1,1} = r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = (1/2)\Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = 0, r_{2,3} = 0$. Получим, что

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны $R(u_1, u_2) = R(u_1, u_3) = 0$,

$$R(u_2, u_3) = \left[\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)\right] - \Lambda(\left[u_2, u_3\right]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения получился нулевым, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, $V$ – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, при $r_{1,3} \ne 0$ $\mathfrak{h}^*$ не совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ (т.е. алгебра голономии не является совершенной), $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, связность не является нормальной. При $r_{1,3} \ne 0$ алгебра голономии нулевая.

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность, кривизна которой не только нулевая, а кручение только нулевое, таких, что $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой, рассуждения аналогичны. Таким образом, получаем, что аффинные связности (в случае А) имеют вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1 – Аффинные связности ($\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима)

| Пара | Аффинная связность |
|---|---|
| 4.21.11, $\mu = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.13.6, $\mu = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2.8.7, $\lambda = 1/2$ | $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения $T$ также нулевые.

Рассмотрим теперь локально однородное пространство 3.13.2 при $\mu \ne 0$ (случай Б), тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отображение $\Lambda$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$, следовательно, $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{2,1} = 0$. Из $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, получим $p_{1,2}=0$, $p_{1,1}=p_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda(u_1)$, то $p_{1,1}=p_{2,3}=p_{1,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=0$, то $q_{3,1}=q_{3,2}=q_{2,1}=0$, $q_{3,3}=q_{1,1}$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=0$, $q_{1,2}=0$, $q_{1,1}=q_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=(1-2\mu)\Lambda(u_2)$, имеем $(-1+2\mu)q_{1,1}=q_{1,3}=q_{2,3}=0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$, то $r_{3,1}=r_{3,2}=r_{2,1}=0$, $r_{3,3}=r_{1,1}$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $q_{1,1}=r_{1,2}=0$, $r_{1,1}=r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=\mu\Lambda(u_3)$, получим $r_{1,1}=r_{1,3}(1-2\mu)=r_{2,3}(1-4\mu)=0$. Итак,

$$\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix};\ r_{1,3}=0 \text{ при } \mu\neq 1/2,\ r_{2,3}=0 \text{ при } \mu\neq 1/4.$$

Тензор кривизны $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=0$,

$$R(u_2,u_3)=\left[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)\right]-\Lambda(\left[u_2,u_3\right])=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения – нулевой, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ совершенна (совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$), $\mathfrak{h}^*=\begin{pmatrix}0&0&p_1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $p_1\in\mathbb{R}$ связность не является нормальной.

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (кривизна которой не только нулевая), таких, что $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой, рассуждения аналогичны. Таким образом, получаем, что, как и в случае А, в случае Б аффинные связности имеют вид, представленный в таблице 2.

Таблица 2 – Аффинные связности ( $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима)

| Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ | Аффинная связность |
|---|---|
| 3.13.2, $\mu=1/4$ | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$ |
| 3.13.2, $\mu=1/2$<br>3.20.4, $\lambda=1/4$ | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ |
| 3.20.26, $\lambda=1/4$ | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ |
| 3.20.27 | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ |
| 2.9.1, $\lambda=1/2,\mu=1/4$<br>2.9.3, $\mu=1/4$ | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$ |
| 1.2.1, $\lambda=1/4,\mu=1/2$ | $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ |

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения $T$ также нулевые.

Находим и выписываем тензоры кривизны всех приведенных связностей. В случае А имеем, что тензоры кривизны имеют вид, указанный в таблице 3.

Таблица 3 – Тензоры кривизны ( $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима)

| Пара | Тензор кривизны |
|---|---|
| 4.21.11, $\mu = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.13.6, $\mu = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2.8.7, $\lambda = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

В случае Б получаем, что тензоры кривизны имеют вид, указанный в таблице 4.

Таблица 4 – Тензоры кривизны ( $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима)

| Пара | Тензор кривизны |
|---|---|
| 3.13.2, $\mu = 1/4, 1/2$<br>3.20.27 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.20.4, $\lambda = 1/4$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.20.26, $\lambda = 1/4$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2.9.1, $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2.9.3, $\mu = 1/4$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.2.1, $\lambda = 1/4, \mu = 1/2$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3}q_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Тогда прямыми вычислениями получаем, что алгебры голономии на пространствах, приведенных в теореме 1, имеют вид, представленный в теореме 2.

**Теорема 2. А.** *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *– трехмерное однородное пространство, приведенное в теореме* 1 А. *Алгебры голономии нетривиальных связностей на указанных пространствах имеют вид, указанный в таблице* 5.

Таблица 5 – Алгебры голономии ( $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима)

| Пара | Алгебра голономии ( $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ ) |
|---|---|
| $4.21.11, \mu = 1/2$ и $3.13.6, \mu = 1/2$ при $r_{1,3} \neq 0$ | $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $2.8.7,\ \lambda = 1/2$ при $r_{2,3} \neq 0$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

*В случаях* $4.21.11, \mu = 1/2, 3.13.6, \mu = 1/2$ *при* $r_{1,3} = 0$ *, а в случае* $2.8.7,\ \lambda = 1/2$ *при* $r_{2,3} = 0$ *, алгебра голономии нулевая.*

**Б.** *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *– трехмерное однородное пространство, приведенное в теореме* 1 Б. *Алгебры голономии нетривиальных связностей на указанных пространствах имеют вид, представленный в таблице* 6.

Таблица 6 – Алгебры голономии ( $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима)

| Пара | Алгебра голономии ( $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ ) |
|---|---|
| $3.20.4,\ \lambda = 1/4$; $3.20.26,\ \lambda = 1/4$ при $r_{1,3} \neq 0$;<br>$1.2.1,\ \lambda = 1/4, \mu = 1/2$ при $r_{1,3}q_{3,2} \neq 0$ | $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $3.13.2, \mu = 1/4, 1/2$; $2.9.1,\ \lambda = 1/2, \mu = 1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3} \neq 0$;<br>$2.9.3,\ \mu = 1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3} \neq 1$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.20.27 | $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

*В случаях* $3.20.26,\ \lambda = 1/4$ *при* $r_{1,3} = 0$, $2.9.1,\ \lambda = 1/2, \mu = 1/4$ *при* $q_{1,2}r_{2,3} = 0$, $2.9.3,\ \mu = 1/4$ *при* $q_{1,2}r_{2,3} = 1$, $1.2.1,\ \lambda = 1/4, \mu = 1/2$ *при* $r_{1,3}q_{3,2} = 0$ , *алгебра голономии нулевая.*

**Заключение.** Для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях связность является нетривиальной с нулевым кручением, также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры Риччи, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств, отдельно выделены случаи неразрешимой и разрешимой группы преобразований. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах, а алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Klein, F.* A comparative review of recent researches in geometry / F. Klein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1893. – Vol. 2, No. 10. – P. 215–249.
2. *Скотт, П.* Геометрии на трехмерных многообразиях / П. Скотт. – М. : Мир, 1986. – 163 с.
3. *Cartan, E.* La geometrie des espaces de Riemann / E. Cartan // Memorial des Sciences Math. – 1923. – Vol. 9. – 457 p.
4. *Алексеевский, Д. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундамент. направл. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1988. – Т. 28. – С. 5–297.
5. *Кайгородов, В. Р.* Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа A / В. Р. Кайгородов // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.
6. *Алексеевский, Д. В.* Группы голономии и рекуррентные тензорные поля в лоренцевых пространствах II / Д. В. Алексеевский // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц / под ред. К. П. Станюковича. – М. : Атомиздат, 1974. – Вып. 5. – С. 5–17.
7. *Castellani, L.* Holonomy group, sesquidual torsion fields, and in supergravity / L. Castellani [et al.] // J. Math. Phys. – 1984. – No. 25. – P. 3209–3213.
8. *Hall, G. S.* Curvature, metric and holonomy in general relativity / G. S. Hall // Differ. Geom. and Appl. Proc. Conf. 24–30 Aug. 1986. Brno. – 1987. – P. 127–136.
9. *Kostant, B.* On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1956. – Vol. 42 (5). – P. 258–261.
10. *Kostant, B.* On holonomy and homogeneous spaces / B. Kostant // Nagoya Math. J. – 1957. – No. 12. – P. 31–54.
11. *Можей, Н. П.* Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.
12. *Можей, Н. П.* Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 170–177.
13. *Онищик, А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
14. *Kobayashi, S.* Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York–London, 1969. – Vol. 2. – 488 p
15. *Nomizu, K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, No. 1. – P. 33–65.
16. *Wang, H. C.* On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No. 3. – P. 1–19.
17. *Можей, Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Поступила в редакцию 15.10.2020.

“Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2.
Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control”
Vol. 11, No. 1, 2021, pp. 13–22


## Holonomy algebras of nontrivial torsion-free connections on three-dimensional homogeneous spaces

**N. P. Mozhei**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Belarus)*
P. Brovki St., 6, 220013, Minsk, Belarus; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

**Abstract.** In the introduction, an object of investigation is pointed – holonomy algebras of affine connections. In this paper, it is studied three-dimensional homogeneous spaces, admits the nontrivial invariant affine connections with only zero torsion. The basic notions, such as a homogeneous space, an isotropically-faithful pair, an affine connection, a torsion tensor, a curvature tensor, Ricci tensor, a holonomy algebra, are defined. The purpose of the work is the description of nonzero holonomy algebras of nontrivial connections without torsion on three-dimensional homogeneous spaces, as well as the homogeneous spaces that admit connections of the specified type. In the main part of the paper, for three-dimensional homogeneous spaces, it is determined under what conditions the invariant affine connection is nontrivial with zero torsion only. The affine connections, Ricci tensors, curvature tensors, and holonomy algebras are also found and written out explicitly, and the local classification of the corresponding three-dimensional homogeneous spaces is given. Studies are based on the application of properties of Lie algebras, Lie groups, and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras, and the theory of homogeneous spaces. In conclusion, it is indicated that the results obtained in this work are new and can be applied in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics, and the algorithms given in this paper can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions.

**Keywords:** affine connection, homogeneous space, curvature tensor, holonomy algebra, torsion tensor.

## References

1. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 1893, vol. 2 No. 10, pp. 215-249.

2. Scott P. Geometries on three-dimensional manifolds [*Geometrii na trekhmernykh mnogoobraziiakh*], Moscow, 1986, 163 p.

3. Cartan E. The geometry of Riemann spaces [*La geometrie des espaces de Riemann*]. *Memorial des Sciences Math*., 1923, vol. 9, 457 p.

4. Alekseevski D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry [*Osnovnye idei i poniatiia differentsial'noi geometrii*]. *Results of science and technology. Modern Probl. Mat. Foundation.* Moscow, 1988, vol. 28, pp. 5-297.

5. Kaigorodov V. R. Riemann Spaces. The structure of the curvature of spaces of type A [*Rimanovy prostranstva. Struktura krivizny prostranstv tipa A*]. *Izv. universities. Mathematics*, 1974, No. 5, pp. 117-127.

6. Alekseevski D. V. Holonomy groups and recurrent tensor fields in Lorentz spaces II [*Gruppy golonomii i rekurrentnye tenzornye polia v lorentsevykh prostranstvakh II*]. Problems of the theory of gravitation and elementary particle [*Problemy teorii gravitatsii i elementarnykh chastits*]; Ed. by K. P. Staniukovich. Moscow, 1974, issue 5, pp. 5-17.

7. Castellani L. [et al.]. Holonomy group, sesquidual torsion fields, and in supergravity. *J. Math. Phys.,* 1984, No. 25, pp. 3209-3213.

8. Hall G. S. Curvature, metric and holonomy in general relativity. *Differ. Geom. and Appl. Proc. Conf. 24-30 Aug. 1986*, Brno, 1987, pp. 127-136.

9. Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces. *Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1956, vol. 42 (5), pp. 258-261.

10. Kostant B. On holonomy and homogeneous spaces. *Nagoya Math. J*., 1957, No. 12, pp. 31-54.

11. Mozhey N. P. Nonzero holonomy algebras of trivial connections on homogeneous spaces with unsolvable transformation groups [*Nenulevye algebry golonomii trivial'nykh sviaznostei na odnorodnykh prostranstvakh s nerazreshimymi gruppami preobrazovanii*]. *Izvestiya of Gomel state University named F. Skorina*, 2018, No. 6 (111), pp. 81-88.

12. Mozhey N. P. Nonzero holonomy algebras of trivial connections on homogeneous spaces with solvable transformation groups [*Nenulevye algebry golonomii trivial'nykh sviaznostei na odnorodnykh prostranstvakh s razreshimymi gruppami preobrazovanii*]. *Izvestiya of Gomel state University named F. Skorina*, 2019, No. 3 (114), pp. 170-177.

13. Onishchik A. L. Topology of transitive transformation groups [*Topologiia tranzitivnykh grupp Li preobrazovanii*]. Moscow, 1995, 384 p.

14. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York-London, 1969, vol. 2, 488 p.

15. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math*, 1954, vol. 76. No. 1, pp. 33-65.

16. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. *Nagoya Math. J*., 1958, No. 3, pp. 1-19.

17. Mozhey N. P. Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them [*Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh*]. Kazan, 2015, 394 p.