О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛИ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

С.С. Каянович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
Минск, Беларусь kayanovichs@gmail.com

В работе [1] с использованием метода Роте исследовался вопрос о разрешимости дифференциально-разностной задачи для вязкого течения в канале (плоское течение). В данной работе исследуется аналогичный вопрос для вязкого течения в трубе прямоугольного сечения (пространственное движение жидкости). Сгладив все двугранные и трёхгранные углы указанной трубы, получим область с гладкой границей. Она изображена на рисунке в [2].

Постановка задачи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\delta_i\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\partial x_3}-\frac{\partial p}{\partial x_i}, i=1;3, \left\{\begin{array}{l}\delta_1=0\\ \delta_3=1\end{array}\right., (x,t)\in\tilde{\Omega}_T; \qquad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0, (x,t)\in\overline{\Omega}_T; \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0, (x,t)\in\tilde{\Omega}_T, (2), \qquad (9)$$

где Ω – труба, S – её граница, $\bar{\Omega}=\Omega\bigcup S$, $\tilde{\Omega}$ – труба со сглаженными углами, $G_T=G\times[0,T]$, краевые условия и нижеследующие обозначения содержатся в [1,2].

Одно из уравнений (8) ($i=3$) фактически содержит дополнительную вязкость. Идея её введения была ранее применена в [3] и была вызвана проблемой доказательства разрешимости краевых задач для уравнений Навье – Стокса при больших градиентах скоростей . При этом предполагалось, что решение модифицированной системы при малой дополнительной вязкости должно мало отличаться от решения системы Навье – Стокса. В отличие от [3] решение системы (8) – (9) не отличается, а удовлетворяет всем уравнениям Навье – Стокса. Это связано с тем, что после определения компоненты скорости u_2 ([1,2]) уравнение (**??**) удовлетворяется и уравнение (8) при значении $i=3$ совпадает с соответствующим уравнением системы Навье – Стокса. После этого с использованием (9) показывается, таким же способом, который указан в [4] для случая двух компонент скорости, что u_2 удовлетворяет уравнению того же вида, который имеет уравнение (8) в случае $i=1$.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{S}\in C_{l,\alpha}$, $\tilde{\psi}_1(s,t)\in C_{l,\alpha}\left(\tilde{S}_T\right)$, $\tilde{\psi}_1\Big|_{t=0}=\bar{b}_1(s)$, $x=s\in\tilde{S}$, $\zeta(x)\in C_{l,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}\right)$, $\bar{b}_1(x)\in C_{l,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}\right)$, $l\geq 5$, $\alpha\in(0,1)$. *Тогда при достаточно малых* τ *задача* (8) – (9), *в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* $t=t_m=m\tau$, $m=\overline{0,M}$, *причём* $u_{1,m},u_{3,m}\in C_{l,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $\frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2}\in C_{l-1,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$, $p_m\in C_{l-1,\alpha}\left(\bar{\tilde{\Omega}}_m\right)$.

Теорема 2. *Решение из теоремы 1 удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса.*

Литература

1. Каянович С.С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С.С. *Метод Роте для вязкого течения в трубе* //"WayScience". International Scientific and Practical Internet Conference "Modern Movement of Science", 18-19 October, 2021. Ukraine, Dnipro, 2021, P. 133 – 135.

3. Ладыженская О.А. *О модификациях уравнений Навье – Стокса для больших градиентов скоростей* // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1968, 7, С. 126-154.

4. Каянович С.С. *Об уравнениях Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса* // Материалы XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2018). Гродно, 15 – 18 мая 2018 г. – Ч. 2. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2018. С. 13-15