МЕТОД РОТЕ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

Каянович С.С.
Минск, Беларусь

Введение. В работе [1] с использованием метода Роте исследовался вопрос о разрешимости дифференциально-разностной задачи для вязкого течения в канале. В данной работе исследуется аналогичный вопрос для вязкого течения в трубе прямоугольного сечения. При доказательстве разрешимости задачи Дирихле для компонент скорости u_1, u_3 новых принципиальных трудностей не возникает, поскольку теорема Шаудера, существенно используемая в доказательстве, имеет место в n-мерном евклидовом пространстве ($n \geq 2$).

Для справедливости теоремы Шаудера одним из требований является требование достаточно гладкой границы той области, в которой решается задача. У трубы, о которой сказано выше и которая представляет собой прямоугольный параллелепипед, сгладим все двугранные и трёхгранные углы. Область со сглаженными углами изображена на рисунке 1. На рисунке отмечены также вершины $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ исходной трубы прямоугольного сечения, которые занумерованы в указанном выше порядке цифрами (на рисунке цифры указаны в круглых скобках около соответствующих вершин).

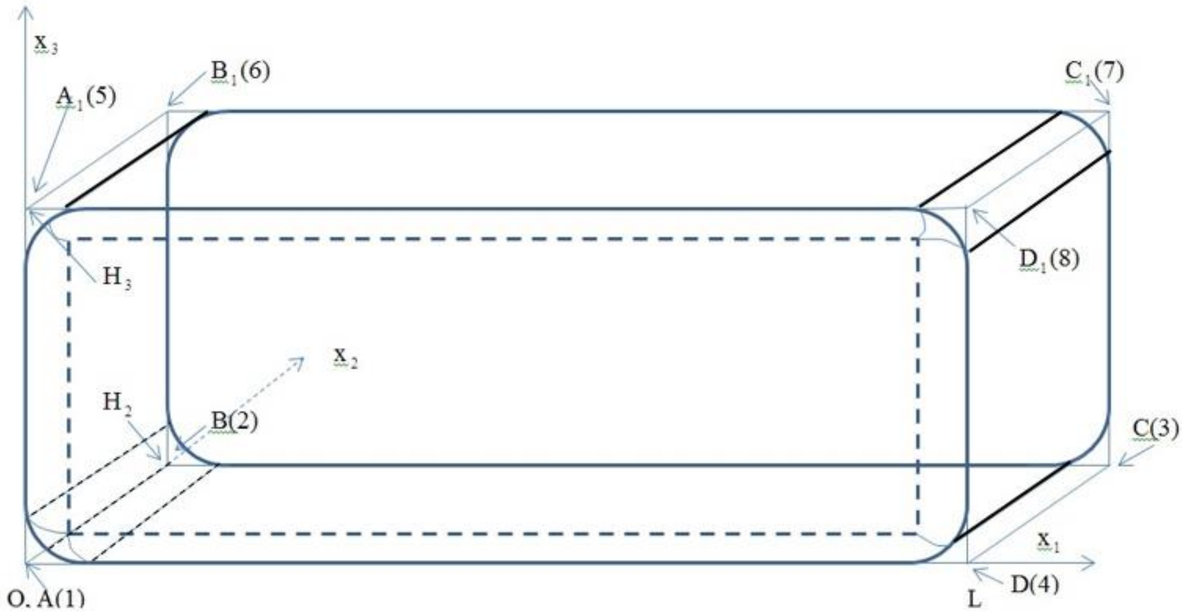

Рис. 1

Примем следующие обозначения:

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega = (0, L) \times (0, H_2) \times (0, H_3)$, грани:

$S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = 0]$ – нижняя, $S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = H_3]$ – верхняя, $S_3 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – передняя, $S_4 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – задняя, $S_5 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – левая, $S_6 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – правая.

$\overline{S} = \bigcup_{k=1}^{4} S_k$ – твёрдая поверхность трубы, S_5 – вход в трубу, S_6 – выход из неё,

$S_{iT}=S_i\times[0,T], i=\overline{1,6}$, $\overline{S}_T=\overline{S}\times[0,T]$, $S=\bigcup_{k=1}^{6}S_k$ – граница области Ω, $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup S$,

$S_T=S\times[0,T]$, $\Omega_T=\Omega\times[0,T]$, $\overline{\Omega}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$, $\tilde{S}$ – поверхность, полученная из поверхности S в результате сглаживания всех двугранных и трёхгранных её углов, $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная поверхностью $\tilde{S}$, $\overline{\tilde{\Omega}}=\tilde{\Omega}\bigcup\tilde{S}, \tilde{\Omega}_T=\tilde{\Omega}\times[0,T]$, $\tilde{S}_T=\tilde{S}\times[0,T], \overline{\tilde{\Omega}}_T=\overline{\tilde{\Omega}}\times[0,T]$.

Рассмотрим задачу (плотность $\rho=1$, на твёрдой поверхности $u_i=0, i=\overline{1,3}$):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_1}\quad,\qquad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\qquad (x,t)\in\overline{\Omega}_T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}=(1+\nu)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_3}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\partial x_3}-\frac{\partial p}{\partial x_3}=0,\quad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0\quad,\qquad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, \tag{4}$$

$$u_1\big|_{t=0}=\overline{b}_1(x), x\in\overline{\Omega},\qquad u_1\big|_{\tilde{S}_T}=\tilde{\psi}_1(s,t),(s,t)\in\tilde{S}_T, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{n}}\Big|_{\tilde{S}_T}=\zeta(s)\sum_{j=1}^{3}\omega_j(s,t)\cos\alpha_j\qquad (s,t)\in\tilde{S}_T, \tag{6}$$

где $\frac{\partial p}{\partial\overline{n}}\Big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $\tilde{S}_T$ α_i – угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i, $\omega_i=\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial t}$. Будем предполагать, что $\tilde{S}\in C_{l,\alpha},\tilde{\psi}_1(s,t)\in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1\big|_{t=0}=\overline{b}_1(s), x=s\in\tilde{S}$, $l\ge 5,\alpha\in(0,1)$. Срезающая функция $\zeta(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$, определяется по аналогии с [1].

Метод Роте. Находим приближенные решения методом Роте. Разбиваем пространство (x,t) плоскостями $t_m=m\tau, m=0,1,2,...,M$, $M\tau=T$. Пусть $\tilde{\Omega}_m$ есть сечение $\tilde{\Omega}_T$ плоскостью $t_m=m\tau,\tilde{S}_m$ – его граница, $\overline{\tilde{\Omega}}_m=\tilde{\Omega}_m\bigcup\tilde{S}_m$ и пусть Ω_m – сечение Ω_T плоскостью $t_m=m\tau$, S_m – его граница, $\overline{\Omega}_m=\Omega_m\bigcup S_m$.

На каждом временном слое в $\overline{\tilde{\Omega}}_m$ определим функции u_i, p $(i=\overline{1,3})$, которые

будем обозначать $u_{1,m},u_{2,m},u_{3,m},p_m,m=\overline{0,M}$. При $t_0=0$ функция $u_{1,0}=u_1=\overline{b}_1$ задана . Найдем при этом t функцию u_2 в областях $\Omega_1=(0\le x_1\le L, 0<x_2\le 2\varepsilon, 0\le x_3\le H_3)$ и $\Omega_2=(0\le x_1\le L, H_2-2\varepsilon\le x_2<H_2, 0\le x_3\le H_3)$, решая (2) с граничными условиями $u_2\big|_{x_2=0}=0$ и $u_2\big|_{x_2=H_2}=0$ ($u_{3x_3}=0$) соответственно . Для любого $x_2: 0<x_2\le 2\varepsilon$ получаем

$$u_2(x_1,x_2,x_3)=-\int_0^{x_2}Du_{1,3}(x_1,z,x_3)dz,\quad u_2(x_1,H_2-x_2,x_3)=-\int_{H_2}^{H_2-x_2}Du_{1,3}(x_1,z,x_3)dz,$$

где $Du_{1,3}(x_1,z,x_3)=\dfrac{\partial u_1(x_1,z,x_3)}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3(x_1,z,x_3)}{\partial x_3}$. Интегрируя $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2}=0$ в области $\Omega'=(0\le x_1\le L, \varepsilon<x_2<H_2-\varepsilon, 0\le x_3\le H_3)$ при $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\varepsilon}=-Du_{1,3}(x_1,z,x_3)\Big|_{z=\varepsilon}$, $u_2\Big|_{x_2=H_2-\varepsilon}=-\int\limits_{H_2}^{H_2-\varepsilon} Du_{1,3}(x_1,z,x_3)dz$, находим решение $u_{2,0}$. Это решение удовлетворяет (2) и определено в $\overline{\Omega}_0$.

Решаем теперь (2) относительно функции u_3, полностью повторяя только что выполненное его решение относительно u_2 (с найденной функцией $u_2=u_{2,0}$), получая решение $\tilde{u}_{3,0}$, которое определено в $\overline{\Omega}_0$. Полагая $\tilde{\psi}_{3,0}\big|_{\tilde{S}_0}=\tilde{u}_{3,0}(s), s\in\tilde{S}_0$ ($\overline{\tilde{\Omega}}_0\subset\overline{\Omega}_0$), решаем (3) (в котором производная по времени заменена разностной производной и которая при решении на нулевом слое равна нулю) в $\tilde{\Omega}_0$ с условием на границе $\tilde{\psi}_{3,0}\big|_{\tilde{S}_0}$ (это решение существует в силу теоремы Шаудера (см. [1])). Получаем решение $u_{3,0}$, которое определено в $\overline{\tilde{\Omega}}_0$. После этого, решая (4), (6), находим p_0 в $\overline{\tilde{\Omega}}_0$. Решение задачи (4), (6) определено с точностью до произвольной константы [2].

Итак, определены $u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}, p_0$. Переходя на слой $\overline{\tilde{\Omega}}_1$ и решая (1), (5), получаем $u_{1,1}$ в области $\overline{\tilde{\Omega}}_1$ (в силу теоремы Шаудера). Продолжаем функцию $u_{1,1}$, найденную в $\overline{\tilde{\Omega}}_1$, на $\overline{\Omega}_1$ (см. [1]) и оказываемся в том же самом положении, с которого начинали движение по временным слоям (тогда была известна функция $u_{1,0}$). Повторяя на слое $\overline{\tilde{\Omega}}_1$ всё то, что выше делалось на слое $\overline{\tilde{\Omega}}_0$, находим $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, p_1$. Продолжая движение по слоям, доходим до слоя $\overline{\tilde{\Omega}}_M$, что приводит к теореме.

Теорема. *Пусть* $\tilde{S}\in C_{l,\alpha}, \tilde{\psi}_1(s,t)\in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1\big|_{t=0}=\bar{b}_1(s), x=s\in\tilde{S}$, $\zeta(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$, $\bar{b}_1(x)\in C_{l,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}\right)$, $l\ge 5, \alpha\in(0,1)$. *Тогда при достаточно малых* τ *задача (1) – (6), в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* $t=t_m=m\tau$, $m=\overline{0,M}$, *причём* $u_{1,m}, u_{3,m}\in C_{l,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $\dfrac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2}\in C_{l-1,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $p_m\in C_{l-1,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}_m\right)$.

Список литературы:

1. Каянович С.С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения/ Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук.-2015.-№ 1.-С. 52-59.

2. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, М., 1957.