

**ФАКТОР ВРЕМЕНИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СЛОЖНЫХ САУ С ЗАДАННОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ**

Предлагается получить критерий существования численного решения дифференциальных уравнений сложных САУ с помощью нового взгляда на фактор времени. Рассмотрена степень влияния погрешности расчета на величину параметра времени в некоторых системах. Приведены примеры повышения уровня точности моделирования устойчивых САУ имитационным методом.

**ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ**

Усложнение объектов проектирования САУ на этапах инженерной доводки ставит новые задачи к повышению уровня точности цифрового моделирования с помощью САПР. Под точностью моделирования будем понимать не только возможности предельно подробного описания объекта, но и выполнение расчетов с заданной погрешностью.

Современные САПР, особенно на базе имитационного метода [1...3], позволяют в значительной мере расширить перечень решаемых задач [2]. Между тем, в современной литературе ресурсы численных методов решения систем дифференциальных уравнений (ДУ) для САУ практически не определяются. В результате, пользователи САПР часто не могут добиться адекватной погрешности расчетов. В некоторых случаях традиционная попытка увеличить точность расчетов за счет уменьшения шага счета  $h$  не приводит к ожидаемому результату.

Поэтому актуальной является задача, с одной стороны, определить критерий применения САПР, а с другой – в рамках сформулированного критерия указать на возможности увеличения точности расчетов, особенно при использовании имитационного метода как наиболее универсального [2...3].

Сутью всех численных методов является дискретизация временного пространства, на котором ищется решение. При этом на каждом  $h$  система непрерывных ДУ алгебраизуется (аппроксимируется) по тем или иным разностным схемам и решается каким-либо численным методом [1...2]. Возможность такого преобразования определяется возможностью или невозможностью расчленения вектора времени  $t$  на отдельные дискреты  $h$ , так как  $t$  входит в каждое ДУ.

В статье предлагается получить критерий существования численного решения ДУ сложных САУ с помощью нового взгляда на фактор времени, сформулированного лауреатом Нобелевской премии И.Пригожиным [4...5] для физических систем.

*Определение.* Время – это упорядоченное чередование событий.

Главными выводами из этого являются:

- $t$  понимается как внутренний параметр каждой подсистемы, в которой существуют события;
- упорядоченное чередование событий наблюдается в устойчивых подсистемах, событиями в которых управляют независимые внешние системы;
- цифровое моделирование возможно только для САУ, содержащей параметр  $t$ .

Событиями в технических системах могут быть: переключения на новые структуры управления; опросы непрерывных сигналов управляющей микро-ЭВМ; коммутации тиристоров вентильного преобразователя (ВП), включенного в контур управления САУ, и т.д. На величину параметра  $t$  влияют также погрешности расчета, вносимые при аппроксимации ДУ. Нарушение упорядоченности чередования событий

приводит к исчезновению  $t$ , хаосу и, следовательно, к невозможности цифрового моделирования. Поэтому существование значения параметра  $t$  предлагается использовать как удобный критерий применения САПР.

Рассмотрим с этих позиций условия существования параметра  $t$  для некоторых простых систем с учетом влияния погрешностей, вносимых аппроксимацией ДУ.

**ОЦЕНКА УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПАРАМЕТРА ВРЕМЕНИ  
В САУ ПРИ ЦИФРОВОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

Рассмотрим степень влияния погрешности расчета на величину параметра времени  $t$  в некоторых системах.

***Погрешность и время при расчете аperiodических систем.***

Для простоты рассчитаем следующий фрагмент аperiodической системы методом прямоугольников:

$$y(p) = \frac{x(p)}{p} \tag{1}$$

где  $p$  – оператор Лапласа;  $x(p)$  и  $y(p)$  – изображения входного и выходного сигналов звена интегрирования соответственно.

Алгоритм решения получим в виде

$$y_i = y_{i-1} + hx_i \tag{2}$$

где  $y_i, y_{i-1}, x_i$  – значения  $y(t)$  и  $x(t)$  в  $t_i$  и  $t_{i-1}$  моменты времени.

Предполагая, что  $x(t)$  на участке одной дискреты  $h$  изменяется линейно, найдем локальную погрешность расчета

$$\Delta y_n = h(x_i - x_{i-1})/2 \tag{3}$$

Разлагая  $x_i$  в ряд Тейлора, будем иметь

$$x_i = x_{i-1} + h \frac{dx_{i-1}}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 x_{i-1}}{dt^2} + \dots \tag{4}$$

С учетом двух членов разложения при условии сходимости (4) получим формулу расчета локальной погрешности

$$\Delta y_n(t_i) = \frac{h^2}{2} \frac{dx_{i-1}}{dt} \tag{5}$$

По мере движения по оси времени глобальная погрешность накапливается из элементов локальной

$$y_{zn}(t_N) = \sum_{i=1}^N y_n(t_i) \tag{6}$$

где  $N$  – количество дискрет на заданном участке времени.

Так при  $t=T$  и почти линейно изменяющемся  $x(t)$  получим

$$\Delta y_{zn}(T) = \Delta y_n \frac{T}{h} = \frac{hT}{2} \frac{dx_{i-1}}{dt}. \tag{7}$$

Для  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$  получим  $\Delta y_{zn} \approx \frac{Ah}{2e}$ .

Рассчитаем фрагмент (1) методом трапеций по формуле

$$y_i = y_{i-1} + \frac{x_i + x_{i-1}}{2} h \quad (8)$$

Используя симметричность (8) относительно  $x_{i-1/2}$ , выполним разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= x_{i-1/2} - \frac{h}{2} \frac{dx_{i-1/2}}{dt} + \frac{h^2}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2} - \dots \\ x_i &= x_{i-1/2} + \frac{h}{2} \frac{dx_{i-1/2}}{dt} + \frac{h^2}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и упрощая, получим

$$y_n(t_i) = \frac{h^3}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2} \quad (10)$$

При  $t=T$  будем иметь

$$\Delta y_{zn}(T) \approx \frac{Th^2}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2} \quad (11)$$

Для  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$  получаем  $\Delta y_{zn} \approx \frac{Ah^2}{8Te}$ . При этом глобальная погрешность при

интегрировании методом трапеций в  $4T/h$  меньше, чем при интегрировании методом прямоугольников. Следует заметить, что в случае

$$\frac{dx(t \rightarrow 0)}{dt} \rightarrow 0; \quad \frac{d^2 x(t \rightarrow 0)}{dt^2} \rightarrow 0 \quad (12)$$

и т.д. глобальная погрешность может вообще стремиться к нулю. Это возможно при расчете импульсной характеристики или передаточной функции апериодических САУ, выходной сигнал однородного решения ДУ которых описывается суперпозицией затухающих экспонент

$$y(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-\frac{t}{\tau_j}} \quad (13)$$

где  $t$  – параметр времени;  $A_j$  и  $\tau_j$  – параметры САУ.

Поэтому при  $h \leq \tau_j$  цифровая модель адекватна физической, и внутреннее время цифровой модели практически совпадает с "астрономическим".

**Погрешность и время при расчете САУ с квазисимметричной волнообразной составляющей в выходном сигнале.**

К указанным системам относятся, например, колебательные системы второго и т.д. порядков со ступенчатым входным воздействием и с выходным сигналом вида

$$y(t) = -Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t + A \quad (14)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ ;  $T$  – период собственных колебаний (волнообразная составляющая);  $\tau$  – параметр затухания;  $A$  – установившееся значение переходного процесса.

Если для САУ с быстрым затуханием ( $\tau \leq T$ ), условие (12) практически сохраняется, и параметр времени  $t$  близок к "астрономическому" времени, то для слабо демпфированных систем ( $\tau \geq T$ ) параметр  $t$  может отличаться от "астрономического

времени". Так за  $t=T/4$  рост погрешности расчета иногда приводит вместо затухания к усилению колебаний, т.е. к неустойчивости числового процесса, исчезновению параметра  $t$  и невозможности моделирования. Например, для  $\tau=T$ ,  $A=1$ ,  $t=T/4$  максимальное значение волны должно сократиться на  $\approx 20\%$  по сравнению с начальным состоянием. Поэтому, как следует из (7), выбор  $h$  должен вытекать из следующего условия:

$$y_{2л} \approx \frac{h T}{2 \cdot 4} \omega = \frac{h \pi}{4} \leq 0,2 \tag{15}$$

Откуда  $h \leq 0,3$  является условием существования параметра  $t$ . Однако при выполнении этого условия  $|y_{2л}(t)|$  растет весьма медленно из – за того, что форма колебательной составляющей для слабо демпфированных систем приближается к симметричной. По этой причине погрешность, накопившаяся за  $t=T/2$ , во многом компенсируется за вторую половину волны. Отсюда погрешность интегрирования таких САУ методом прямоугольников (2) не будет хуже погрешности расчета методом трапеций (8).

Тем не менее, в результате неполной компенсации каждая новая волна должна растягиваться во времени больше предыдущей. Следовательно, для рассмотренных САУ, согласно концепции [4...5] (при соблюдении условия (15)), в цифровой модели параметр  $t$  существует, но изменяется медленнее "астрономического" времени. Рассмотрим, к чему это явление приводит в более сложных ситуациях.

**Погрешность и время при расчете САУ с несимметричной волнообразной составляющей в выходном сигнале.**

К указанным САУ относятся промышленные электроприводы, в которых ВП используется как усилитель мощности. Полезная составляющая выходного сигнала ВП, содержащая сигнал управления, формируется за счет искажения синусоидальной формы многофазной питающей сети. При этом в идеале управляемые тиристоры подключают долю питающего напряжения очередной фазы к нагрузке, видоизменяя форму напряжения фазы по принципу импульсно-фазового преобразования [6]. Для проверки влияния  $y_{2л}(t)$  рассчитаем фрагмент (1). При этом  $y(t)$  может интерпретироваться как функция тока в индуктивности, нагруженной на несимметричное выходное напряжение ВП  $x(t)$ .

На рис.1 показаны графики расчета выходного напряжения и тока нагрузки ВП с разной погрешностью.

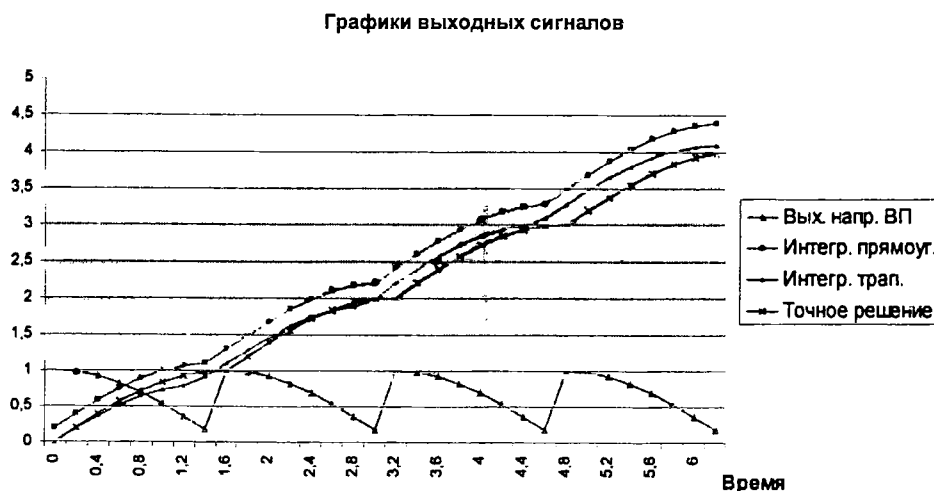


Рис.1. Графики расчета выходного напряжения и тока нагрузки ВП

Как видно из графиков, погрешность расчета тока накапливается. Аналитически ее можно оценить, используя (15), как

$$y_{эл}(T) = \frac{h}{2} \cdot \frac{T}{4} \omega \cdot m \quad (16)$$

где  $m$  – число фаз, равное 4.

Подставляя значение  $h=0,04$  ( $T=6,28$ ), получим  $y_{гр} \approx 0,13$ . Сопоставление расчетных и аналитических оценок показывает качественное совпадение обоих результатов. Так расчет, полученный с помощью цифрового моделирования методом прямоугольников, имеет погрешность несколько выше ( $y_{гр} \approx 0,4$ ), а аналогичный расчет методом трапеций – ниже ( $y_{гр} \approx 0,1$ ). Временная задержка выходного сигнала при  $t=T$  для двух методов интегрирования равна соответственно 1,0 и 0,6. Это значительно выше, по сравнению с режимом с симметричной составляющей. Поэтому при расчете контура с закрытой фазой ВП этот эффект влияет на точность определения момента ее включения. При этом интервал между событиями – коммутациями возрастает, порядок очередности коммутаций сохраняется и параметр  $t$ , следовательно, существует.

Рассмотрим один из реальных способов подключения ВП к нагрузке (рис.2).

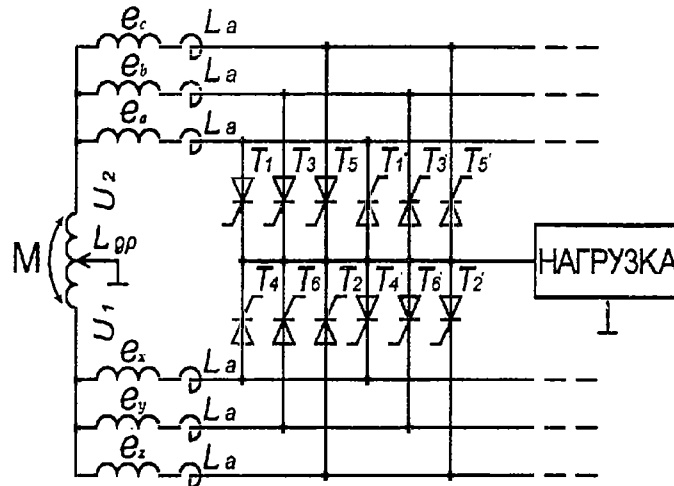


Рис.2. Способов подключения ВП к нагрузке

Как отмечается в [6], для ВП с уравнивающим реактором существует проблема перекрытия, т.е. – существования моментов практически одновременной работы нескольких тиристоров с нарушением очередности работы фаз. В эти моменты доля полезной составляющей сигнала управления резко снижается. Это происходит из-за того, что напряжение на обкладках тиристоров в таких схемах складывается не только из управляемых составляющих, но и из неуправляемых

$$U_T(t) \approx U_{ВН}(t) + U_{РАСС}(t) + E_\phi(t) + U_H(t) \quad (17)$$

где  $U_T(t)$  – значение напряжения на обкладках тиристора;  $U_{ВН}(t)$  – значение вносимого напряжения из соседней секции за счет трансформаторной связи ( $U_{ВН}(t)=U_1(t)$ ,  $U_{ВН}(t)=U_2(t)$ );  $U_{РАСС}(t)$  – значение падения напряжения на индуктивности рассеяния вторичной обмотки питания  $L_a$ ;  $E_\phi(t)$  – управляемое напряжение питающей нагрузку фазы;  $U_H(t)$  – напряжение на нагрузке ВП.

Расчет таких систем численными методами неперспективен, так как в этом случае нарушаются условия (12) и погрешность расчета хаотически повышается. По концепции

[4...5] параметр  $t$  при перекрытиях работы тиристоров не существует. При этом расчленение порядка коммутаций с помощью резкого уменьшения  $h$ , перехода от ключевой модели тиристоров [6] к более подробной модели Эберса-Молла [7], использование разностных схем расчета более высоких порядков [1] приводит к увеличению времени счета, лавинообразному росту вносимых погрешностей и не приводит к получению адекватного результата.

Такой же результат будем иметь, например, при расчете релаксационных схем (мультивибраторов, триггеров и т.д.), в какие – то моменты, работающие с положительной обратной связью, многосекционные умножители напряжения и т.д.

Следовательно, влияние событий в физической системе и погрешности расчета на величину параметра  $t$  в цифровой модели САУ не позволяет использовать последнюю как независимый "осциллограф". Идеализация цифровых моделей с последующим усложнением до пределов существования параметра  $t$  – научно обоснованный путь использования САПР.

Примеры повышения уровня точности моделирования устойчивых САУ имитационным методом. В зависимости от подробностей описания звеньев САУ пользователи должны выполнять расчеты с желаемой погрешностью. Однако, как указывается в [2], современные САПР, реализующие наиболее универсальный имитационный метод, не предоставляют таких возможностей. Имитационный метод трактуется как численный эксперимент без управляемой погрешности расчетов. Тем не менее, теоретические положения в [2...3] позволяют предложить гибкий подход к выбору точности расчетов с помощью распространенного табличного процессора EXCEL.

Сутью предложения является оперативное применение более точных методов интегрирования (например, метода трапеций). Повышение точности расчетов для имитационного метода возможно только после ликвидации естественной задержки на шаг  $h$  значений вектора сигналов обратных связей  $X_{oc}(t)$  в замкнутых САУ. Поэтому предлагается двухциклический метод расчета: на первой итерации используется метод интегрирования прямоугольников (2) с ликвидацией указанной задержки, на второй итерации – метод трапеций (8). EXCEL позволяет ввести цепочку формул первой и второй итераций в одной табличной строке, соответствующей расчету САУ в момент времени  $t$ , по аналогии работы двух систем обменивающихся информацией с помощью перекрестных связей (рис.3).

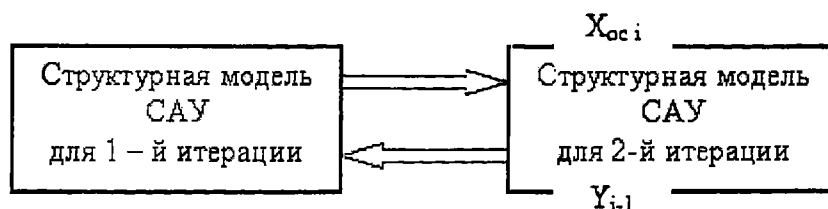


Рис.3. Схема двухциклического метода:  $X_{oc i}$  – вектор выходных сигналов ОС в  $t$ ; момент времени;  $Y_{i-1}$  – вектор выходных сигналов динамических звеньев

Имитация работы отдельных звеньев выполняется в порядке выбранной нумерации. Далее, заполненная формулами табличная строка копируется на все остальные строки.

Для сравнения выполнен расчет простейших САУ первого и второго порядков с различной погрешностью

$$w(p) = \frac{1}{Tp + 1} \tag{18}$$

где  $T=1$ ;  $h=0,1$  – по блок-схеме рис.4.

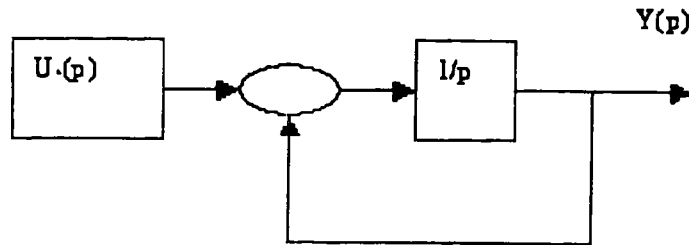


Рис.4. Блок-схема САУ с передаточной функцией (18)

$$w(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\lambda T p + 1} \quad (19)$$

где  $T=\lambda=1/6,28$ ;  $h=0,04$  – по блок-схеме рис.5.

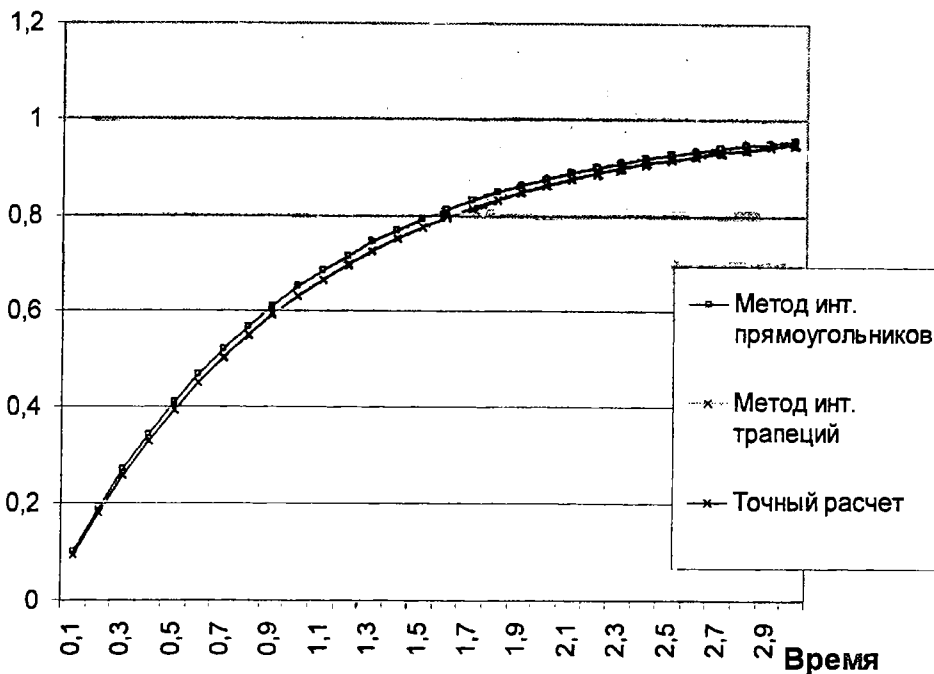


Рис.5. График переходной функции САУ для рис.4

Выбранные САУ являются основными фрагментами более сложных САУ. Из графиков расчета системы (18) видно существенное повышение уровня точности с помощью двухциклического метода. Погрешность расчета колебательной САУ (19) с квазисимметричной волнообразной составляющей имеет значительную компенсацию. Отсюда погрешности расчетов по методам (2) и (8) практически совпадают.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цифровое пространство при моделировании сложных САУ во многих случаях становится нелинейным как минимум из-за влияния вносимых погрешностей расчета на величину параметра  $t$ . На кривизну этого пространства влияют также физические свойства объекта: неустойчивость, колебательность, коммутации ключевых элементов и т.д. Задача

постановки – линеаризовать параметр  $t$ , т.е. идеализировать структуру и параметры САУ в пределах возможного существования этого параметра с сохранением основных свойств объекта. Указывается на пути повышения точности расчетов в рамках существования параметра  $t$  для широкого круга пользователей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. – М.: Нолидж, 2001.
2. Пасик В.Ш. Имитационный метод для численного анализа систем управления с обратной связью // Автометрия, 1999, №1. – С.100.
3. Пасик В.Ш. Применение принципа разделения движений при цифровом моделировании систем с обратной связью имитационным методом // Автометрия, 2003. – №2. – С.108.
4. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. – М.: Изд-во "Прогресс", 1994.
5. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках. – М.: ДМК, 2002.
6. Булгаков А.А. Новая теория управляемых выпрямителей. – М.: Наука, 1970.
7. Сигорский В.И., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. – М.: "Сов. радио", 1976.

**Алексеев Виктор Федорович**

Профессор кафедры радиоэлектронных средств, канд.техн.наук  
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г.Минск  
Тел.: (+375 17) 239-84-10  
E-mail: snto@bsuir.unibel.by

**Пасик Владимир Шмульевич**

Канд. техн. наук, доцент  
Новосибирский государственный технический университет, г.Новосибирск, Россия  
Тел.: (+7 383) 265-18-83