

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

Каянович С.С.
(Минск, Беларусь)

В работе [1] с использованием метода Роте исследовался вопрос о разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения в трубе прямоугольного сечения со сглаженными углами. Исследование представляло собой промежуточное звено в исследовании задачи дифференциальной, которая рассматривается в данной работе и сводится к получению априорных оценок для решений и их производных нижеследующей системы уравнений (1) – (4), разрешимость которой при условиях (5) на временных слоях утверждается следующей теоремой (см. [1]).

Теорема. Пусть $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}, \tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T), \tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}_1(s), x = s \in \tilde{S}, \zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}), \bar{b}_1(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}), l \geq 5, \alpha \in (0,1)$. Тогда при достаточно малых τ задача (1) – (5) (краевые условия для u_2, u_3 ставятся на временных слоях в ходе решения), в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом $t = t_m = m\tau, m = \overline{0, M}$, причём $u_{1,m}, u_{3,m} \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m), \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m), p_m \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$.

Для того чтобы эту работу можно было читать без обращения к предыдущей, сохранен минимум информации из [1]. Труба и область с гладкой границей, полученная после сглаживания углов, изображены на рисунке в [1]. Приняты обозначения:

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Omega = (0, L) \times (0, H_2) \times (0, H_3),$$

границы:

$S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = 0]$ – нижняя, $S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = H_3]$ – верхняя, $S_3 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – передняя, $S_4 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – задняя, $S_5 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – левая, $S_6 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – правая.

$\bar{S} = \bigcup_{k=1}^4 S_k$ – твёрдая поверхность трубы, S_5 – вход в трубу, S_6 – выход из неё,

$S_{iT} = S_i \times [0, T], i = \overline{1,6}, \bar{S}_T = \bar{S} \times [0, T], S = \bigcup_{k=1}^6 S_k$ – граница области $\Omega, \bar{\Omega} = \Omega \cup S,$

$S_T = S \times [0, T], \Omega_T = \Omega \times [0, T], \bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \tilde{S}$ – поверхность, полученная из поверхности S в результате сглаживания всех двугранных и трёхгранных её углов, $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная поверхностью $\tilde{S}, \bar{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}, \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T], \tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0, T], \bar{\tilde{\Omega}}_T = \bar{\tilde{\Omega}} \times [0, T].$

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = (1 + \nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (4)$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}_1(x), x \in \bar{\Omega}; \quad u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s, t), \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^3 \omega_j(s, t) \cos \alpha_j, \quad (s, t) \in \tilde{S}_T, \quad (5)$$

где $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора \bar{n} нормали к \tilde{S}_T , α_i – угол между \bar{n}

и осью Ox_i , $\omega_i = \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$, краевые условия для u_2 , u_3 ставятся в ходе

решения системы на временных слоях, $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}$, $\tilde{\psi}_1(s, t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}_1(s)$, $s \in \tilde{S}$, $l \geq 5$,

$\alpha \in (0,1)$. Срезающая функция $\zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ определяется по аналогии с [2] и представляет собой произведение, но уже трёх функций $\zeta(x) = \zeta'(x)\zeta''(x)\zeta'''(x)$.

Вводя в рассмотрение функции $f_i(x, t)$, $i = 1,3$, так же как и в [2], на временном слое $t_m = m\tau$, $m = 0,1,2,\dots,M$, получаем оценки для модулей функций $w_{i,m} = u_{i,m} - f_{i,m}$, $i = 1,3$, и модулей их производных по пространственным переменным до четвёртого порядка включительно. При этом оценки для первых производных могут быть получены как внутри области $\tilde{\Omega}_T$, так и на границе \tilde{S}_T (на слоях $t_m = m\tau$). Оценки же для производных второго и более высоких порядков удаётся получить только в строго внутренних подобластях области $\tilde{\Omega}_T$, причём эти подобласти последовательно вкладываются друг в друга, как показано в [2]. Константы, которые ограничивают модули самих решений и их производных, не зависят от переменной τ и не будут увеличиваться при стремлении $\tau \rightarrow 0$. Может быть выполнен предельный переход при $\tau \rightarrow 0$, доказывающий разрешимость задачи (1) – (5).

Нетрудно показать, что решение задачи (1) – (5), существование которого доказано, удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса. В связи со сказанным заметим: в результате доказательства этой разрешимости решена математическая часть проблемы уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса. Остаётся вопрос численного отыскания существующего решения. И тут придётся столкнуться с не меньшими трудностями, чем те, которые встретились при решении математических вопросов. Преодолевая их, нельзя не учитывать нижеследующих обстоятельств.

Первое. В [3] вводится понятие главного фундаментального решения (ГФР) и доказывается существование решений задач Дирихле и Неймана, которые даются формулами, содержащими ГФР. Перед этим указываются основные идеи доказательства теоремы существования такого ГФР. Всё это выполняется в m -мерном евклидовом пространстве.

Второе. В [4] говорится о том, что для двумерной односвязной области внутренняя вторая краевая задача легко сводится к внутренней задаче Дирихле. Для функции, являющейся решением задачи Неймана, строится другая функция так, чтобы внутри области удовлетворялись уравнения Коши – Римана. После построения отмечается, что в случае трёхмерной области аналогичные построения невозможны.

Третье. В [5] основная интегральная формула Грина рассматривается и для трёхмерного, и для двумерного случаев. Потенциалы простого и двойного слоёв изучаются в случаях трёх и двух независимых переменных. Однако условия разрешимости интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи (в частности, задача Неймана) даются только в двумерном случае.

Отмеченные обстоятельства указывают на то, что при получении численных решений задач с тремя пространственными переменными придётся столкнуться с существенными трудностями. Уменьшить их, хотя бы частично, может помочь осуществление перехода с одного временного слоя на другой в два этапа. Покажем, как выполняется такой переход,

например, со слоя $t_0 = 0$ на слой $t_1 = \tau$ вводя обозначения: $g_i(x, t_1) = \frac{1}{\tau}(g_1 - g_0)$,

$$g_1 = g(x, t_1), \quad g_0 = g(x, t_0), \quad g = u_1, u_2, u_3, p.$$

Первый этап.

$$u_{1i} = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_k^2} + v \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x_3^2} - \sum_{k=1}^2 u_{k,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_k} - u_{3,0} \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_3} - \frac{\partial p_0}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_3^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_{k,0}}{\partial x_3} \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_2} \frac{\partial u_{2,0}}{\partial x_3} = 0.$$

Второй этап.

$$u_{1i} = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_k^2} + v \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_3^2} - \sum_{k=1}^2 u_{k,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_k} - u_{3,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_3} = 0,$$

$$u_{3i} = (1 + v) \frac{\partial^2 u_{3,1}}{\partial x_3^2} + v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{3,1}}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_{k,0} \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{k,1}}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_3^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_3} \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_2} \frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_3} = 0.$$

На втором этапе в качестве значений функции $u_{2,1}$ берутся её значения, найденные на первом этапе, и значения производных всех функций по переменной x_2 берутся от функций, полученных на первом этапе. Фактически на первом этапе решается задача относительно функций u_1, u_2, p , зависящих от двух пространственных переменных x_1, x_2 (функция u_3 и производные по переменной x_3 участвуют в решении как известные функции, взятые с нулевого слоя). На втором этапе решается задача относительно функций u_1, u_3, p , зависящих от двух пространственных переменных x_1, x_3 .

Список литературы:

1. Каянович С.С. Метод Рунге для вязкого течения в трубе // "WayScience". International Scientific and Practical Internet Conference "Modern Movement of Science", 18-19 October, 2021. Ukraine, Dnipro, 2021, P. 133 – 135.
2. Каянович С.С. Краевая задача для стержневого течения в канале/ Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук.-2016.-№ 4.-С. 55-66.
3. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, М., 1957.
4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.