Н. П. МОЖЕЙ
УО БГУИР (г. Минск, Беларусь)

АЛГЕБРЫ ГОЛОНОМИИ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П. К. Рашевским, М. Куритой, Э. Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Цель работы – описать алгебры голономии инвариантных аффинных связностей на трехмерных редуктивных однородных пространствах.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$ (если $\bar{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным, например, в [2].

Рассмотрим, например, трехмерные редуктивные однородные пространства, локально имеющие следующий вид:

3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

,

2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

2.21.4.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

,

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak m)$, что его ограничение на $\mathfrak g$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak g$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, $\bar G$) находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ (см., например, [3]). Если $\bar G/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную аффинную связность, будем описывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Пусть $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}\in\mathrm R$ при $i,j=1,2,3$. Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности на указанных парах имеют вид:

Пара	Связность
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&r_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&q_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.12	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&0\\0&0&p_{1,2}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-p_{1,2}&0&0\\0&0&0\\0&0&p_{1,2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{1,2}&0&0\\0&-p_{1,2}&0\end{pmatrix}$

Алгебра Ли группы *голономии инвариантной связности* $\Lambda:\bar{\mathfrak g}\to\mathfrak{gl}(3,\mathrm R)$ *на паре* $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathrm R)$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak g}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak g}),[\Lambda(\bar{\mathfrak g}),V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak g}\}$. Положим $\mathfrak a_{\bar{\mathfrak g}}$ равной подалгебре $\mathfrak{gl}(3,\mathrm R)$, порожденной $\{\Lambda(x);x\in\bar{\mathfrak g}\}$. Основное свойство $\mathfrak a_{\bar{\mathfrak g}}$

таково: пусть $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, тогда $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \mathrm{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathrm{R})$. Соответственно, получаем:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$	2.21.4	$p_{1,2}\neq 0,1$ $\begin{pmatrix} p_3 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$ $p_{1,2}=0,1$ нулевая

Таким образом, найдены и описаны в явном виде алгебры голономии аффинных связностей на трехмерных редуктивных однородных пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.

2. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015 г. – 394 с.

3. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.