

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических систем

Э. М. Карпушкин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие
для студентов радиотехнических специальностей

В 2-х частях

Часть 2

Оптимальный прием радиосигналов

Минск 2007

УДК 621.396. 9 (075.8)

ББК 32.84 я 73

К 26

Р е ц е н з е н т:

зав. кафедрой СиУТ, д-р техн. наук, проф. В. К. Конопелько

Карпушкин, Э. М.

Основы теории радиотехнических систем : учеб.-метод. пособие для студ. радиотехн. спец. В 2 ч. Ч. 2. Оптимальный прием радиосигналов / Э. М. Карпушкин. – Минск : БГУИР, 2007. – 100 с.

N 978-985-488-124-9 (ч. 2)

В пособии изложены методы синтеза и анализа устройств обработки информационных радиосигналов для систем различного назначения. Обсуждение ведется для разного объема априорных данных о возможных ситуациях. Применительно к системам радиолокации, радионавигации, передачи информации рассматриваются структурные схемы оптимальной обработки радиосигналов и производится количественная оценка качества их работы.

УДК 621.396. 9 (075.8)
ББК 32.84. я 73

Часть 1: Карпушкин, Э. М. Основы теории радиотехнических систем. В 2 ч. Ч. 1. Сигналы и помехи в радиосистемах / Э. М. Карпушкин. – Минск : МРТИ, 1993.

ISBN 978-985-488-124-9 (ч. 2)
ISBN 978-985-488-125-6

© Карпушкин Э. М., 2007
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2007

Введение

Задачи, решаемые современными радиотехническими системами (РТС), характеризуются сложностью и разнообразием помеховой обстановки, поэтому разработка таких систем возможна лишь на базе современных методов оптимизации.

Проблему оптимизации РТС можно условно разделить на три составляющих:

- выбор (синтез) наилучших сигналов для достижения требуемых результатов;
- оптимальная обработка принимаемых радиосигналов;
- синтез сигналов – устройство обработки.

В данном пособии внимание уделяется проблемам оптимального приема (обработки) радиосигналов в РТС.

Основная задача приемов радиосигналов сводится к наилучшему выделению или восстановлению полезной информации по сигналу, искаженному при распространении и в результате воздействия помех. Приемник, который наилучшим образом минимизирует искажения воспроизводимой или выделяемой информации из принимаемого сигнала на фоне помех, называется оптимальным. Синтез оптимального приемника заранее (априорно) предполагает, что известны некоторые характеристики полезного сигнала, канала связи и помех, а также их функциональное взаимодействие. Чем больше достоверных априорных сведений, тем легче и точнее решается задача синтеза. Наконец, результаты синтеза оптимального приемного устройства зависят от выбора математически продуктивного критерия оптимальности, отражающего количественные характеристики искажений.

Задание условий приема и выбор критериев определяют минимальный уровень искажений воспроизводимой или извлекаемой информации, т.е. определяют потенциальную помехоустойчивость оптимального приемника, которая не может быть ниже помехоустойчивости реального приемника и характеризует степень его технического совершенства. Иногда оптимальное устройство оказывается трудно реализуемым или экономически невыгодным. Тогда обращаются к квази-оптимальным методам приема, при которых незначительное снижение помехоустойчивости компенсируется простотой аппаратурной реализации.

Теория оптимального радиоприема позволяет также определить наилучшие формы сигналов – носителей информации, обеспечивающих наибольшую помехоустойчивость.

Решение основных задач теории оптимального радиоприема базируется на хорошо разработанных методах математической статистики, непосредственно применяемых к решению прикладных задач радиоэлектроники (работы А. Н. Колмогорова, Н. Винера, В. А. Котельникова, Р. Л. Стратоновича, К. Шеннона и др.) [2, 3].

1. Основные задачи теории оптимальных методов радиоприема

Исходя из требований целевого назначения РТС, условий их функционирования, а также из методических соображений, для типовых РТС можно сформулировать шесть частных задач оптимального радиоприема:

1. Обнаружение сигнала.
2. Различение сигналов.
3. Оценка параметров сигнала.
4. Фильтрация сообщений.
5. Разрешение сигналов.
6. Распознавание образов.

При рассмотрении этих частных задач далее будем представлять на входе приемника аддитивную сумму полезного сигнала $S(t)$ и помехи $n(t)$

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1)$$

$$S(t, \lambda) = \begin{cases} A \cdot \exp[\omega(t - \tau) + \varphi + \varphi_0], \\ 0, t > T, \tau > T. \end{cases} \quad (2)$$

В (1) и (2) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{III})$ – параметры, от которых зависит сигнал.

Конкретно для (2) $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = \omega$, $\lambda_3 = \varphi$, $\lambda_4 = \tau$, $\lambda_5 = T$.

В принятой модели полезного сигнала $S(t, \lambda)$ некоторые параметры могут быть заранее известными. Известные параметры и их вероятностные характеристики составляют априорные сведения. Неизвестные параметры сигнала, которые отражают полезную информацию, называются информационными, а остальные – сопутствующими.

К априорным сведениям относится и вид помехи $n(t)$. Далее во всех рассматриваемых задачах помеха представляет собой нормальный случайный процесс с нулевым матожиданием и известной спектральной плотностью.

1. Для обнаружения сигнала

$$x(t) = \lambda_i S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \lambda_i = 0, 1 \quad (3)$$

требуется установить сам факт наличия ($\lambda_1 = T$) или отсутствия ($\lambda_2 = 0$) сигнала в принимаемой смеси $x(t)$, т.е. требуется по принятой реализации $x(t)$ на интервале T решить оптимальным образом, присутствует или отсутствует сигнал $S(t)$. По результатам решения должна быть синтезирована структурная схема оптимального обнаружителя полезного радиосигнала и определены количественные характеристики качества обнаружения.

Задача характерна для систем радиолокации и радионавигации.

2. Задача различения сигналов

$$x(t) = S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_i \quad (4)$$

состоит в оптимальном принятии решения о присутствии в принятой реализации $x(t)$ одного из m сигналов, где $i = \overline{1, m}$. При $m = 1$ задача различения переходит

в задачу обнаружения.

Результатами решения задачи различения являются синтез оптимальной структуры различителя и оценка ее помехоустойчивости. Задача характерна для систем передачи информации и управления.

3. При решении задачи оценки параметров

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

неизвестный параметр λ_i является случайной величиной с априорной вероятностью $P(\lambda_i)$.

Необходимо с минимальной погрешностью определить значение этого параметра λ_i в принятой реализации $x(t)$. Если полезный сигнал $S(t, \lambda)$ зависит от нескольких случайных параметров, то ставится задача о совместной оценке двух и большего числа параметров. Оцениваемыми параметрами могут быть задержка \mathcal{T} , частота Ω , фаза Φ , амплитуда A , длительность сигнала T .

Результатами решения задачи являются синтез структурной схемы соответствующего оптимального измерителя и оценка потенциальной точности измерения. Задача характерна для систем передачи и извлечения информации.

4. Задача фильтрации сообщений состоит в непрерывном выделении информационного сообщения $\lambda(t)$ из реализации

$$x(t) = S[t, \lambda(t)] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

причем сообщение $\lambda(t)$ рассматривается как случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Задача фильтрации переходит в задачу оценки параметра, если фильтруемый параметр за время наблюдения T не успел существенно измениться.

Задача фильтрации является более общей и сложной, чем задача оценки параметров. В результате решения задачи синтезируется структурная схема оптимального фильтра, как правило, следящего, и производится потенциальная оценка точности выделения сообщения.

Задача фильтрации возникает в системах извлечения, передачи информации и радиоуправления.

5. При оптимальном разрешении принимается реализация

$$x(t) = \sum_{\tau=1}^m C_j \cdot S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

которая представляет собой сумму нескольких налагающихся сигналов, зависящих от параметров λ_j ($j = \overline{1, m}$) и помехи $n(t)$, коэффициент C_j принимает значения 0 или 1. Требуется оптимальным образом не только разрешить (разделить) принимаемые полезные сигналы, но и произвести отдельную оценку их информационных параметров. Следовательно, задачу разрешения можно рассматривать по двум направлениям: разрешение–разделение и разрешение–измерение.

Результатами решения задачи являются синтез структурной схемы оптималь-

ного разделителя сигналов и потенциальная оценка разрешающей способности выделяемых информационных параметров.

Разрешение–разделение характерно для систем передачи информации, а разрешение–измерение возникает в системах извлечения информации.

б. Задача распознавания образов (или задача классификации) связана с построением систем, предназначенных для определения принадлежности данного (исследуемого) объекта к одному из заранее выделенных классов объектов. При этом каждый объект описывается совокупностью основных характеристик $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, заданных многомерным вектором, и дополнительной характеристикой μ , которая указывает на принадлежность объекта к некоторому классу.

Следовательно, в принимаемой реализации

$$x(t) = S(t, \vec{\lambda}, \mu) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

по значениям параметров $\vec{\lambda}$ полезного сигнала устанавливается наиболее правдоподобное значение характеристики μ . При этом набор закономерных связей параметров $\vec{\lambda}$ и характеристика μ заранее известны в соответствии с принятой классификацией объектов.

Решение этой задачи, в частности, предусматривает пространственно-временную и поляризационную обработку принимаемого сигнала, что характерно для систем извлечения информации.

Все вышеуказанные задачи оптимального приема тесно связаны между собой, и в практических ситуациях некоторые из них должны решаться не раздельно, а совместно. Ниже каждая из первых пяти задач будет рассматриваться достаточно подробно.

Перед тем как приступить к рассмотрению перечисленных задач, введем ряд понятий и определений, которые позволят подойти к решению с единых позиций.

2. Понятие об апостериорной вероятности

Решение всех частных задач оптимального радиоприема осуществляется на основе априорных (предварительных) данных о сигнале, сообщении, помехах, канале связи. К априорным данным можно отнести статистические характеристики реализаций на входе приемника: законы распределения амплитуды, частоты, фазы, задержки сигнала; закон распределения амплитуды сообщения; закон распределения амплитуды помехи; вероятность появления полезного сигнала. К априорным данным относятся также знания о форме огибающей и виде информационной модуляции сигнала. С учетом априорных сведений знания, полученные наблюдателем в результате анализа принятых колебаний, называются апостериорными и полностью описываются апостериорной плотностью вероятности.

Рассмотрим формирование апостериорной вероятности [1].

Пусть принятое колебание

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (9)$$

представляет аддитивную смесь полезного сигнала $S(t, \lambda)$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с известной спектральной плотностью N_0 . При дискретном наблюдении, когда отсчеты в соответствии с теоремой Котельникова берутся через равноотстоящие моменты времени $\Delta = t_i - t_{i-1}$ на интервале $[0, T]$, выборочные значения принятого колебания $x(t)$ в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k будут заключены в случайных величинах

$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_k = x(t_k)$. Очевидно, что

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} x(t) dt, \quad S_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} S(t, \lambda) dt, \quad n_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} n(t) dt \quad (10)$$

$$\text{и } n_i = x_i - S_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (11)$$

Если выборочные значения x_1, x_2, \dots, x_k описываются совместной плотностью вероятности $P_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$, а соответствующие выборочные значения помехи – плотностью вероятности $P_k(n_1, n_2, \dots, n_k)$, то совместная плотность вероятности $P(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_k)$, согласно теореме умножения вероятностей, примет вид

$$P(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_k) = P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot P(\lambda/x_1, x_2, \dots, x_k) = P_{pr}(\lambda) P(x_1, x_2, \dots, x_k/\lambda), \quad (12)$$

где $P_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности информационного параметра λ .

Отбросив в (12) левую часть равенства и учитывая, что $P_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ не зависит от интересующего нас параметра λ , получим

$$P(\lambda/x_1, x_2, \dots, x_k) = R \cdot P_{pr}(\lambda) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_k/\lambda). \quad (13)$$

В (13) условная плотность вероятности

$$P_{ps}(\lambda) = P(\lambda/x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (14)$$

называется апостериорной плотностью вероятности, так как в ней заключено все то, что можно узнать о параметре λ после приема колебания $x(t)$.

Условная плотность вероятности

$$L(\lambda) = P(x_1, x_2, \dots, x_k/\lambda) \quad (15)$$

называется функцией правдоподобия и показывает, насколько одно возможное значение параметра λ более правдоподобно, чем другое, при фиксированных значениях X_1, X_2, \dots, X_k .

Нормирующий коэффициент R принимается равным

$$\mathbf{R} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_{pr}(\lambda) L(\lambda) d\lambda \right]^{-1}. \quad (16)$$

С учетом (12) и (13) выражение (11) примет вид

$$P_{ps}(\lambda) = \mathbf{R} P_{pr}(\lambda) L(\lambda). \quad (17)$$

В (17) показано, как из априорных данных и результатов анализа принятого колебания формируется апостериорное знание.

Для дискретного параметра λ , принимающего одно из нескольких значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ с априорными вероятностями $P_{pr}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, (17) запишется в виде

$$P_{ps}(\lambda_i) = \mathbf{R} P_{pr}(\lambda_i) L(\lambda_i), \quad (18)$$

где $\mathbf{R} = \left[\sum_{i=1}^m P_{pr}(\lambda_i) L(\lambda_i) \right]^{-1}$.

Раскроем структуру функции правдоподобия $L(\lambda_i)$ для указанного дискретного наблюдения.

Совместная плотность вероятности для случайной величины $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ имеет вид

$$P_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{k}{2}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k n_i^2 \cdot \Delta \right], \quad (19)$$

где согласно (10) для нормального распределения приняты матожидание $\langle \{n_i\} \rangle = 0$, дисперсия $\langle \{n_i^2\} \rangle = N_0/2\Delta$, а корреляционный момент $\langle \{n_i \cdot n_j\} \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Считая значение параметра λ фиксированным за время наблюдения, подставим значение n_i из (11) в (19), учитывая при этом, что якобиан преобразования от переменных n_i к переменным x_i равен единице. Полученное выражение

$$\begin{aligned} P_k \cdot [x_1 - S(\lambda), x_2 - S(\lambda), \dots, x_m - S_m(\lambda)] &= P \left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_m}{\lambda} \right) = L(\lambda) = \\ &= \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k [x_i - S_i(\lambda)]^2 \Delta \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

и является функцией правдоподобия информационного параметра λ .

Если принимаемый сигнал зависит от нескольких параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, то (20) примет вид

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{\frac{k}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k [x_i - S_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e)]^2 \cdot \Delta \right\}. \quad (21)$$

При непрерывности наблюдения необходимо перейти к пределу при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} k_{\Delta} P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = P[n(t)] = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt \right\}, \quad (22)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} k_{\Delta} L(\lambda) = F(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda)]^2 dt \right\}. \quad (23)$$

Коэффициент пропорциональности k_{Δ} в (22) и (23) зависит только от Δ , а функцию $F(\lambda)$ в (23) в дальнейшем будем называть функционалом правдоподобия.

Таким образом, при непрерывной обработке принимаемой смеси (9) выражение для апостериорной вероятности информационного параметра λ примет вид:

$$P_{ps}(\lambda) = RP_{pr}(\lambda) \cdot F(\lambda) = RP_{pr}(\lambda) \cdot \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) \cdot S(t, \lambda)] dt \right]. \quad (24)$$

При решении частных задач оптимального приема чаще приходится оперировать с отношением апостериорных вероятностей или функционалов правдоподобия.

3. Критерии оптимального приема

Ранее было отмечено, что оптимизация приема зависит от выбранного критерия и заданных условий приема. Критерии – это количественные характеристики искажений принимаемых (извлекаемых) сообщений.

В зависимости от назначения радиосистемы критерии могут быть разными. При выбранном критерии оптимальный приемник радиосистемы обеспечивает минимальные искажения сообщения, уровень которых часто называют потенциальной помехоустойчивостью. Реальный приемник при заданных условиях приема не может превзойти потенциальную помехоустойчивость, а может лишь стремиться к ее достижению.

Рассмотрим некоторые критерии оптимального приема, которые нашли наибольшее применение в радиосистемах.

3.1. Критерий минимума средней квадратической ошибки

Этот критерий является удобным при восстановлении воспроизводимого непрерывного сообщения и может быть использован в задачах фильтрации.

Если воспроизводимое непрерывное сообщение $\lambda(t)$, с известными корреля-

ционной функцией $R_\lambda(\tau)$ или спектральной плотностью $F_\lambda(\omega)$, и аддитивная помеха $n(t)$, с известными корреляционной функцией $R_n(\tau)$ или спектральной плотностью $F_n(\omega)$, поступают на вход оптимального приемника, то на выходе его воспроизведенное сообщение $\hat{\lambda}(t)$ будет отличаться от переданного на величину ошибки $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t). \quad (25)$$

Наиболее полно ошибку $\varepsilon(t)$ характеризуют математическим ожиданием $m_\varepsilon = \langle \varepsilon(t) \rangle$ и корреляционной функцией $R(\tau) = \langle [\varepsilon(t) - m_\varepsilon][\varepsilon(t - \tau) - m_\varepsilon] \rangle$. Однако на практике достаточной характеристикой ошибки является средний квадрат ошибки

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\omega) d\omega, \quad (26)$$

где спектральная плотность ошибки определяется выражением

$$F_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\varepsilon(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (27)$$

Отсюда следует критерий минимума средней квадратической ошибки, который сводится к минимизации выражения (26):

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \min. \quad (28)$$

3.2. Критерий максимума отношения сигнал/шум

Данный критерий чаще всего используется при линейной фильтрации полученного сигнала $S(t)$ известной формы на фоне аддитивного нормального случайного шума $n(t)$ с заданной спектральной плотностью N_0 .

Если $x(t) = S(t) + n(t)$ – аддитивная смесь полезного сигнала с нормальным случайным шумом на входе оптимального приемника, а $y(t) = y_s(t) + y_n(t)$ – полезная и шумовая составляющая на его выходе, то критерий максимума отношения сигнал/шум записывается в виде

$$\frac{P_{ys}}{P_{yn}} = Q_{\max}, \quad (29)$$

где P_{ys} и P_{yn} – соответственно пиковое значение мощности полезного сигнала и мощности (дисперсии) шума на выходе оптимального приемника.

3.3. Критерий идеального наблюдателя

Пусть имеется некоторое число различных сигналов $S_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, лишь

один из которых может поступать аддитивно, с шумом на вход приемника на интервале наблюдения. Сигналы могут быть детерминированными, квазидетерминированными либо случайными.

После приема смеси

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (30)$$

могут быть выдвинуты разные гипотезы, какой из сигналов $S_i(t)$ был передан.

В зависимости от числа возможных вариантов передаваемых сигналов задача обнаружения одного из них приемником подразделяется на бинарную и многоальтернативную. В бинарных задачах на интервале наблюдения передается один из двух сигналов. Частным случаем бинарной задачи является обнаружение факта передачи или отсутствия одного сигнала. В многоальтернативных задачах требуется идентифицировать принятый сигнал с одним из n сигналов с известными характеристиками, причем $n > 2$.

Для бинарной задачи обнаружения (различения двух сигналов) критерий идеального наблюдателя запишется в виде

$$P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1/S_2) = \min, \quad (31)$$

где $P(S_1)$ и $P(S_2)$ – известные априорные вероятности передачи сигналов S_1 и S_2 ($P(S_1) + P(S_2) = 1$),

$P(S_2/S_1)$ и $P(S_1/S_2)$ – условные вероятности ошибки выделения сигналов S_1 и S_2 соответственно при приеме смеси относительно порога h .

Выражение (31) минимизирует общую вероятность ошибки в бинарной задаче обнаружения.

При обнаружении одного сигнала критерий (31) примет вид

$$P(S_1) \cdot P(0/S_1) + P(0) \cdot P(S_1/0) = \min, \quad (32)$$

где $P(0)$ – априорная вероятность отсутствия сигнала,

$P(0/S_1)$ – вероятность пропуска сигнала,

$P(S_1/0)$ – вероятность ложной тревоги.

Для многоальтернативной задачи обнаружения критерий идеального наблюдателя примет вид

$$\sum_{j \neq i}^n P(S_i) \cdot P(S_j/S_i) = \min, \quad (33)$$

где $P(S_j/S_i)$ – условная вероятность ошибки того, что при передаче сигнала S_i принят какой-то другой сигнал S_j , т.е. $i \neq j$.

Критерии (31), (32), (33) являются частными случаями более обобщенного критерия среднего риска r , минимизирующего средние потери

$$r = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n C_{ij} \cdot P(S_j/S_i) = \min, \quad (34)$$

где весовые коэффициенты стоимости C_{ij} характеризуют потери (или выигрыш) при соответствующем исходе.

Критерий идеального наблюдателя применяется в основном для оптимизации приема в системах передачи дискретной информации. В радиолокационных системах из-за отсутствия знаний об априорных вероятностях критерий идеального наблюдателя не используется.

3.4. Критерий максимума апостериорной вероятности, отношения правдоподобий

Задачу оптимизации приема смеси (30) можно построить на сравнении апостериорных вероятностей (24)

$$P_{ps}(S_1) \geq P_{ps}(S_2) \geq \dots \geq P_{ps}(S_i), \quad (35)$$

$$\text{где } P_{ps}(S_i) = R P_{ps}(S_i) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S_i(t)]^2 dt \right\}. \quad (36)$$

Решение о приеме сигнала принимается по вычисленной максимальной апостериорной вероятности. Если $P_{ps}(S_j) = \max$, то принимается решение о принятии сигнала $S_j(t)$ с заданными показателями качества.

При приеме одного из двух сигналов критерий максимума апостериорной вероятности сводится к критерию отношения апостериорных вероятностей

$$\frac{P_{ps}(S_1)}{P_{ps}(S_2)} \geq 1. \quad (37)$$

В задачах радиолокации, когда речь идет об обнаружении одиночного сигнала, записывается отношение их функционалов правдоподобия

$$\frac{F(S_1)}{F(0)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S_1(t)]^2 dt \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\}} \geq h, \quad (38)$$

где h – порог обнаружения. Соотношение (38) известно как критерий отношения правдоподобий. Если отношение правдоподобий превышает порог, то принимается решение о наличии сигнала, в противном случае – о его отсутствии.

Критерий, по которому при заданном значении вероятности ложной тревоги $P_{лт} = P(S_1/0)$, определяемой порогом h_0 , минимизируется вероятность пропуска $P_{проп} = P(0/S_1)$ или максимизируется вероятность правильного обнаружения $P_{по} = 1 - P_{проп}$, называется критерием Неймана–Пирсона.

Рассмотренные критерии и их модификации охватывают весь круг задач, решаемых оптимальным приемом.

4. Оптимальный линейный фильтр

Рассмотрим два классических случая построения оптимальных линейных фильтров по двум разным критериям: минимуму средней квадратической ошибки и максимуму отношения сигнал/шум.

Линейный фильтр, минимизирующий среднюю квадратическую ошибку при выделении полезного сигнала из аддитивного шума, будем в дальнейшем называть оптимальным линейным фильтром, а линейный фильтр, максимизирующий на выходе отношение сигнал/шум, – согласованным фильтром. При рассмотрении этих случаев будем считать сигнал и шум независимыми стационарными случайными процессами с известными характеристиками (корреляционными функциями или спектральными плотностями).

Пусть на вход линейного фильтра (ЛФ) (рис. 1) поступают сигнал $S(t)$ с известной корреляционной функцией $r_s(\tau)$ и аддитивный шум $n(t)$ с корреляционной функцией $r_n(\tau)$:

$$x(t) = S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39)$$

где T – время анализа.



Рис. 1

Задача состоит в нахождении импульсного отклика ЛФ – $g(t)$, минимизирующего среднюю квадратическую ошибку

$$\varepsilon^2(t) = \left\langle \left[\hat{S}(t) - S(t + \Delta) \right]^2 \right\rangle \quad (40)$$

при выделении сигнала $S(t)$.

В (40) $\hat{S}(t)$ – оценка сигнала $S(t)$ на выходе ЛФ, а Δ – временной сдвиг, создаваемый ЛФ.

Анализ будем проводить на интервале наблюдения $(0, T)$. Сигнал на выходе ЛФ определяется сверткой

$$\hat{S}(t) = \int_0^T g(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau. \quad (41)$$

Выражение для средней квадратической ошибки при этом примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= \left\langle \left\{ \int_0^T [S(t-\tau) + n(t-\tau)] g(\tau) d\tau - S(t+\Delta) \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \sigma_s^2 + \int_0^T g(\tau_1) d\tau_1 \left\{ \int_0^T [r_s(\tau_1 - \tau_2) + r_n(\tau_1 - \tau_2)] g(\tau_2) d\tau_2 - 2r_s(\tau_1 + \Delta) \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

В (42) $\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle_{\min}$ средняя квадратическая ошибка принимает минимальную величину, если выполняется равенство

$$\int_0^T [r_s(\tau - t) + r_n(\tau - t)] g(t) dt = r_s(\tau + \Delta). \quad (43)$$

Интегральное уравнение (43) называется уравнением линейной регрессии Винера–Хопфа и является основным уравнением линейной фильтрации по заданному критерию. Решая уравнение (43), находят импульсный отклик $g(t)$ оптимального ЛФ. Общая теория и синтез таких фильтров были разработаны А. Л. Колмогоровым и Н. Винером [2]. Определим физическую реализацию оптимального ЛФ, выразив среднюю квадратическую ошибку через спектральную плотность ошибки $F_\varepsilon(\omega)$ и осуществив ряд подстановок и преобразований:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (44)$$

Спектральную плотность ошибки $F_\varepsilon(\omega)$ найдем, вычислив функцию корреляции ошибки:

$$r_\varepsilon(\tau) = \left\langle \left[\hat{S}(t) - S(t+\Delta) \right] \cdot \left[\hat{S}(t-\tau) - S(t-\tau+\Delta) \right] \right\rangle = r_{\hat{S}}(\tau) + r_s(\tau) - r_{\hat{S}\hat{S}}(\tau) - r_{\hat{S}s}(\tau). \quad (45)$$

Так как преобразование Винера–Хинчина связывает $F_\varepsilon(\omega)$ и $r_\varepsilon(\tau)$ линейно, то

$$F_\varepsilon(\omega) = F_{\hat{S}}(\omega) + F_s(\omega) - F_{\hat{S}\hat{S}}(\omega) - F_{\hat{S}s}(\omega). \quad (46)$$

В (45) и (46) $r_{\hat{S}}(\tau)$ и $F_{\hat{S}}(\omega)$ – корреляционная функция и спектральная плотность оценки сигнала, $r_s(\tau)$ и $F_s(\omega)$ – корреляционная функция и спектральная плотность сигнала, $r_{\hat{S}\hat{S}}(\tau)$ и $F_{\hat{S}\hat{S}}(\omega)$ – функции взаимной корреляции и взаимная спектральная плотность сигнала и его оценки, $r_{\hat{S}s}(\tau)$ и $F_{\hat{S}s}(\omega)$ – взаимная корреляция и спектральная плотность оценки сигнала и сигнала. В (45) в целях упрощения записи опущена задержка Δ ЛФ, которая в дальнейшем будет учтена. Спектральная плотность сигнала оценки, исходя из теории линейных систем, имеет вид

$$F_s(\omega) = |k(j\omega)|^2 \cdot F_x(\omega) = |k(j\omega)|^2 \cdot [F_s(\omega) + F_n(\omega)], \quad (47)$$

где $k(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ – коэффициент передачи ЛФ,

$F_n(\omega)$ – спектральная плотность шума,

$F_x(\omega)$ – спектральная плотность аддитивной смеси на входе

ЛФ.

Получим выражение для взаимной спектральной плотности $F_{s\hat{s}}(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_{s\hat{s}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{s\hat{s}}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(t) \cdot \hat{S}(t - \tau) \rangle \cdot e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \left\{ S(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [S(\tau_1) + n(\tau_1)] g(t - \tau - \tau_1) d\tau_1 \right\} \right\rangle e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_s(t - \tau_1) \cdot g(t - \tau - \tau_1) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau = k^*(j\omega) \cdot F_s(\omega), \end{aligned} \quad (48)$$

где $k^*(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная с $k(j\omega)$. Выполнив аналогичные преобразования для $F_{s\hat{s}}(\omega)$, получим

$$F_{s\hat{s}}(\omega) = k(j\omega) \cdot F_s(\omega). \quad (49)$$

Если не принимать во внимание задержки ЛФ, то коэффициент передачи в (48) и (49) является вещественной величиной.

Окончательное выражение для спектральной плотности ошибки без учета задержки ЛФ с учетом (47), (48) и (49) примет вид

$$F_e(0) = k^2(\omega) \cdot [F_s(\omega) + F_n(\omega)] + F_s(\omega) - 2k(\omega) \cdot F_s(\omega). \quad (50)$$

Взяв производную спектральной плотности ошибки по коэффициенту передачи и приравняв ее к нулю, получим выражение для оптимального коэффициента ЛФ:

$$\frac{dF_e(\omega)}{dk(\omega)} = 2k(\omega) [F_s(\omega) + F_n(\omega)] - 2F_s(\omega) = 0, \quad (51)$$

$$k_{\text{опт}}(\omega) = \frac{F_s(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)}.$$

С учетом задержки сигнала получим

$$k_{\text{опт}}(\omega) = \frac{F_s(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)} \cdot e^{-j\omega\Delta}. \quad (52)$$

При этом спектральная плотность ошибки примет вид

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \frac{F_s(\omega) \cdot F_n(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)}, \quad (53)$$

а средняя квадратическая ошибка

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(\omega) \cdot F_n(\omega)}{F_s(\omega) + F_n(\omega)} d\omega. \quad (54)$$

Анализ (54) показывает:

а) ошибки равны нулю ($\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} = 0$), когда $F_s(\omega) \cdot F_n(\omega) = 0$, что выполняется или при отсутствии шума, или когда спектры сигнала и шума не перекрываются;

б) при полном или частичном перекрытии спектров сигнала и шума ошибка минимальна, когда $F_s(\omega) \gg F_n(\omega)$:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\min} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) d\omega = \sigma_n^2. \quad (55)$$

Ошибка максимальна, когда $F_s(\omega) \ll F_n(\omega)$:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega) d\omega = \sigma_s^2 \quad (56)$$

и восстановление сигнала ЛФ невозможно.

Следовательно, оптимальный ЛФ, синтезированный по критерию минимума средней квадратической ошибки, – это полосовой фильтр, настроенный на эффективную полосу выделяемого полезного сигнала.

Лучшие результаты фильтрации можно получить, применяя предискажение, т.е. предварительно пропуская на передающей стороне сигнал через ЛФ₂ и оптимизируя коэффициенты передачи обоих фильтров с целью получения минимума средней квадратической ошибки. Однако и в этом случае выигрыш зависит от относительной ширины полосы перекрытия сигнала и шума.

Оптимальные линейные фильтры охватывают мало практически интересных случаев обработки сигналов.

5. Согласованный фильтр

5.1. Синтез и анализ

Пусть на вход ЛФ (см. рис. 1) поступает аддитивная смесь полезного сигнала $S(t)$ известной формы и стационарного случайного процесса типа белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$:

$$x(t) = S(t) = n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (57)$$

где T – длительность полезного сигнала.

Поставим теперь задачу получения на выходе ЛФ такого полезного сигнала, отношение пиковой мощности которого к мощности шума максимизируется.

Обозначим процесс на выходе ЛФ функцией

$$y(t) = y_c(t) + y_n(t), \quad (58)$$

состоящей из полезной составляющей $y_c(t)$ и шумовой $y_n(t)$.

Если $k(j\omega) = k(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)}$ – коэффициент передачи ЛФ, $S(j\omega) = S(\omega)e^{j\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

– спектральная функция сигнала $S(t)$, то полезный сигнал на выходе ЛФ выразится равенством

$$y_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (59)$$

Мощность (дисперсия) шума на выходе ЛФ равна

$$\sigma_n^2 = P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) \cdot |k(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega. \quad (60)$$

Отношение мощности мгновенного значения полезного сигнала на выходе ЛФ в некоторый момент времени t_0 к мощности выходного шума

$$q = \frac{|y_c(t)|^2}{\sigma_n^2} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (61)$$

Найдем такой коэффициент передачи $k(j\omega)$, при котором отношение (61) в момент времени t_0 достигает максимума. На основании неравенства Буняковского–Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\omega)|^2 d\omega$$

получим

$$q \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |k(j\omega)|^2 d\omega} = \frac{2E_c}{N_0}, \quad (62)$$

где $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = E_c$ – энергия входного полезного сигнала.

Таким образом, отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе любого линейного фильтра не может превышать величины $2E_c/N_0 = q_{\max}$.

Указанная максимальная величина q имеет место при максимальном значении интеграла в числителе выражения (61):

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot k(j\omega) \cdot e^{j\omega\tau_0} d\omega = \max. \quad (63)$$

Из выражения (63) вытекает требование к коэффициенту передачи $k(j\omega)$ ЛФ, максимизирующего отношение (62), которое достигается при выполнении условия

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_0}, \quad (64)$$

где C – постоянный коэффициент, учитывающий ослабление или усиление сигнала ЛФ,

$S^*(j\omega) = S(\omega) \cdot e^{-j\psi(\omega)}$ – функция, комплексно сопряженная со спектральной функцией входного полезного сигнала $S(t)$. (65)

Линейный фильтр, комплексный коэффициент передачи которого удовлетворяет условию (64), называется оптимальным согласованным фильтром для сигнала $S(t)$.

Для согласования фильтра из (63) с учетом (59) и (65) получим равенства:

$$|k(j\omega)| = C \cdot |S(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -[\psi(\omega) + \omega t_0], \quad (66)$$

из которых следует, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра пропорциональна амплитудно-частотному спектру ожидаемого сигнала, а фазочастотная характеристика равна сумме фазового спектра входного сигнала, взятого с обратным знаком, и фазовой задержки $(-\omega t_0)$.

Фаза гармонических составляющих полезного сигнала на выходе согласованного фильтра (59) равна

$$\omega t + \varphi(\omega) + \psi(\omega) = \omega(t - t_0) \quad (67)$$

и при $t = t_0$ становится нулевой, т.е. в момент времени t_0 все гармонические составляющие сигнала имеют одинаковую фазу и их амплитуды складываются арифметически, образуя пик сигнала на выходе фильтра. Спектральные составляющие шума на выходе фильтра при этом имеют случайные фазы.

Найдем выражение для импульсного отклика $g(t)$ согласованного фильтра, применив обратное преобразование Фурье от коэффициента передачи

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0-t)} d\omega = C \cdot S(t_0 - t). \quad (68)$$

Таким образом, импульсным откликом согласованного фильтра является зеркально отображенная функция сигнала $S(t)$ относительно времени t_0 , умноженная на коэффициент C (рис. 2).

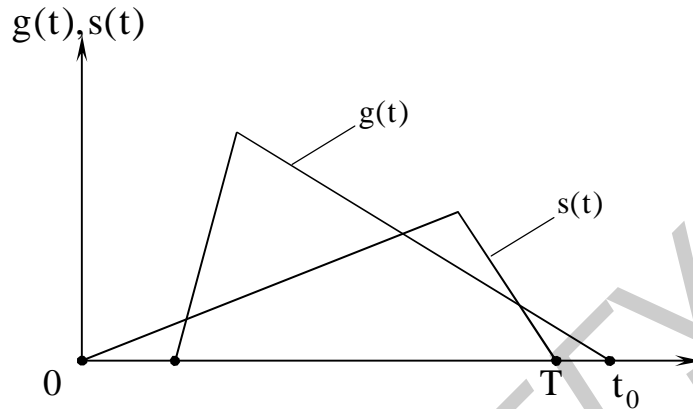


Рис. 2

Из (68) и рис. 2 видно, что для практически реализуемого согласованного фильтра $t_0 \geq T$. Обычно берут $t_0 = T$.

Форма сигнала на входе согласованного фильтра определяется по теореме Дюамеля

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^T x(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^T [S(t-\tau) + n(t-\tau)] \cdot C \cdot S(t_0-\tau) d\tau = \\ &= C \int_0^T S(t-\tau) \cdot S(t_0-\tau) d\tau + C \int_0^T S(t_0-\tau) \cdot n(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (69)$$

Откуда форма полезного сигнала на выходе фильтра

$$y_c(t) = C \int_0^T S(t-\tau) \cdot S(t_0-\tau) d\tau = C \cdot R_c(t-t_0) \quad (70)$$

с точностью постоянного коэффициента C представляет автокорреляционную функцию сигнала $S(t)$, которая в точке $t = t_0$ принимает максимальное значение, пропорциональное энергии входного полезного сигнала

$$y_c(t)_{\max} = y_c(t_0) = C \cdot R(0) = C \cdot E_c. \quad (71)$$

Дисперсия S_y^2 шумовой составляющей сигнала $y_n(t)$ находится из ее корреляционной функции

$$\begin{aligned}
r(t_1, t_2) &= \langle y_n(t_1) \cdot y_n(t_2) \rangle = \\
&= \left\langle C^2 \int_0^T \int_0^T S(t_0 - \tau_1) \cdot n(t_1 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) \cdot n(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\rangle = \\
&= C^2 \int_0^T \int_0^T r_n(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= C^2 \int_0^T \int_0^T \delta(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1) \cdot \frac{N_0}{2} \cdot S(t_0 - \tau_1) \cdot S(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= C^2 \frac{N_0}{2} \int_0^T S(t) \cdot S(t + t_1 - t_2) dt = C^2 \frac{N_0}{2} \cdot R_c(t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{72}$$

При выводе конечного выражения (72) принимались во внимание дельта-коррелированность белого шума $r_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ и фильтрующие свойства дельта-функции.

В (72) при $t_1 - t_2 = \tau = 0$ получаем дисперсию шума на выходе фильтра

$$\sigma_n^2 = C^2 \cdot \frac{N_0 E_c}{2}. \tag{73}$$

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 с учетом (68) и (73)

$$q = \frac{P_c}{\sigma_n^2} = \frac{C^2 E^2}{C^2 \cdot \frac{N_0 E}{2}} = \frac{2E}{N_0} \tag{74}$$

можно пересчитать к отношению сигнал/шум на входе фильтра

$$q = \frac{2E}{N_0} = \frac{2P_{c \text{ ВХ}} \cdot T_{\text{эф}} \cdot \Delta f_{\text{эф}}}{N_0 \Delta f_{\text{эф}}} = T_{\text{эф}} \Delta f_{\text{эф}} \frac{P_{c \text{ ВХ}}}{P_{n \text{ ВХ}}} = B \frac{P_{c \text{ ВХ}}}{P_{n \text{ ВХ}}} = B q_{\text{ВХ}}, \tag{75}$$

где $T_{\text{эф}}$, $\Delta f_{\text{эф}}$ – эффективная длительность и полоса частот полезного сигнала $S(t)$,

$B = T_{\text{эф}} \cdot \Delta f_{\text{эф}}$ – база сигнала.

Следует учесть, что максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра определяется только энергией сигнала и спектральной плотностью шума и не зависит от формы сигнала.

В общем случае, когда шум $n(t)$ не белый и является нормальным стационарным процессом со спектральной плотностью $N(\omega)$, коэффициент передачи согласованного фильтра определяется по формуле

$$k(j\omega) = \frac{CS^*(j\omega)}{N(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (76)$$

Отношение сигнал/шум на выходе фильтра в этом случае равно

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) k(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) \cdot |k(j\omega)|^2 d\omega} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \quad (77)$$

Максимально возможное значение этого отношения определяется величиной

$$q_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \quad (78)$$

Формально коэффициент передачи оптимального фильтра (76) для произвольного аддитивного стационарного гауссова шума можно представить в виде произведения коэффициентов передачи двух последовательно включенных линейных фильтров, первый из которых «обеляющий», а второй – согласованный с полезным сигналом на выходе «обеляющего» фильтра

$$k(j\omega) = k_1(j\omega) \cdot k_2(j\omega) = \frac{C_1}{\sqrt{N(\omega)}} \cdot \frac{C_2}{\sqrt{N(\omega)}} S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (79)$$

Так как есть определенная свобода в выборе фазовой характеристики обеляющего фильтра, то можно достигнуть физической реализуемости оптимального фильтра.

Исходя из вышеизложенного, укажем основные свойства согласованных фильтров (СФ).

1. Среди всех линейных фильтров СФ на фоне белого шума дает на выходе максимальное отношение мощности пикового значения выходного сигнала и мощности шума, равное $\frac{2 E_c}{N_0}$.

2. Сигнал на выходе СФ по форме совпадает с функцией автокорреляции входного сигнала.

3. Функция корреляции шума на выходе СФ имеет вид функции корреляции входного сигнала.

4. СФ сложного сигнала в базу раз сжимает по длительности входной сигнал и в базу раз улучшает входное отношение сигнал/шум, если прием осуществляется в полосе сигнала.

5. Физически осуществимый СФ должен иметь $t_0 \geq T$ (время запаздывания фильтра не меньше длительности сигнала).

В ряде применений, особенно при приеме простых сигналов, используют квазиоптимальные фильтры, которые проще СФ в реализации и осуществляют согласование с сигналом по эффективной полосе. Это фильтры с передаточной

функцией прямоугольного вида, одиночного резонансного колебательного контура, гауссовой резонансной кривой. Для простых форм сигналов квазиоптимальные фильтры ухудшают отношение сигнал/шум по сравнению с СФ на величину, не превышающую 15 %. Функции квазиоптимальных фильтров обычно выполняют усилители промежуточной частоты.

5.2. Примеры согласованных фильтров

Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса

$$S(t) = \begin{cases} A_0, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & 0 > t, t > T \end{cases}, \quad (80)$$

где T – длительность импульса,

A_0 – его амплитуда.

Спектральная функция сигнала

$$S(j\omega) = A_0 \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{A_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (81)$$

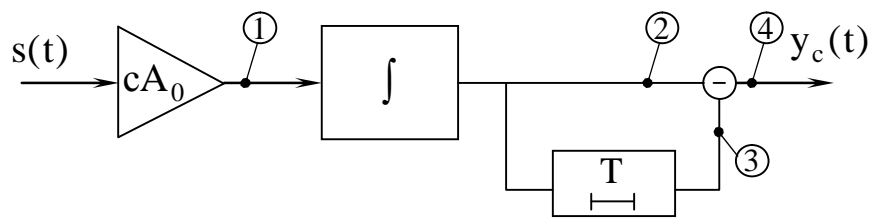
Если задержка СФ $t_0 = T$, то коэффициент передачи равен

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) e^{-j\omega t} = \frac{CA_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (82)$$

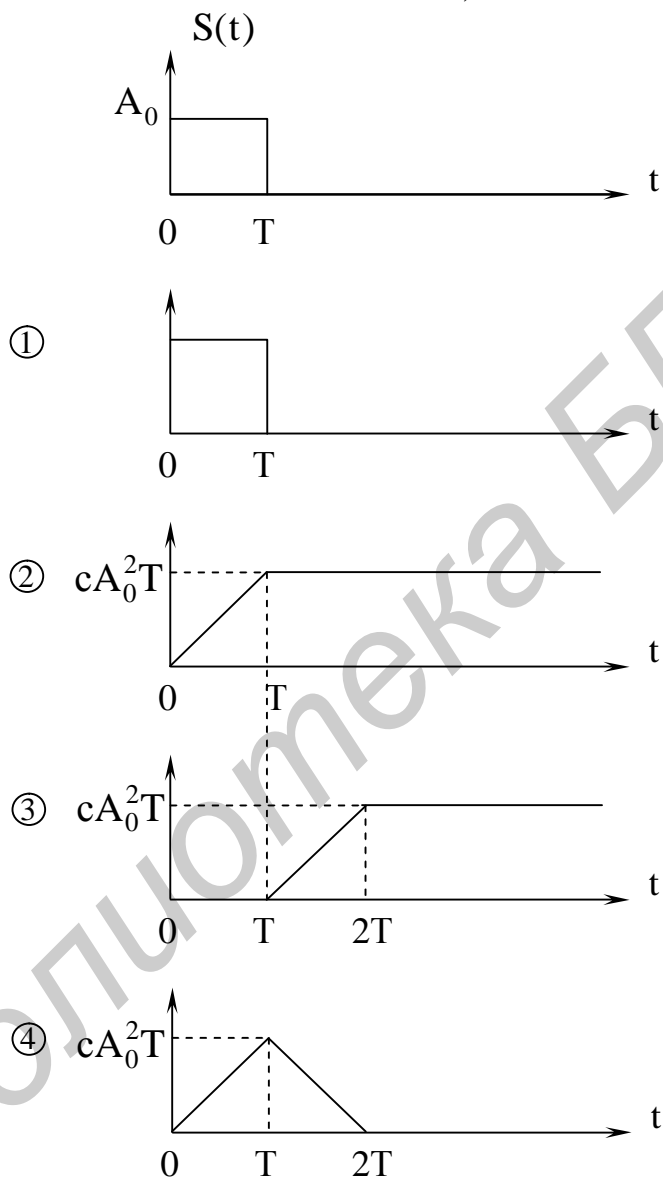
На рис. 3, а в соответствии с (82) представлена возможная схема СФ для видеоимпульса длительности T , состоящая из видеоусилителя с коэффициентом усиления CA_0 , интегратора, линии задержки на $t_0 = T$ и вычитающего устройства.

На рис. 3, б показаны напряжения на выходе отдельных элементов схемы. Напряжение на выходе СФ описывается выражением

$$y_c(t) = C \cdot A^2 \cdot T \left(1 - \frac{|t - T|}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (83)$$



a)



б)

Рис. 3

Другая реализация СФ на линии задержки с отводами и сумматором приведена на рис. 4.

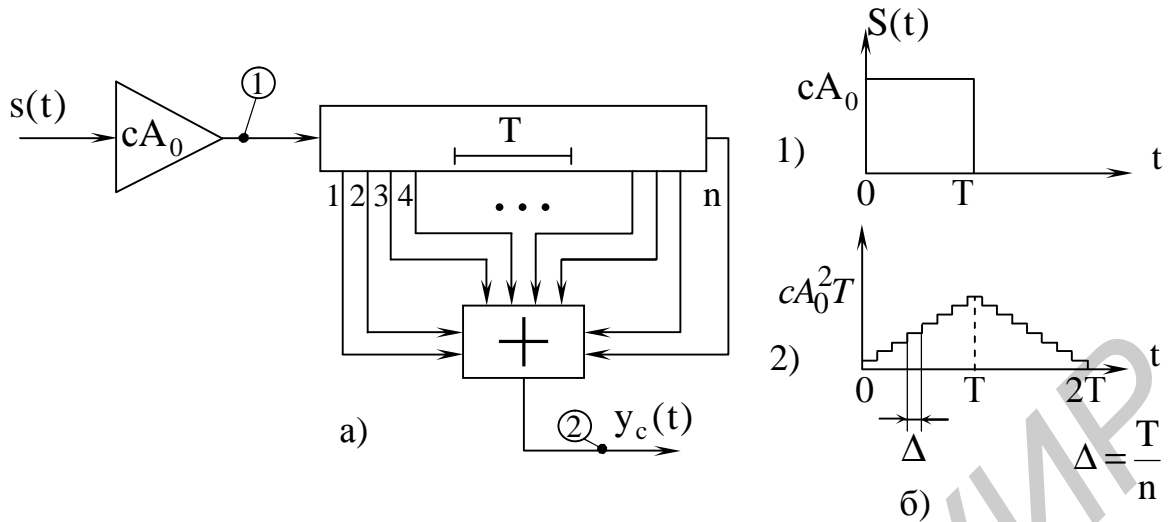


Рис. 4

Форма выходного сигнала тем ближе к описанию (83), чем больше количество отводов (меньше длительность ступеньки). Импульсный отклик этого фильтра равен

$$g(t) = \text{rect}(T - t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t \leq 0, t > T \end{cases} \quad (84)$$

Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

$$S(t) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (85)$$

Спектральная функция сигнала

$$S(j\omega) = \int_0^T A_0 \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{A_0}{2} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)T} - 1}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)T} - 1}{j(\omega_0 + \omega)} \right], \quad (86)$$

где $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$.

При $t_0 = T$ коэффициент передачи СФ равен

$$k(j\omega) = C \cdot S^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} = C \frac{A_0}{2} \left[\frac{e^{-j\omega T} - e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j\omega T} + e^{-j\omega_0 T}}{j(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (87)$$

Если в (86) $\omega_0 T = 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$k(j\omega) = CA_0 (1 - e^{-j\omega T}) \cdot \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (88)$$

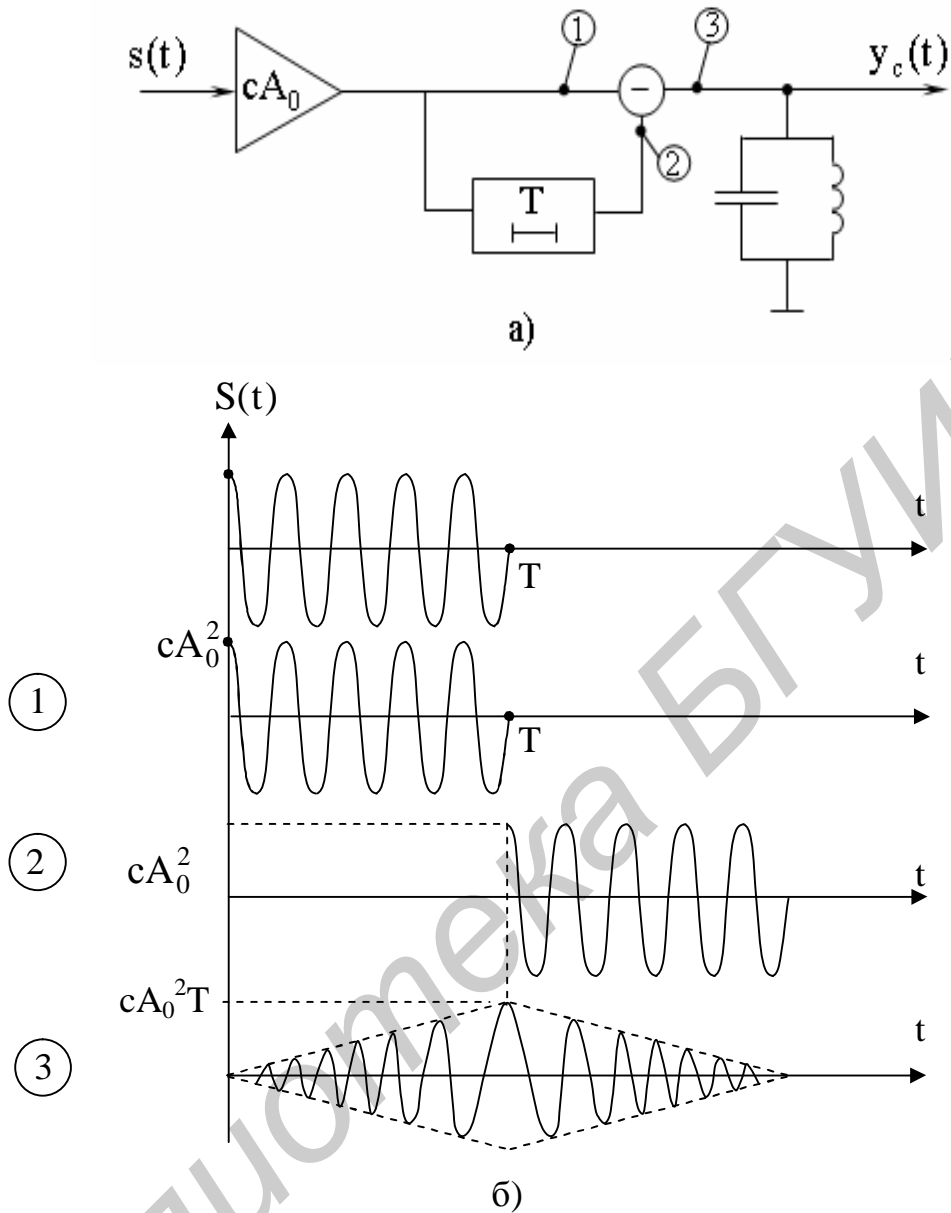


Рис. 5

В соответствии с (88) на рис. 5, а приведена функциональная схема СФ, состоящая из полосового усилителя с коэффициентом усиления CA_0 , линии задержки на $t_3 = T$, вычитающего усилителя и идеального колебательного контура ($\omega_0^2 = 1/LC$ – резонансная частота колебательного контура, $j\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$ – передаточная функция контура). На рис. 5, б изображены диаграммы, поясняющие работу СФ. Напряжение на выходе СФ описывается выражением

$$y_c(t) = CA_0 T \left(1 - \frac{|t-T|}{T} \right) \cos \omega_0 t. \quad (89)$$

Согласованный фильтр для пачки прямоугольных импульсов

В импульсной радиолокации чаще всего приходится обрабатывать не одиночный радиоимпульс, а пачку. Синтезируем СФ для пачки из n периодически следующих прямоугольных импульсов

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} S_0(t - iT_n), \quad 0 \leq t \leq nT_n, \quad (90)$$

где $S_0(t), 0 \leq t \leq T$ – одиночный прямоугольный импульс с энергией, E_0, T_n – период следования импульсов.

Спектральная функция пачки импульсов (90)

$$S(j\omega) = \int_0^{nT_n} S(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{iT_n}^{(i+1)T_n} S_0(t - iT_n)e^{-j\omega t} dt = S_0(j\omega) \sum_{i=1}^{n-1} e^{-j\omega T_n i}, \quad (91)$$

где $S_0(j\omega)$ – спектральная функция одиночного импульса.

При $t_0 = nT_n$ коэффициент передачи СФ для пачки импульсов будет равен

$$\begin{aligned} k(j\omega) &= CS^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} = CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega(n-1)T_n} \cdot e^{j\omega T_n} = \\ &= CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega T_n} = k_0(j\omega) \cdot k_1(j\omega), \end{aligned} \quad (92)$$

где $k_0(j\omega) = CS_0^*(j\omega)e^{-j\omega T_n}$,

$$k_1(j\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-j\omega T_n},$$

$$S^*(j\omega) = S_0^*(j\omega) \sum_{i=0}^{n-1} e^{j\omega T_n}.$$

Первый сомножитель в (92) есть коэффициент передачи СФ для одиночного радиоимпульса, а второй – частотная характеристика сумматора задержанных импульсов с выхода СФ.

На рис. 6 приведена функциональная схема СФ на линии задержки с отводами для пачки из когерентных радиоимпульсов.

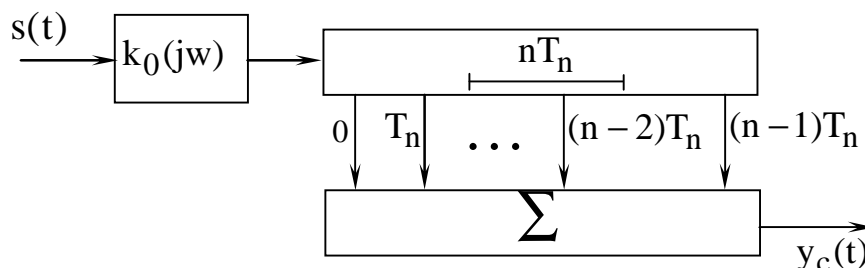


Рис. 6

На практике трудно осуществить задержку на длительность пачки радиоимпульсов, поэтому используют линию задержки на один период повторения импульсов T_{Π} с обратной связью с выхода на вход. Такое устройство называют рециркулятором.

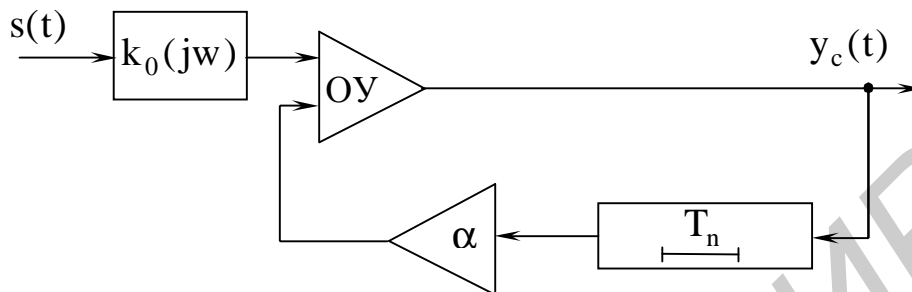


Рис. 7

На рис. 7 представлена функциональная схема рециркулятора, состоящая из операционного усилителя, линии задержки на T_{Π} и узла, обеспечивающего нужный коэффициент обратной связи α . Обычно берут коэффициент $\alpha < 1$, чтобы не возникало самовозбуждения.

Комплексная частотная характеристика рециркулятора в соответствии с (92) равна

$$k_p(j\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i e^{-j\omega T_{\Pi}} = \frac{1}{1 - \alpha \cdot e^{-j\omega T_{\Pi}}} \quad (93)$$

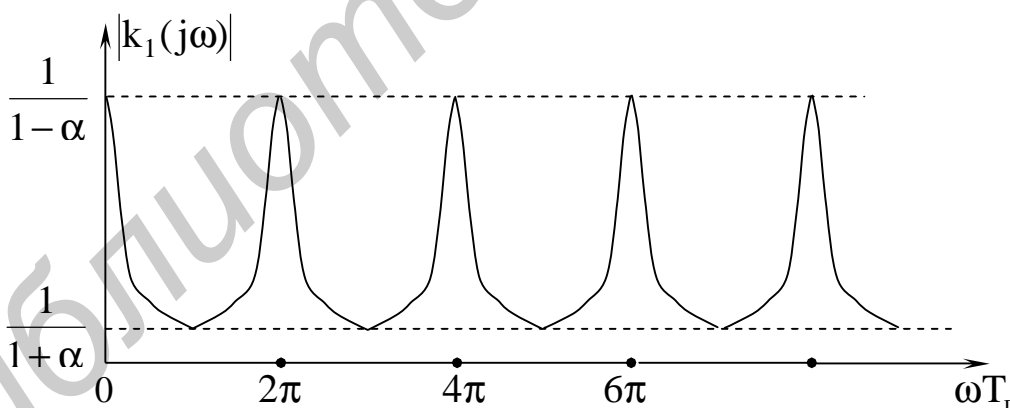


Рис. 8

Амплитудно-частотная характеристика рециркулятора (рис. 8) является периодической функцией частоты и имеет вид гребенки с максимумами, равными $1/(1 - \alpha)$ при частотах $\omega = 2\pi n/T_{\Pi}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда и другое название рециркуляторов – гребенчатые фильтры.

Наибольшее отношение сигнал/шум на выходе рециркулятора составляет

$$Q_{p \max} = \frac{(1+\alpha) \cdot (1-\alpha^n)^2}{1-\alpha} \cdot \frac{2E_c}{N_0} \quad (94)$$

Согласованный фильтр для цифрового сигнала

В современных РТС широко используются сложные сигналы с дискретной фазовой или частотной модуляцией. Свойства этих сигналов в основном определяются свойствами модулирующей цифровой последовательности

$$u(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \text{rect}[t - (i-1)\tau_0], \quad (95)$$

где $\{a_i\}$ – символы цифровой последовательности длительности τ_0 , принимающие значения

$$\text{rect}[t - (i-1)\tau_0] = \begin{cases} 1, & (i-1)\tau_0 \leq t \leq i\tau_0 \\ 0, & \text{др. значения } t \end{cases}, \text{ а } N - \text{ количество символов в цифро-}$$

вой последовательности.

Импульсный отклик СФ для цифровой последовательности (95) $g(t) = C \cdot U(T - t)$, где $T = N\tau_0$, представляет собой функцию, в которой без учета коэффициента C порядок следования символов цифровой последовательности инверсный (обратный) по отношению к сигнальной цифровой последовательности.

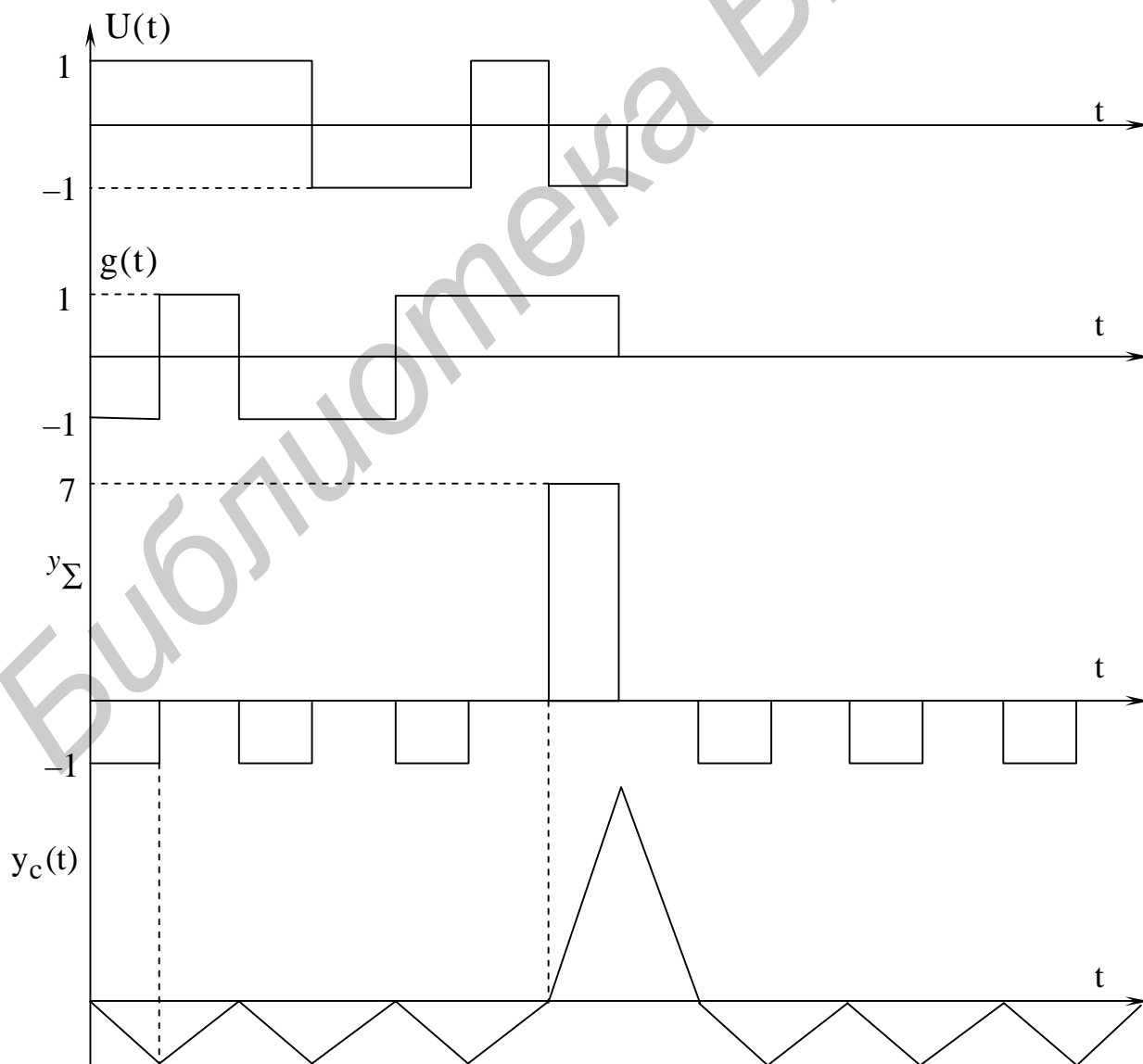
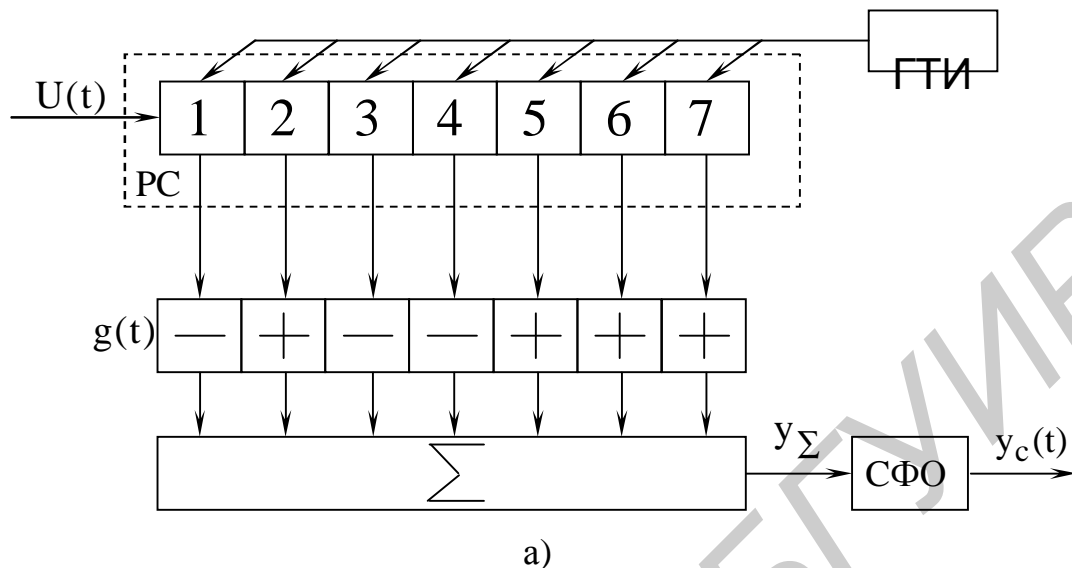
На рис. 9, а приведена функциональная схема СФ для бинарной M -последовательности с генераторным полиномом $x^3 + x^2 + 1 = 0$ и $c = 1$. В состав СФ входят генератор тактовых импульсов (ГТИ) с частотой следования $f_t = 1/\tau_0$, регистр сдвига (РС) на 7 разрядов ($N = 2^3 - 1 = 7$), блок весовых коэффициентов (БВК), который отражает характер импульсного отклика $g(t)$ путем инвертирования или неинвертирования выходных сигналов с соответствующих разрядов РС, арифметический сумматор (Σ) и согласованный фильтр для одиночного прямоугольного импульса длительности t_0 (СФО). Временные диаграммы, поясняющие работу фильтра, изображены на рис. 9, б. В описанной схеме регистр сдвига можно заменить линией задержки с отводами. С помощью линии задержки с отводами, блока весовых коэффициентов и сумматора можно построить схему СФ для сигнала с ЛЧМ.

6. Обнаружение радиосигналов

Как указывалось ранее, задача обнаружения радиосигналов характерна для всех РТС и предшествует всем частным задачам оптимального приема, так как, прежде чем извлечь или воспроизвести информацию из принятого радиосигнала, необходимо однозначно ответить на вопрос, присутствует ли в момент наблюдения полезный сигнал на входе приемника или отсутствует.

Бинарный характер задачи обнаружения связан с наличием на входе приемника аддитивного шума. Обнаружение радиосигнала может быть простым и сложным. При простом обнаружении, помимо априорных данных о радиосигна-

ле и шуме, известны возможные моменты времени присутствия полезного сигнала в принимаемой смеси. Сложное обнаружение отличается необходимостью оценки временного положения радиосигнала.



б)

Рис. 9

Далее мы будем рассматривать простое обнаружение, а вопросы оценки временного положения радиосигнала являются предметом отдельного обсуждения. Ниже рассматриваются три случая обнаружения: обнаружение известного радиосигнала, обнаружение известного радиосигнала с неизвестной фазой, обнаружение радиосигнала с неизвестной фазой и флюктуирующей амплитудой.

6.1. Обнаружение известного (детерминированного) радиосигнала

Пусть принятая смесь

$$x(t) = \lambda S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (96)$$

где $n(t)$ – белый гауссов шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$,

$S(t)$ – полезный сигнал с известными параметрами, определяемый на интервале $[0, T]$.

Параметр λ неизвестен и может принимать одно из двух значений: $\lambda = 1$ (сигнал присутствует в смеси), $\lambda = 0$ (сигнал отсутствует в смеси). Считаем, что $S(t)$ и $n(t)$ – некоррелируемые процессы.

Для синтеза оптимальной структуры обнаружителя воспользуемся критерием максимума отношения правдоподобия (38)

$$A = \frac{F(1)}{F(0)}. \quad (97)$$

Отношение (97) будет, по крайней мере, не меньше единицы, если в принимаемой смеси присутствует сигнал $S(t)$.

Функционал правдоподобия при наличии сигнала $S(t)$ на входе приемника

$$F(1) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t)]^2 dt \right]. \quad (98)$$

Функционал правдоподобия при присутствии на входе приемника только шума ($\lambda = 0$)

$$F(0) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (99)$$

Отношение функционалов правдоподобия (98) и (99)

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t)]^2 dt\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right]} = \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t) dt\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t) dt\right] \cdot \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \geq h_0,$$

где $E = \int_0^T S^2(t) dt$ – энергия сигнала,

h_0 – порог, относительно которого оценивается величина отношения.

Прологарифмируем обе части выражения (100)

$$\int_0^T x(t)S(t)dt \geq h,$$

где порог $h = N_0 / 2[F / N_0 + \ln h_0]$.

Структурная схема оптимального обнаружителя приведена на рис. 10.

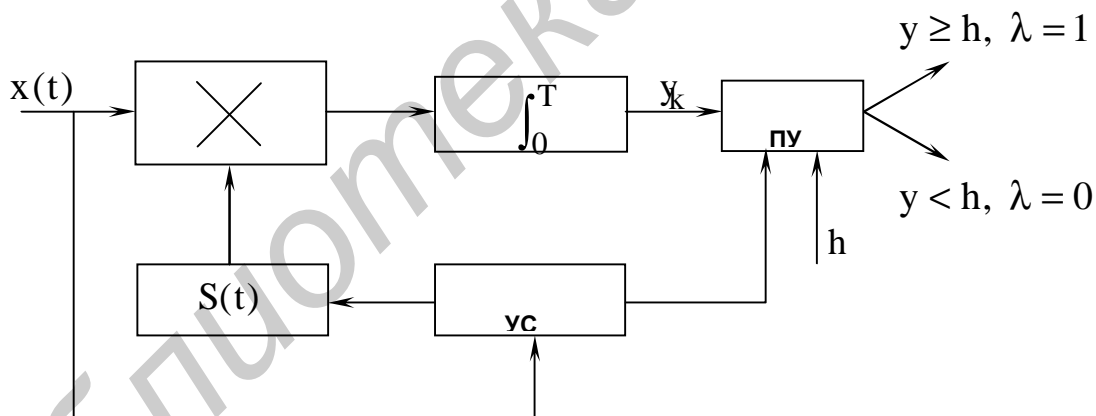


Рис. 10

Из рис. 10 и выражения (101) следует, что оптимальная процедура обнаружения сигнала состоит в вычислении функции взаимной корреляции между входной смесью $x(t)$ и опорным сигналом $S(t)$ (который является копией переданного сигнала), сравнении полученного значения с порогом h в пороговом устройстве (ПУ) в момент времени, определяемый устройством синхронизации

(УС). Если величина Y на выходе интегратора (\int_0^T) не меньше порога h , то принимается решение о наличии полезного сигнала на входе приемника, в противном случае – о его отсутствии.

Для простоты анализа будем считать коэффициент отношения полезного

сигнала на входе к опорному равным 1, коэффициент передачи перемножителя – также равным 1.

Величина

$$y = \int_0^T x(t)S(t)dt = \int_0^T S^2(t)dt + \int_0^T n(t)S(t)dt = y_c + y_n \quad (102)$$

состоит из полезной составляющей и шумовой.

Полезная составляющая y_c в момент сравнения с порогом численно равна энергии сигнала, что соответствует пику автокорреляционной функции входного сигнала $S(t)$. Дисперсия шумовой составляющей y_n , аналогично преобразованиям (72), равна

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (103)$$

Отношение сигнал/шум на входе порогового устройства

$$q = \frac{P_c}{\sigma_n^2} = \frac{E^2}{N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0}. \quad (104)$$

Таким образом, корреляционный приемник в обнаружителе обеспечивает на своем выходе, как и согласованный фильтр, пиковое значение полезной составляющей, пропорциональное энергии сигнала E , и максимальное отношение сигнал/шум, равное $2E/N_0$. Отсюда вытекает структура обнаружителя известного сигнала на СФ, которая приведена на рис. 11.

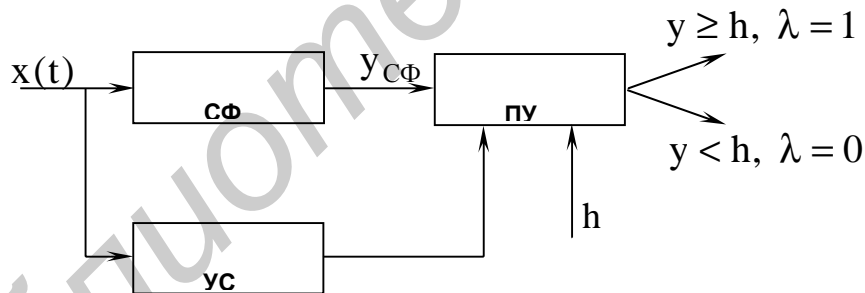


Рис. 11

Отличительной особенностью обнаружителя на СФ (рис. 10 и 11) является отсутствие необходимости в опорном генераторе. По помехоустойчивости обе схемы равнозначны. При сложности построения СФ выбирают корреляционный вариант обнаружителя. На рис. 12 приведены формы напряжений на выходе коррелятора и СФ для прямоугольного импульса.

Определим количественные характеристики качества обнаружения, воспользовавшись критерием Неймана–Пирсона. Так как смесь на входе приемника подчиняется нормальному закону распределения, а операции в обнаружителе линейные, то величина y также будет описываться нормальным законом распределения. Найдем характеристики законов распределения величины y для двух возможных случаев.

Пусть $\lambda = 1$, тогда

$$y_1 = \int_0^T [S(t) + n(t)] \cdot S(t) dt,$$

$$m_1 = \langle y_1 \rangle = \int_0^T S^2(t) dt + \int_0^T \langle n(t) \cdot S(t) \rangle dt = E, \quad \sigma_1^2 = \langle (y_1 - m_1)^2 \rangle = \frac{EN_0}{2}. \quad (105)$$

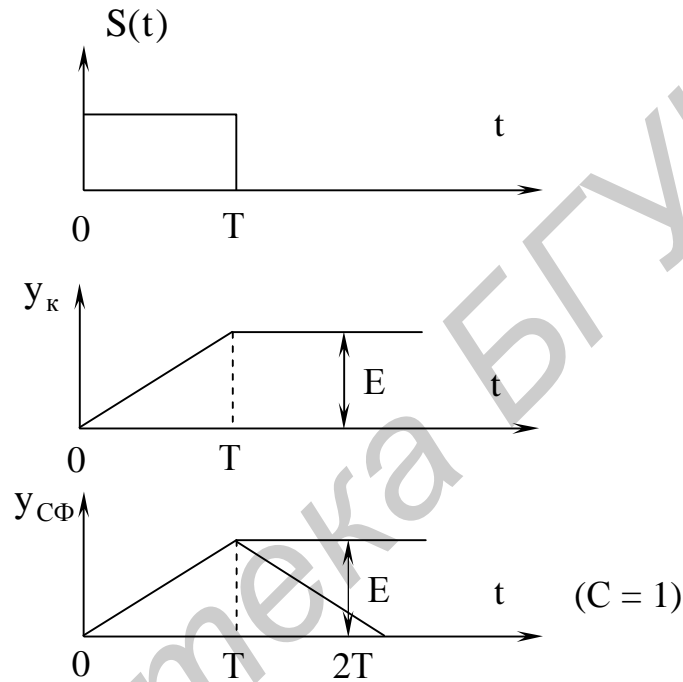


Рис. 12

При $I = 0$

$$y_0 = \int_0^T n(t)S(t) dt, \quad m_0 = \langle y_0 \rangle = 0, \quad \sigma_0^2 = \langle (y_0 - m_0)^2 \rangle = \frac{EN_0}{2} = \sigma_1^2 = \sigma^2. \quad (106)$$

Плотности распределения случайных величин y_1 и y_0 в соответствии с (105) и (106) имеют вид

$$P(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2}\right], \quad P(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (107)$$

На рис. 13 приведены графики распределений (107).

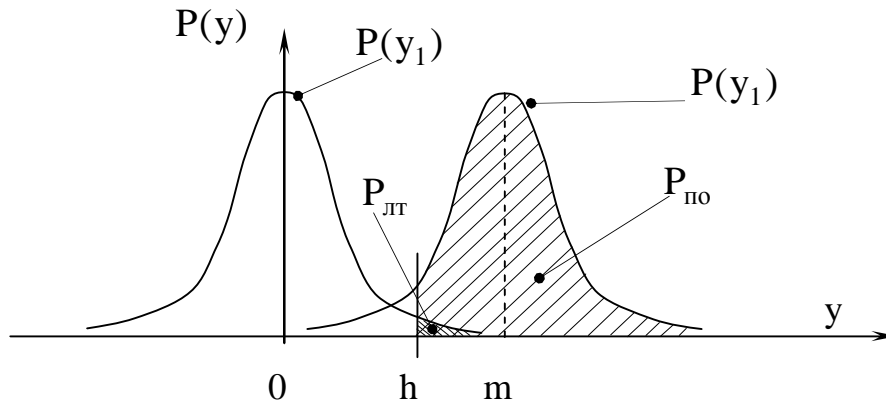


Рис. 13

Для выбранного порога h вероятность правильного обнаружения составит

$$P_{\text{по}} = P(1/1) = \int_h^{\infty} P(y_1) dy_1 = 1 - \Phi\left(\frac{h - E}{\sqrt{EN_0/2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{2h}{N_0} - \frac{2E}{N_0}}{\sqrt{2E/N_0}}\right), \quad (108)$$

а вероятность ложной тревоги – соответственно

$$P_{\text{лт}} = P(1/0) = \int_h^{\infty} P(y_0) dy_0 = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{EN_0/2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{2h}{N_0}}{\sqrt{2E/N_0}}\right). \quad (109)$$

В (108) и (109) функция $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется интегралом вероятности.

Основные свойства интеграла вероятности:

- а) $\Phi(\infty) = 1$,
- б) $\Phi(0) = 0,5$,
- в) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

На рис. 14 изображены зависимости $P_{\text{по}} = f(2E/N_0, P_{\text{лт}})$, которые называются характеристиками обнаружения.

С помощью характеристик обнаружения по заданным $P_{\text{л}}^{\text{т}}$ и $P_{\text{о}}^{\text{д}}$ можно определить необходимое отношение сигнал/шум $2E/N_0$ на входе порогового устройства и величину порога h . Часто в литературе встречается понятие «пороговый сигнал». Это сигнал, энергия которого при заданной $P_{\text{лт}}$ обеспечивает обнаружение требуемой $P_{\text{по}}$. Например, при $P_{\text{лт}} = 0,1$ и требуемой $P_{\text{по}} = 0,8$ (рис. 14) пороговому сигналу соответствует $q = 2$.

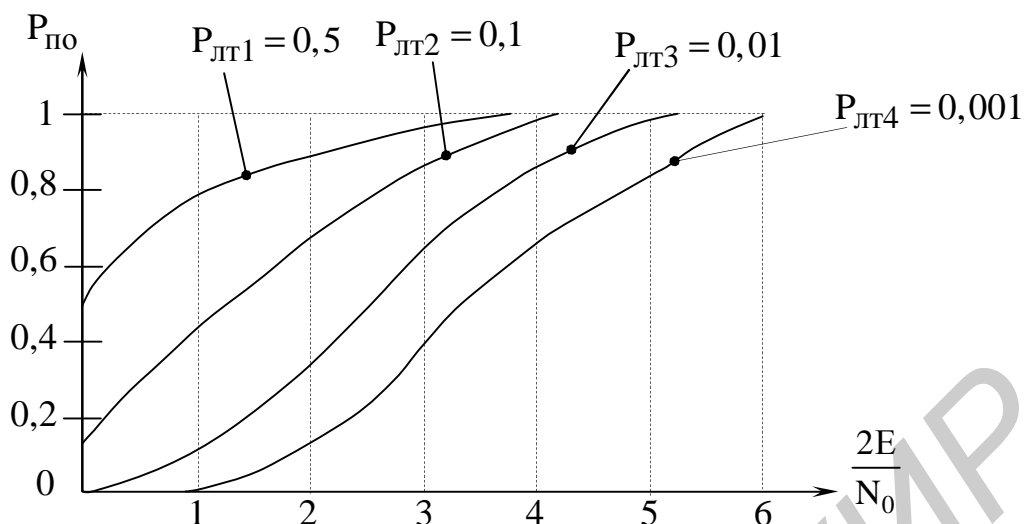


Рис. 14

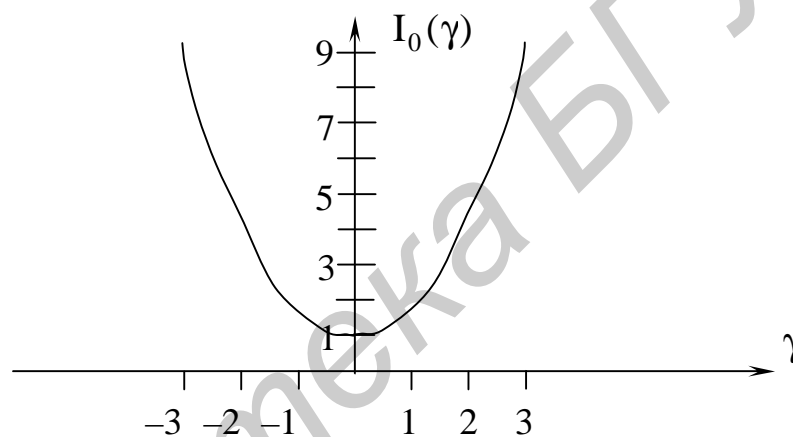


Рис. 15

Основные выводы:

1. Качество обнаружения известного сигнала с заданным $P_{по}$ и $P_{лт}$ не зависит от формы сигнала и определяется только максимальным отношением сигнал/шум на выходе коррелятора или согласованного фильтра.
2. Полученные количественные оценки качества обнаружения следует рассматривать как теоретический верхний предел (потенциальные возможности).
3. Синтезирование структуры оптимальных обнаружителей известных сигналов можно рассматривать как оптимальные когерентные приемные устройства.

6.2. Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой

На практике начальная фаза принимаемого сигнала часто заранее не известна, поэтому рассмотрим этот случай с учетом априорных сведений о фазе.

Смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda \cdot S(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (110)$$

где $S(t, \varphi) = S_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $F_{\Gamma}(\omega) = N_0/2$,

$S_0(t)$ – известная огибающая,

φ – случайная начальная фаза,

λ по-прежнему принимает значения 1 или 0,

$F_{\Gamma}(\omega)$ – спектральная плотность шума.

Будем считать начальную фазу равномерно распределенной, т.е.

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (111)$$

Тогда отношение правдоподобия запишется аналогично (100)

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi) &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \varphi)]^2 dt\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right]} = \exp\left\{-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) S_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt\right\} = \\ &= \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \left(\cos \varphi \int_0^T x(t) S_0(t) \cos \omega_0 t dt - \sin \varphi \int_0^T x(t) S_0(t) \sin \omega_0 t dt\right)\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} Z \cos(\varphi + \psi)\right]. \end{aligned} \quad (112)$$

При получении конечного выражения в (112) введены обозначения:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \psi = \arctg Y/X,$$

$$X = \int_0^T x(t) S_0(t) \cos \omega_0 t dt,$$

$$Y = \int_0^T x(t) S_0(t) \sin \omega_0 t dt. \quad (113)$$

С физической точки зрения Z – огибающая функции взаимной корреляции входной смеси с копией входного полезного сигнала.

Безусловное отношение правдоподобия

$$\Lambda = \int_0^{2\pi} P(\varphi)\Lambda(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{E+2}{N_0}Z\cos(\varphi+\psi)\right]d\varphi =$$

$$= \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2Z}{N_0}\cos(\varphi+\psi)\right]d\varphi = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right),$$
(114)

где $I_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\gamma\cos(\varphi+\psi)} d\varphi$ – модифицированная функция Бесселя первого рода

нулевого порядка. На рис. 15 представлен график этой функции, являющейся монотонно возрастающей функцией своего аргумента. При $\gamma > 1$ ее можно представить первым членом разложения в экспоненциальный ряд

$$I_0(\gamma) \approx \frac{e^\gamma}{\sqrt{2\pi\gamma}} \left[1 + \frac{1}{8\gamma} + \frac{9}{128\gamma^2} + \dots \right].$$
(115)

Из (114) следует алгоритм оптимального обнаружения сигнала со случайной начальной фазой

$$\exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \geq h'_0.$$
(116)

Ввиду монотонности функции $I_0(\gamma)$ это правило эквивалентно следующему:

$$\ln I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \geq \frac{E}{N_0} + \ln h'_0.$$
(117)

Обычно аргумент модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка для случаев, имеющих практическое значение больше единицы, поэтому, если воспользоваться разложением (115), получим правило сравнения огибающей z с некоторым порогом h :

$$Z \geq h,$$
(118)

которое далее используется для построения структур оптимальных обнаружителей.

В соответствии с правилом (118) и соотношениями (113) на рис. 16 приведена структурная схема оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой.

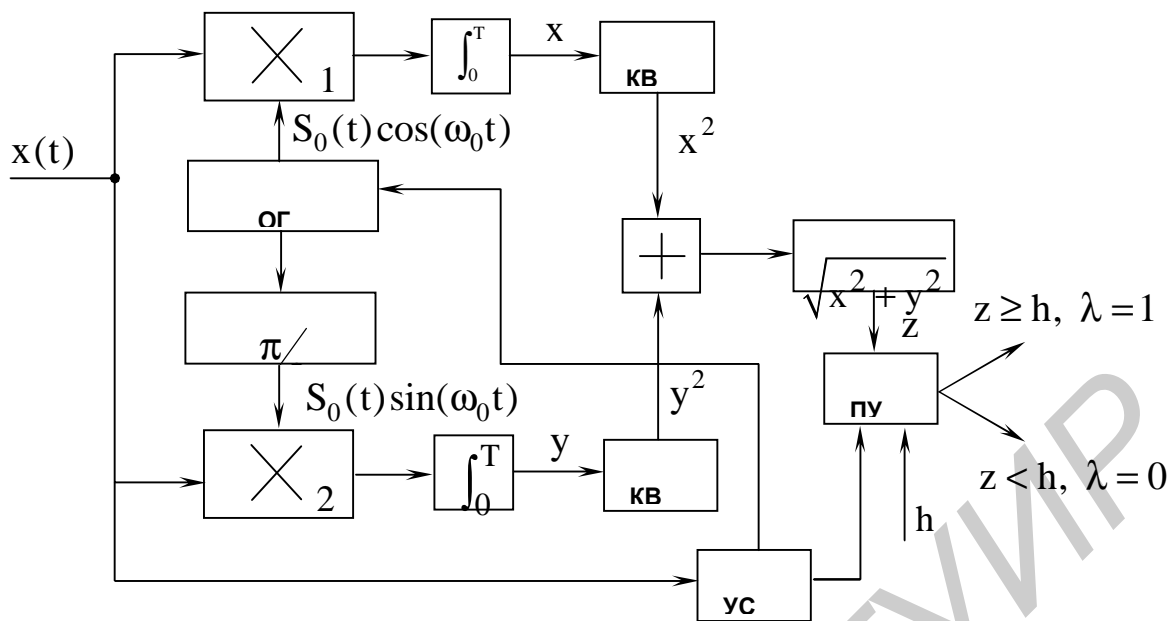


Рис. 16

Схема состоит из двух корреляционных квадратурных каналов как естественного результата при незнании начальной фазы сигнала.

Шумы в каналах, будучи взаимно независимыми, суммируются в сумматоре по мощности, вдвое ухудшая отношение сигнал/шум на его выходе.

Таким образом, снижение помехоустойчивости приема является платой за случайность начальной фазы радиосигнала. Рассматриваемый случай обнаружения (рис. 16) – классический случай оптимального некогерентного приема.

На рис. 17 приведена другая структурная реализация оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестной фазой – на основе СФ.

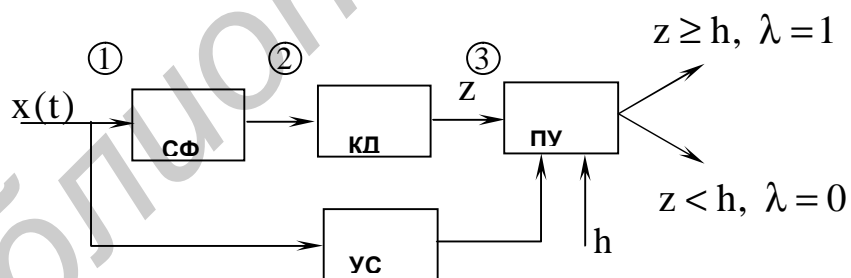


Рис. 17

Импульсный отклик фильтра $g(t) = C \cdot S(T - t, \varphi_0)$ согласован с радиосигналом $S(t)$, имеющим некоторое фиксированное значение φ_0 . Огибающая корреляционной функции Z входной смеси $x(t)$ выделяется на входе детектора огибающей (ДО). Потенциальные возможности структур рис. 16 и рис. 17 при количественной оценке качества, обнаружения одинаковы.

В некоторых научных источниках [4] приводятся другие модификации обнаружителей радиосигналов с неизвестными фазами. Интерес представляет корреляционно-фильтровая структура обнаружителя (рис. 18), которая содержит, по-

мимо обязательных узлов (УС, ПУ), перемножитель (х), радиointегратор (РИ) на частоте $f_{\text{пр}}(\omega)$, линейный детектор огибающей (ЛДО).

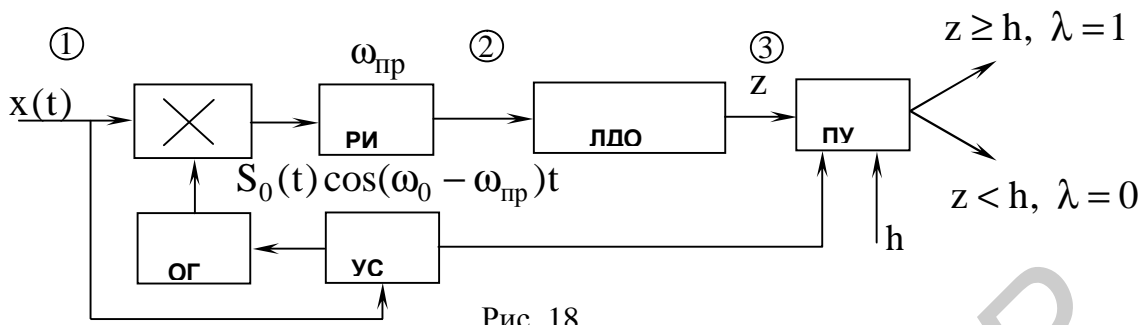


Рис. 18

Особенность схемы (рис. 18) состоит в том, что в перемножителе принятая смесь $x(t)$ умножается на копию полезного сигнала, у которого несущая частота относительно несущей частоты полезного сигнала сдвинута на величину $\omega_{\text{пр}}$. За перемножителем следует идеальный радиointегратор, настроенный на частоту $\omega_{\text{пр}}$ (колебательный контур с малым коэффициентом затухания). Колебания с выхода радиointегратора детектируются линейным детектором огибающей, значение выходного напряжения которого при $t = T$ с точностью до постоянного коэффициента равно z . На рис. 19 изображены эпюры напряжений на отдельных элементах схем обнаружителей фильтрового («а») и корреляционно-фильтрового («б») типов для прямоугольного радиосигнала.

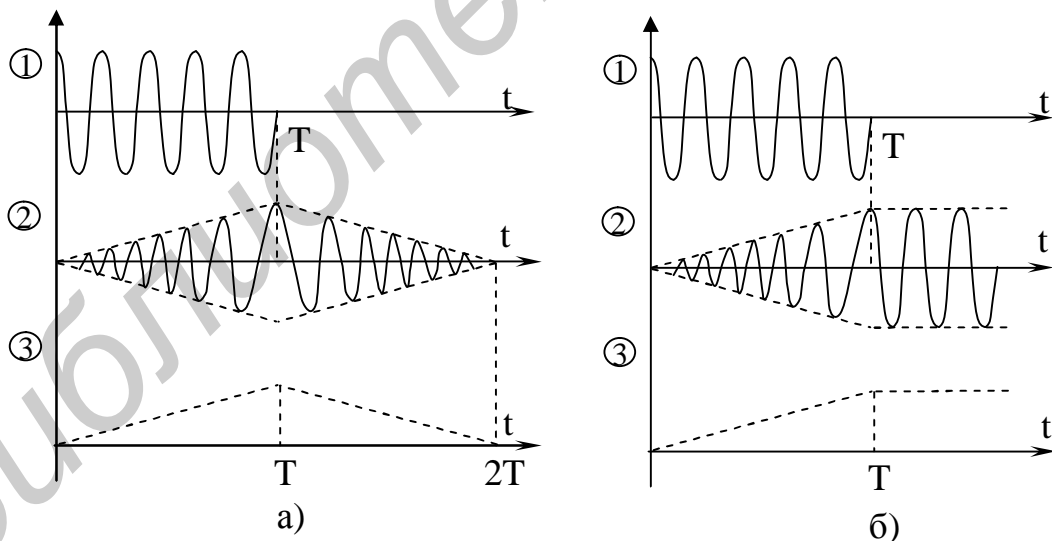


Рис. 19

Расчеты показывают, что потенциальная помехоустойчивость корреляционно-фильтрового обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой мало отличается от потенциальной помехоустойчивости фильтрового (корреляционного) обнаружителя.

Найдем соотношения для построения характеристик обнаружения.

Считаем фазу φ принимаемой смеси (110) постоянной, и в силу линейности операций, выполняемых в обнаружителе, случайные величины X и Y в выраже-

нии (113) являются нормально распределенными с одинаковыми дисперсиями

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2 = N_0 E / 2. \quad (119)$$

Условные математические ожидания их соответственно равны

$$m_x = \langle X \rangle = E \cdot \cos \varphi; \quad m_y = \langle Y \rangle = E \cdot \sin \varphi. \quad (120)$$

Кроме того, случайные величины X и Y взаимно независимы, поэтому при наличии в смеси (110) полезного сигнала случайная величина Z подчиняется обобщенному закону Релея (закону Райса)

$$P_1(z) = \frac{2Z}{N_0 E} \exp\left(-\frac{Z^2 + E^2}{N_0 E}\right) \cdot I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right), \quad Z \geq 0, \quad (121)$$

где $I_0(2z/N_0)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Если в принимаемой аддитивной смеси (110) отсутствует полезный сигнал ($S(t, \varphi) = 0$), то независимые гауссовские случайные величины X и Y имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии, а случайная величина Z описывается релеевской плотностью распределения

$$P_0(Z) = \frac{2Z}{N_0 E} \exp\left(-\frac{Z^2}{N_0 E}\right), \quad Z \geq 0. \quad (122)$$

На рис. 20 изображены графики распределений (121) и (122).

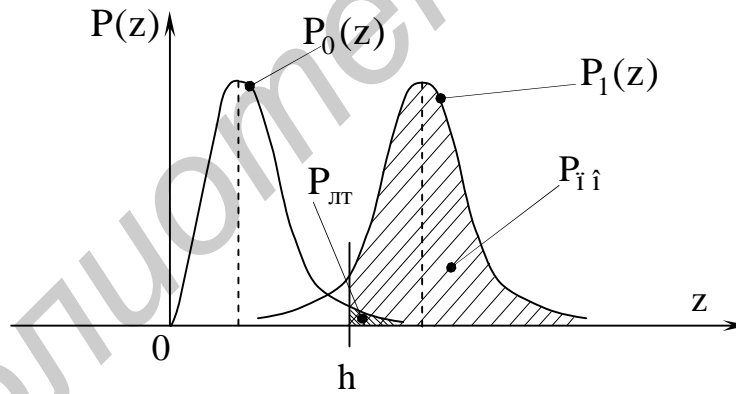


Рис. 20

Вероятность ложной тревоги

$$P_{лт} = \int_h^{\infty} P_0(Z) dZ = \int_{h/\sqrt{N_0 E/2}}^{\infty} V \exp\left(-\frac{V^2}{2}\right) dV = e^{-\frac{h^2}{N_0 E}}. \quad (123)$$

Вероятность правильного обнаружения

$$P_{\text{по}} = \int_h^\infty P_1(Z) dz = \int_h^\infty V \exp\left[-\frac{V^2 + 2E/N_0}{2}\right] I_0\left(V \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) dV = Q\left(\frac{h}{\sqrt{EN_0/2}}, \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

С учетом (115) имеем

$$P_{\text{пр}} = \int_h^\infty V \exp\left[-\frac{V^2 + 2E/N_0}{2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2E/N_0}} \exp\left[V \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right] dV \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty V \exp\left[-\frac{\left(V^2 - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)^2}{2}\right] dV = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{E-h}{\sqrt{EN_0/2}}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{E-h}{\sqrt{EN_0/2}}\right) \quad (124)$$

где $Q(\gamma, \delta)$ – табулированная функция Маркума (интегральное распределение Релея–Райса).

Из выражений (123) и (124) вытекает соотношение

$$P_{\text{по}} = \Phi\left(\sqrt{2q} - \sqrt{2 \ln \frac{1}{P_{\text{лт}}}}\right), \quad (125)$$

где $q = \frac{E}{N_0}$ – отношение сигнал/шум по мощности на входе обнаружителя.

На рис. 21 представлены результаты расчетов по формулам (123), (124).

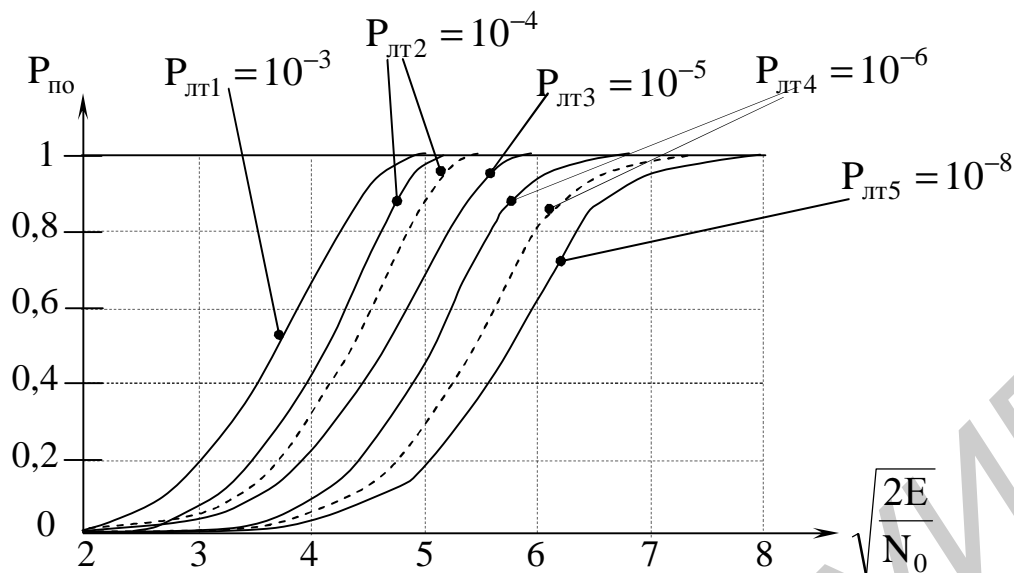


Рис. 21

Для сравнения пунктирными линиями нанесены зависимости для $P_{лг2} = 10^{-4}$ и $P_{лг3} = 10^{-6}$ при обнаружении известного сигнала. Анализ показывает, что проигрыш порогового значения отношения сигнал/шум по мощности обнаружителя неизвестного радиосигнала обнаружителю известного сигнала составляет 1,1–1,3.

Основные выводы:

1. Платой за незнание начальной фазы при обнаружении радиосигнала является усложнение структуры обнаружителя и увеличение энергии сигнала.
2. Структуры оптимальных обнаружителей радиосигналов с неизвестными начальными фазами можно рассматривать как некогерентный оптимальный прием.

6.3. Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой

В большинстве практических применений при обнаружении радиосигнала, помимо неизвестной начальной фазы, флюктуирует его амплитуда. Рассмотрим оптимальное обнаружение на фоне белого гауссовского шума радиосигнала с неизвестной начальной фазой и случайной амплитудой

$$x(t) = \lambda S(t, \varphi, A) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{126}$$

где $S(t, \varphi, A) = A_0 S_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi]$ – обнаруживаемый сигнал с неизвестными амплитудой A и фазой j ,

$n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $N_0/2$.

Будем считать амплитуду и фазу независимыми случайными величинами с релейевским и равномерным законом распределения плотностей вероятности

$$P(A) = 2A \exp(-A^2), \quad P(\varphi) = 1/2,$$

$$P(A, \varphi) = P(A) \cdot P(\varphi).$$

С учетом выражения (112) условное отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda(A, \varphi) &= \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} + \frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) S_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} + \frac{2AZ}{N_0} \cos(\varphi + \psi) \right], \end{aligned} \quad (127)$$

где $E_0 = \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt$ – средняя энергия сигнала.

После усреднения по φ имеем

$$\Lambda(A) = \int_0^{2\pi} \Lambda(A, \varphi) P(\varphi) d\varphi = \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right). \quad (128)$$

Безусловное отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(A) P(A) dA = \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{N_0} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right) 2A e^{-A^2} dA = \\ &= 2 \int_0^{\infty} I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right) \exp \left[-\left(1 + \frac{E_0}{N_0} \right) A^2 \right] A dA. \end{aligned} \quad (129)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} I_0(\mu, x) e^{-\nu x^2} x dx = \frac{1}{2\nu} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}},$$

то (129) принимает вид

$$\Lambda = \frac{N_0}{N_0 + E_0} \exp \left[\frac{Z^2}{N_0(N_0 + E_0)} \right]. \quad (130)$$

Алгоритм обнаружения

$$\frac{N_0}{N_0 + E_0} \exp \left[\frac{Z^2}{N_0(N_0 + E_0)} \right] \geq h_0$$

или

$$Z^2 \geq N_0 \cdot (N_0 + E_0) \ln \left[h_0 \left(1 + \frac{E_0}{N_0} \right) \right] = h \quad (131)$$

сводится к вычислению величины Z^2 (соотношения (113)), являющейся квадратом огибающей функции взаимной корреляции принимаемой смеси (125) и

опорного сигнала $S_0(t)$, и ее сравнения с порогом h . Следовательно, структура оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой (рис. 22) отличается от структуры рис. 16 отсутствием устройства вычисления квадратного корня из суммы квадратурных составляющих $X^2 + Y^2$.

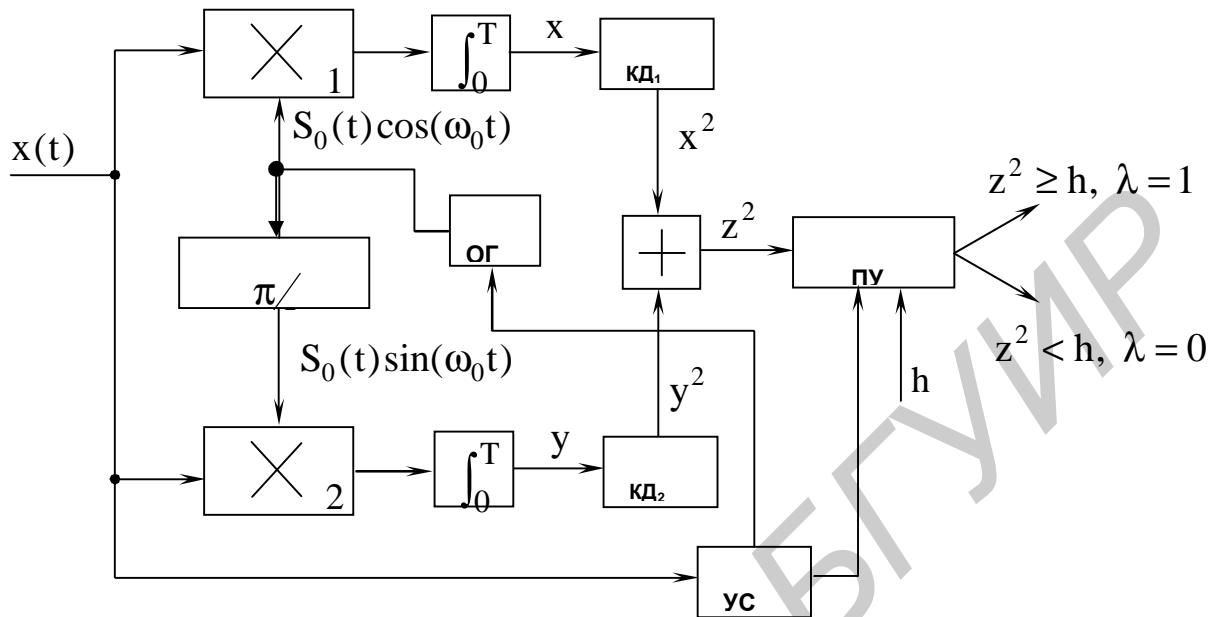


Рис. 22

В структуре обнаружителя радиосигнала со случайными начальной фазой и амплитудой на СФ (рис. 23) вместо линейного детектора применяется квадратичный детектор (КД).

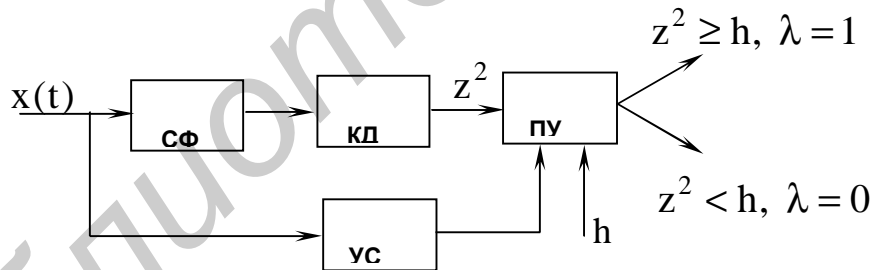


Рис. 23

При анализе характеристик обнаружения структур рис. 22 и рис. 23 следует иметь в виду, что сигнальные компоненты, как и шумовые, величин X и Y являются нормальными независимыми случайными величинами. Поэтому обнаружение радиосигнала с неизвестными начальными фазой и амплитудой на фоне аддитивного белого шума можно рассматривать как обнаружение известного сигнала при совместном действии модулирующего и аддитивного шумов.

Если $X = X_c + X_{ш}$, а $Y = Y_c + Y_{ш}$, то математические ожидания сигнальных компонент $\langle X_c \rangle = \langle AE_0 \cos \varphi \rangle = E_0 \langle A \rangle \langle \cos \varphi \rangle = 0$,
 $\langle Y_c \rangle = \langle AE_0 \sin \varphi \rangle = E_0 \langle A \rangle \langle \sin \varphi \rangle = 0$. (132)

$$\text{А их дисперсии } \sigma_{c_x}^2 = \sigma_{c_y}^2 = \sigma^2 = \langle Y_c^2 \rangle = \langle X_c^2 \rangle = E_0^2 \langle A^2 \rangle \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{E_0^2}{2}. \quad (133)$$

Дисперсия аддитивной смеси сигнала и шума на выходе коррелятора

$$\sigma_{c_{ш}}^2 = \sigma_{ш}^2 + \sigma_c^2 = \sigma_{ш}^2 (1+q), \quad (134)$$

где $\sigma_{ш}^2 = \frac{N_0 E_0}{2}$ – дисперсия шумовой компоненты на выходе коррелятора,

$q = \sigma_c^2 / \sigma_{ш}^2 = E_0 / N_0$ – отношение сигнал/шум по мощности на выходе коррелятора. Отсюда очевидность (132) закона распределения плотности вероятности величины z^2 , близкого к экспоненциальному:

$$P_1(z^2) = \frac{1}{(2\sigma_{c_{ш}}^2)} \exp\left[-\frac{z^2}{(\sigma_{c_{ш}}^2)}\right] \quad (135)$$

для смеси сигнала с шумом и

$$P_0(z^2) = \frac{1}{(2\sigma_{ш}^2)} \exp\left[-\frac{z^2}{(\sigma_{ш}^2)}\right] \quad (136)$$

для чисто шумового процесса на входе обнаружителя.

На рис. 24 приведены зависимости, рассчитанные по формулам (135) и (136) для $q = 3$.

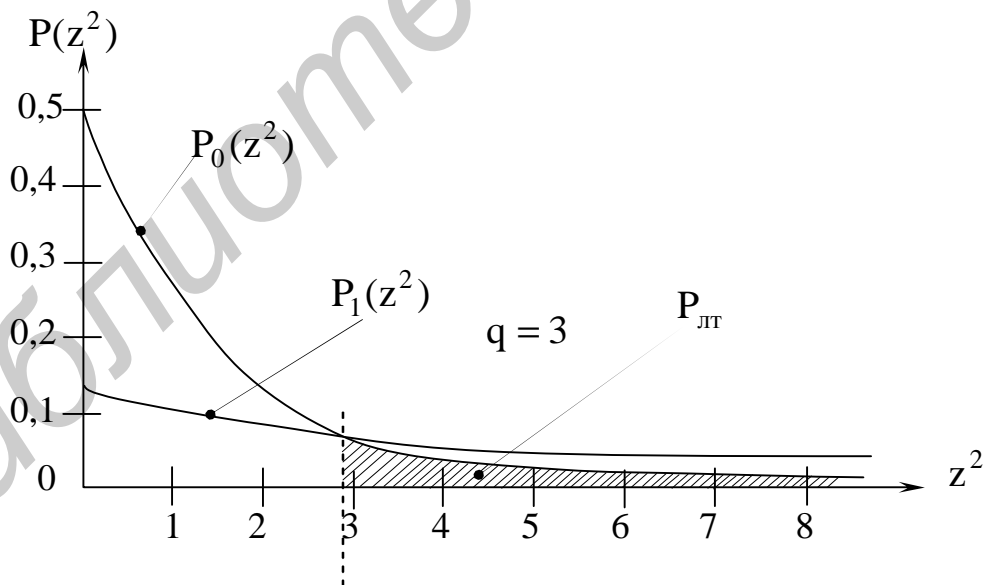


Рис. 24

Вероятность правильного обнаружения

$$P_{\hat{1}} = \int_h^\infty P_1(z^2) dz = \int_h^\infty \frac{1}{2\sigma_{c_{ш}}^2} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_{c_{ш}}^2}\right] dz = \exp\left[-\frac{h}{2\sigma_{c_{ш}}^2}\right] = \exp\left[-\frac{h}{N_0 E_0 (1+q)}\right]. \quad (137)$$

Вероятность ложной тревоги

$$P_{лт} = \int_h^{\infty} P_0(z^2) dz = \int_h^{\infty} \frac{1}{2\sigma_{ш}^2} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_{ш}^2}\right] dz = \exp\left[-\frac{h}{2\sigma_{ш}^2}\right] = \exp\left[-\frac{h}{N_0 E_0}\right]. \quad (138)$$

Из (138) и (139) следует

$$P_{по} = P_{лт}^{\frac{1}{1+q}}, \quad (139)$$

откуда пороговое значение отношения сигнал/шум равно

$$q_{п} = \frac{\lg P_{лт}}{\lg P_{по}} - 1. \quad (140)$$

На рис. 25 приведено семейство характеристик обнаружения сигналов со случайной фазой и релейевскими флуктуациями амплитуды.

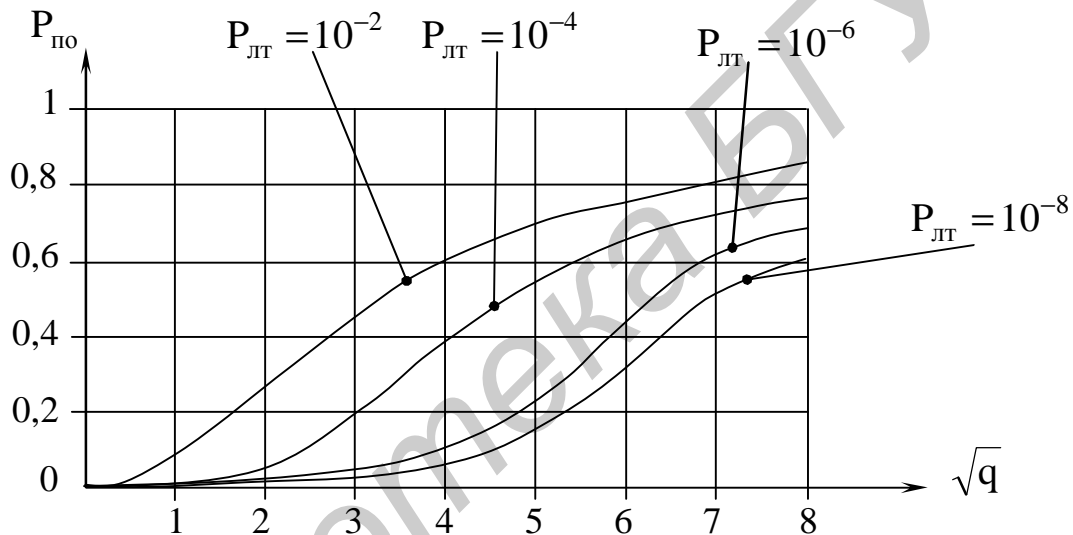


Рис. 25

Их особенность состоит в том, что с ростом отношения сигнал/шум вероятность правильного обнаружения сначала возрастает быстро, ориентировочно до $P_{по} = 0,6$, а затем этот процесс в области больших отношений сигнал/шум замедляется, так как изменяются лишь параметры распределения величины Z^2 (ее дисперсии), растягивая распределение по оси абсцисс.

Энергетические потери в различных оптимальных обнаружителях радиосигналов удобно проследить на характеристиках обнаружения рис. 26, где зависимости 1, 2 и 3 соответственно отражают обнаружения известного сигнала, сигнала с неизвестной начальной фазой и сигнала с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой, построенных для случая $P_{лт} = 10^{-4}$. Например, для обеспечения вероятности правильного обнаружения $P_{по} = 0,9$ относительно приема известного сигнала требуется в 1,2 раза увеличить энергию сигнала, если неизвестна его фаза, и в 3,44 раза – если неизвестны фаза и амплитуда обнаруживаемого сигнала.

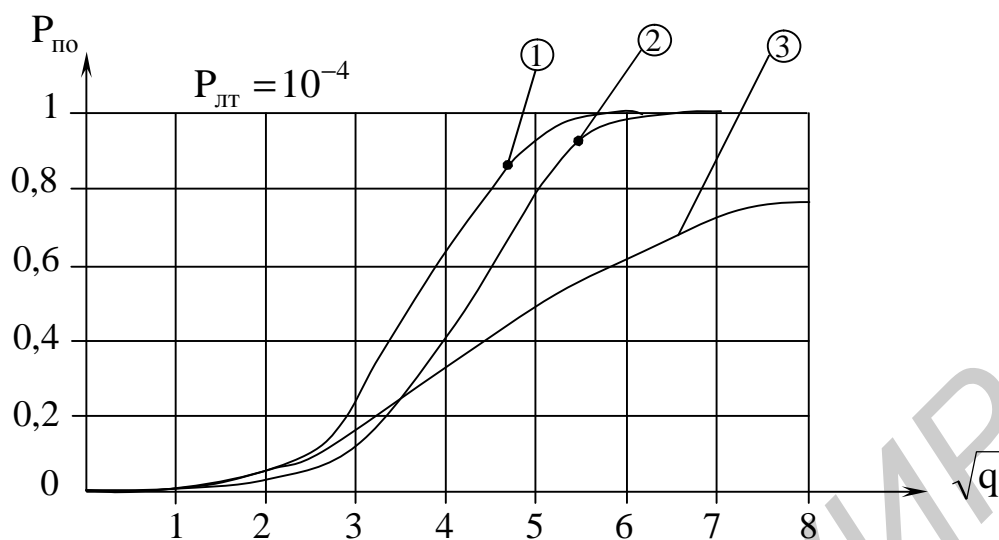


Рис. 26

Основные выводы:

1. Незнание фазы и амплитуды обнаруживаемого радиосигнала приводит к существенным энергетическим потерям, особенно при $P_{по} > 0,9$.

2. Структура оптимального обнаружителя радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой по сложности не отличается от структуры обнаружителя радиосигнала с неизвестной начальной фазой и характерна для оптимального некогерентного приема радиосигнала, прошедшего через реальный канал – канал с переменными параметрами.

В инженерной практике всегда есть потребность в простых, удобных соотношениях, позволяющих с минимальными временными затратами производить оценку параметров обнаружения. В частности, это касается определения значений пороговых отношений сигнал/шум. Для обнаружения радиосигнала с неизвестными начальной фазой и амплитудой пороговое отношение сигнал/шум ($q_{п}$) определяется формулой (140).

Пороговые значения отношения сигнал/шум в обнаружителях радиосигнала с известными параметрами и неизвестной начальной фазой находят в результате решения системы двух уравнений (108) и (109) или (123) и (124). В [5] предложены инженерные формулы для оценки этого параметра, погрешность которых не превосходит 15 %, если $P_{по} \geq 0,9$, $P_{лт} \leq 0,1$.

Пороговое отношение сигнал/шум в обнаружителях известного сигнала

$$q_{п} \cong 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{лт}} - 1,4} + \sqrt{\ln \frac{1}{(1 - P_{по})} - 1,4} \right)^2. \quad (141)$$

Пороговое отношение сигнал/шум в обнаружителях сигнала с неизвестной начальной фазой

$$q_{\Pi} \cong 2 \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}} + \sqrt{\ln \frac{1}{(1 - P_{\text{ПО}})} - 1,4} \right)^2. \quad (142)$$

6.4. Обнаружение пакетов радиоимпульсов

В импульсных радиолокационных системах задачу обнаружения решают по приему пакета N радиоимпульсов с периодом T_{Π} , отраженных от наблюдаемого объекта за время радиоконтакта с ним. Для этого случая модель действующего полезного сигнала

$$S(t, \{A_j\}, \{\varphi_j\}) = \sum_{i=1}^N A_i S_0(t - (i-1)T_{\Pi}) \cos[\omega_0 t + \varphi_i], \quad (143)$$

$0 \leq t \leq NT_{\Pi}$, $j = \overline{1, N}$, $\{A_j\}$ и $\{\varphi_j\}$ – случайные значения амплитуд и фаз. Если фазы радиоимпульсов пакета одинаковы ($\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \varphi$) или изменяются от импульса к импульсу по заранее известному закону, то такой пакет называется когерентным.

Если начальные фазы радиоимпульсов пакета случайны и независимы, пакет называется некогерентным.

6.4.1. Обнаружение когерентного пакета

Аддитивная смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda S[t, \{A_j\}, \varphi] + n(t), \quad 0 \leq t \leq NT_{\Pi}, \quad \lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

$$\text{где } S[t, \{A_j\}, \varphi] = \sum_{i=1}^N A_i S_0(t - (i-1)T_{\Pi}) \cos[\omega_0 t + \varphi], \quad (144)$$

$n(t)$ – белый гауссовский шум с $F_{\Pi}(\omega) = N_0/2$.

В общем случае для всех импульсов пакета начальная фаза может быть случайной и подчиняться равномерному закону распределения $P(\varphi) = 1/2\pi$, а для амплитуды $\{A_j\}$ – флуктуировать по релеевскому закону $P(A_j) = 2A_j \exp[-A_j^2]$. Воспользовавшись алгоритмом вычисления отношения правдоподобия, получим правило обнаружения когерентного пакета радиоимпульсов с неизвестной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой

$$Z^2 = \left[\sum_{i=1}^N x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^N y_i \right]^2 \geq h, \quad (145)$$

где $x_i = \int_0^T X(t) \cdot S_0[t - (i-1)T_{\Pi}] \cos \omega_0 t dt$,

$$y_i = \int_0^T X(t) \cdot S_0[t - (i-1)T_{\Pi}] \sin \omega_0 t dt.$$

Структурная схема обнаружителя приведена на рис. 27, в ней когерентный накопитель размещается между согласованным фильтром одиночного радиоимпульса (СФ) и квадратичным детектором (КД).

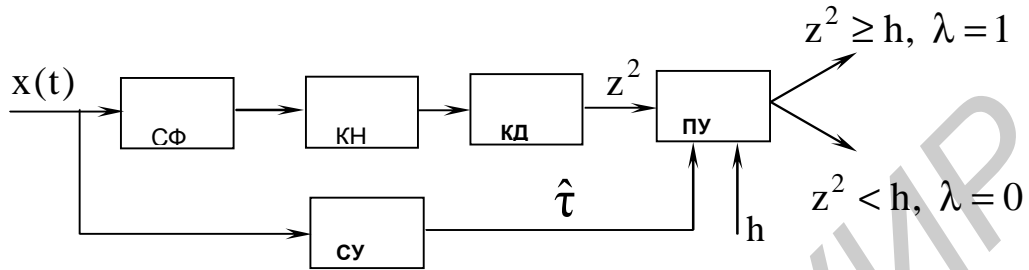


Рис. 27

Так как при когерентном суммировании амплитуда сигнальной составляющей увеличивается в N раз (учитывается энергия всего пакета), а в N раз увеличивается только дисперсия шума (значения складываемых шумовых составляющих некоррелированы), то выигрыш в отношении сигнал/шум по мощности на входе порогового устройства при обнаружении когерентного пакета радиоимпульсов возрастет в N раз по сравнению с обнаружением одиночного радиоимпульса. При построении характеристик обнаружителя это и нужно учесть. При обнаружении когерентного пакета радиоимпульсов с неизвестной начальной фазой в структуре рис. 28 вместо квадратичного детектора применяется линейный детектор, а в характеристиках обнаружения следует учесть увеличение отношения сигнал/шум в N раз.

На рис. 28 приведены структурные схемы накопителя на линии задержки (а) и многократного накопителя-рециркулятора (б), а также временные диаграммы (в), поясняющие процесс накопления. С целью упрощения временные диаграммы построены для пакета прямоугольных видеоимпульсов (нулевая несущая частота).

6.4.2. Обнаружение некогерентного пакета

Для общего случая аддитивная смесь на входе обнаружителя

$$x(t) = \lambda S[t, \{A_j\}, \{\varphi\}] + n(t), \quad 0 \leq t \leq NT_{\Pi}, \quad (146)$$

где
$$S[t, \{A_j\}, \{\varphi\}] = \sum_{i=1}^N A_i S_0[t - (i-1)T_{\Pi}] \cos[\omega_0 t + \varphi_i],$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

а фазы и амплитуды по-прежнему подчиняются равномерному и релеевскому за-

конам распределения соответственно.

Правило принятия решения для этого случая

$$Z^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2 \geq h,$$

где $z_i = x_i^2 + y_i^2$. (147)

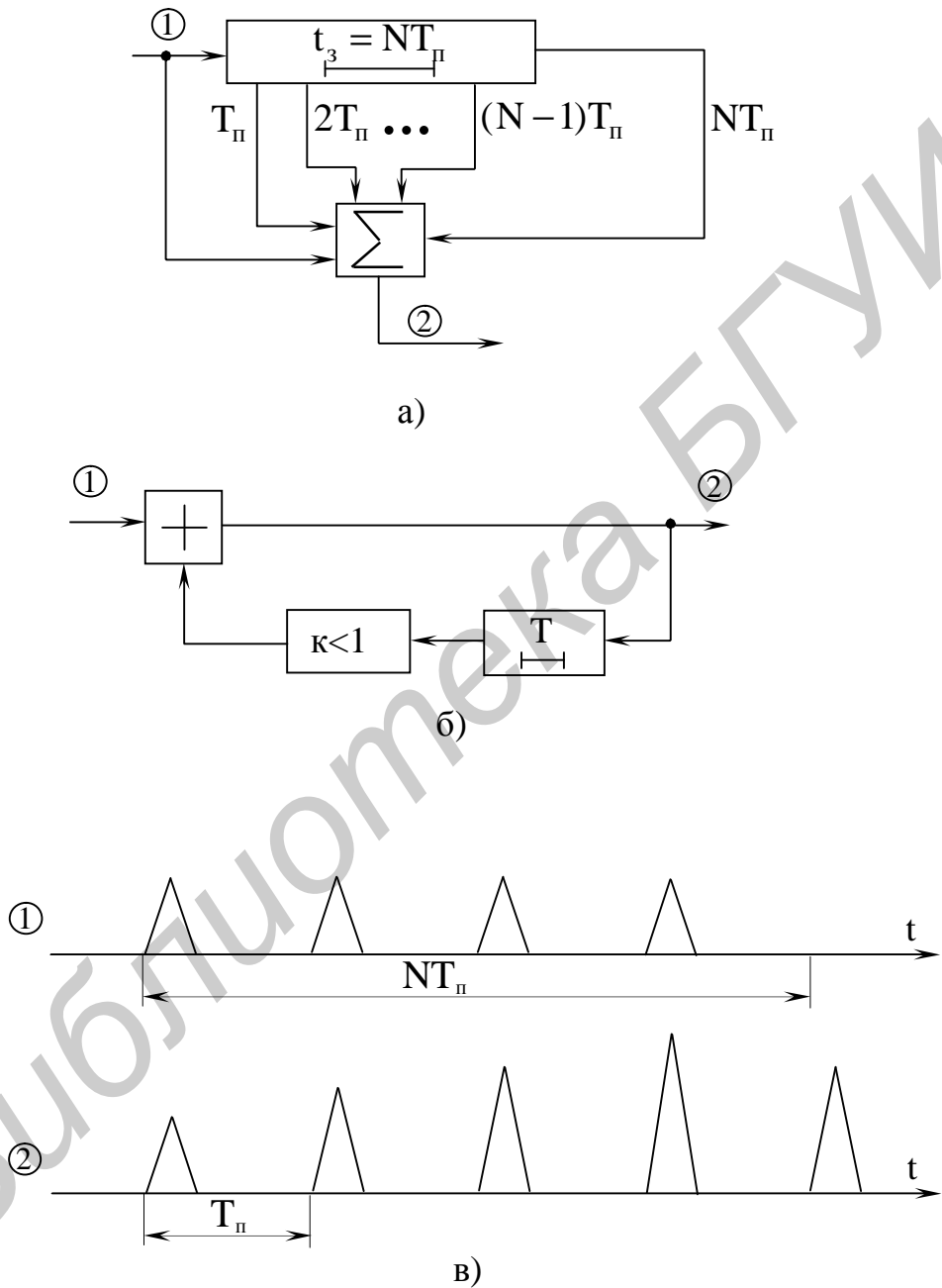


Рис. 28

Структурная схема (рис. 29), реализующая правило (149), содержит накопитель (сумматор) после квадратичного детектора.

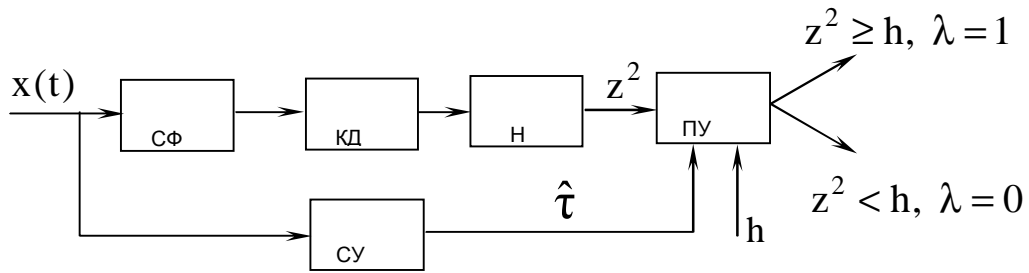


Рис. 29

Следует иметь в виду, что эффективность некогерентного накопителя будет незначительно уступать эффективности когерентного, если отношение сигнал/шум по мощности на входе детектора значительно превышает 1. При малых отношениях сигнал/шум на входе детектора ($q_{\text{вх}} \ll 1$) на его выходе $q_{\text{вых}} \approx q_{\text{вх}}^2$ и для достижения тех же характеристик обнаружения потребуется большая энергия пакета. Например, при $q_{\text{вх}} = 10$ $q_{\text{вых}} \approx 5$, а при $q_{\text{вх}} = 0,1$ $q_{\text{вых}} \approx 0,01$.

В последнем случае для реализации одинаковых характеристик обнаружения потребуется не в 100, а в 500 раз увеличить время накопления (увеличить число импульсов в пакете). Это означает, что некогерентная обработка пакета слабых радиоимпульсов нецелесообразна и нужно стремиться к когерентной обработке.

6.5. Обнаружение случайного сигнала

Пусть в принимаемой смеси

$$x(t) = \lambda S(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (148)$$

где λ принимает значения 1 или 0, $n(t)$ – белый гауссовский шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0 / 2$,

полезный сигнал $S(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $F_s(\omega)$, не коррелированный с $n(t)$. При этом $x(t)$ – нормальный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией, равной сумме дисперсий процессов $S(t)$ и $n(t)$. Если эффективная полоса частот сигнала равна $\Delta F = f_2 - f_1$, то функционал правдоподобия гипотезы $\lambda = 1$ определяется выражением

$$F(1) = C_1 \exp \left[\left(\left(-N_0 + \frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F(\omega) d\omega \right)^{-1} \int_0^T x^2(t) dt \right) \right], \quad (149)$$

а функционал правдоподобия гипотезы $\lambda = 0$ примет вид

$$F(0) = C_0 \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (150)$$

Взяв отношение функционалов правдоподобия (149) и (150), выполнив соответствующие преобразования и логарифмирование, получим правило обнаружения случайного сигнала

$$\frac{\frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega}{N_0 \left[N_0 + \frac{1}{2\pi\Delta F} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega \right]} \cdot \int_0^T x^2(t) dt \geq h_0 \quad (151)$$

или

$$Z = \int_0^T x_{\Phi}^2(t) dt \geq h_0, \quad (152)$$

где $X_{\Phi}(t)$ – входная смесь, прошедшая через фильтр с полосой ΔF .

Оптимальное правило принятия решения включает фильтрацию входной смеси в диапазоне частот от f_1 до f_2 , возведение ее в квадрат, интегрирование в пределах времени анализа (от 0 до T) и сравнение с порогом h . Структурная схема, реализующая это правило, показана на рис. 30.

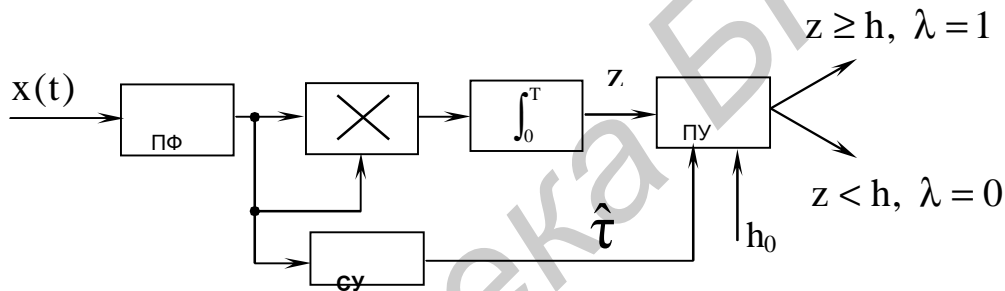


Рис. 30

Оптимальным приемником является энергетический приемник смеси, пропущенной через полосовой фильтр (ПФ).

Определим характеристики обнаружения энергетического приемника.

Величина Z является случайной и подчиняется нормальному закону распределения, так как база случайного сигнала $x(t)$, $\Delta F \cdot T \gg 1$ и сумму множества независимых случайных величин x_i за время наблюдения T можно считать нормальной. Матожидание и дисперсия случайной величины Z_1 (в смеси присутствует случайный сигнал)

$$m_1 = \langle z_1 \rangle = \left\langle \int_0^T [S_{\Phi}(t) + n_{\Phi}(t)]^2 dt \right\rangle = \Delta F \cdot T (P_{s\Phi} + P_{n\Phi}),$$

$$\sigma_1^2 = \langle z_1^2 \rangle - m_1^2 = 2\Delta F \cdot T \cdot (P_{s\Phi} + P_{n\Phi})^2. \quad (153)$$

Матожидание и дисперсия случайной величины z_0 (в смеси отсутствует случайный сигнал)

$$m_0 = \langle z_0 \rangle = \Delta F \cdot T \cdot P_{n\Phi}, \quad \sigma_0^2 = \langle z_0^2 \rangle - m_0^2 = 2\Delta F \cdot T \cdot P_{n\Phi}^2. \quad (154)$$

В формулах (153) и (154)

$$P_{s\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi f_1}^{2\pi f_2} F_s(\omega) d\omega, \quad P_{n\phi} = N_0 \cdot \Delta F \quad (155)$$

соответствует мощности сигнальной и шумовой составляющих на выходе полосового фильтра.

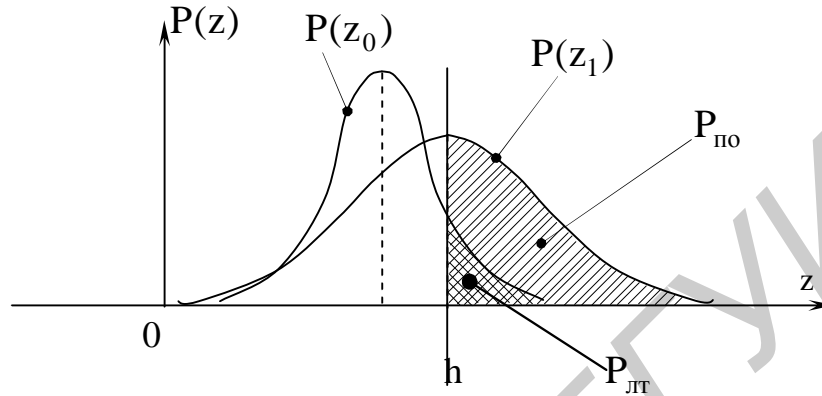


Рис. 31

На рис. 31 приведены зависимости плотностей распределения нормальных случайных величин z_1 и z_2 . Вероятности $P_{пт}$ и $P_{по}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} P_{пт} &= \int_h^{\infty} P(z_0) dz_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int_h^{\infty} \exp\left[-\frac{(z_0 - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] dz_0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h-m_0}{\sigma_0}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma_0}\right), \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} P_{по} &= \int_h^{\infty} P(z_1) dz_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \int_h^{\infty} \exp\left[-\frac{(z_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h-m_1}{\sigma_1}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma_1}\right). \end{aligned} \quad (157)$$

Подставив в формулы (156) и (157) значения из формул (153) и (154), получим

$$P_{пт} = 1 - \Phi\left[\frac{2h - (\Delta F)^2 TN_0}{N_0 \Delta F \sqrt{2\Delta FT}}\right],$$

$$P_{\text{по}} = 1 - \Phi \left[\frac{2h - (\Delta F)^2 T N_0 (1 + q)}{N_0 \Delta F (1 + q) \sqrt{2 \Delta F T}} \right], \quad (158)$$

где $q = \frac{P_{\text{сф}}}{P_{\text{нф}}}$ – отношение сигнал/шум (по мощности) на выходе полосового фильтра.

Из (158) следует, что увеличение отношения сигнал/шум в обнаружителе для неизменного интервала наблюдения приводит к увеличению $P_{\text{по}}$ без изменения $P_{\text{лт}}$.

7. Различение радиосигналов

Ранее в разделе 1 указывалось, что задача различения заключается в оптимальном принятии решения о присутствии в принятой реализации $x(t)$ одного из m информационных сигналов ($m = 2, 3, 4, \dots$):

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $i = \overline{1, m}$, $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$,

$S_i(t)$ – информационные сигналы. К априорным данным относятся и вероятности появления сигналов $P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_m)$.

Задача различения характерна для систем передачи информации и управления. Ниже рассматриваются два случая оптимального различения: различение известных (детерминированных) сигналов и различение сигналов с неизвестными начальными фазами.

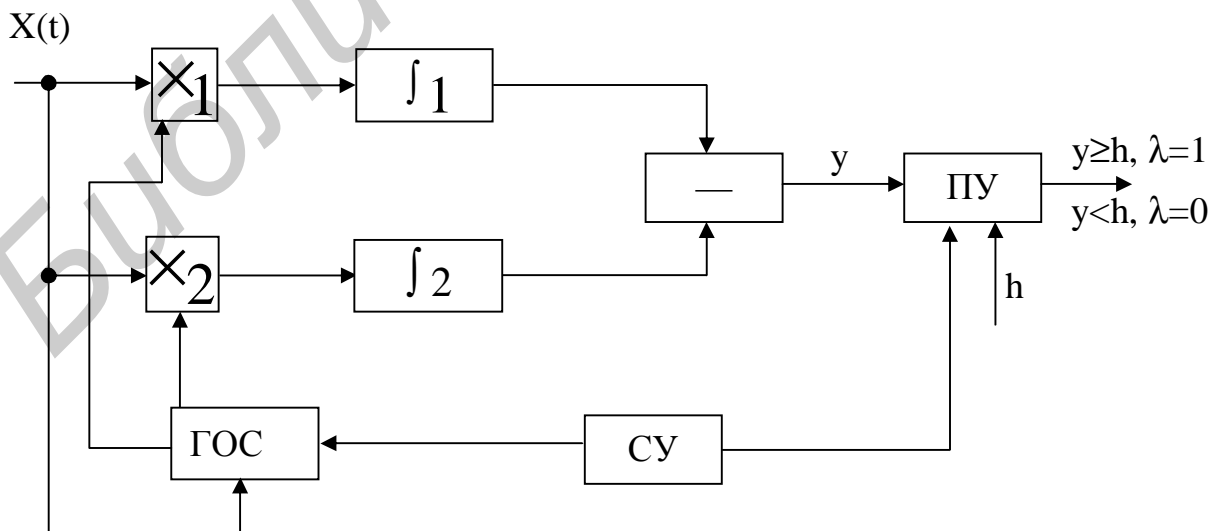


Рис. 32

7.1. Различение известных радиосигналов

Первоначально рассмотрим различение двух информационных сигналов ($m = 2$)

$$x(t) = \lambda \cdot S_1(t) + (1 - \lambda) \cdot S_2(t) + n(t); \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (159)$$

где $I = \begin{cases} 1, & \text{в смеси } S_1(t) \\ 0, & \text{в смеси } S_2(t) \end{cases}$, $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – известные сигналы с апостериорными

вероятностями $P(S_1)$ и $P(S_2)$.

Для синтеза оптимальной структуры различителя воспользуемся критерием максимума отношения апостериорных вероятностей по формулам (36), (38).

Апостериорные вероятности

$$P_{PS}(S_1) = K \cdot P(S_1) \cdot \exp \left[-\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt \right],$$

$$P_{PS}(S_2) = K \cdot P(S_2) \cdot \exp \left[-\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt \right].$$

Отношение апостериорных вероятностей для $\lambda = 1$

$$\frac{P_{PS}(S_1)}{P_{PS}(S_2)} = \frac{P(S_1)}{P(S_2)} \cdot \frac{\exp \left[-\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt \right]}{\exp \left[-\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt \right]} =$$

$$= \frac{P(S_1)}{P(S_2)} \cdot \exp \left[\frac{E_1 - E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \right] \geq 1. \quad (160)$$

Прологарифмировав обе части неравенства (160), получим алгоритм оптимальной процедуры различения

$$y = \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \geq \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = h, \quad (161)$$

где E_1 и E_2 – энергии сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$,

h – порог различения.

На рис. 32 приведена структурная схема оптимального различителя двух известных сигналов в соответствии с алгоритмом (161). В схеме на рис. 32 генератор опорного сигнала (ГОС) формирует полезные сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$, а синхронизирующее устройство (СУ) оценивает временное положение различаемых сигналов (простое различение).

Если одинаковы энергии сигналов ($E_1 = E_2 = E$) и их априорные вероятности [$P(S_1) = P(S_2) = 0,5$], то

$$y = \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt \geq h = 0. \quad (162)$$

Из выражения (162) следует, что для положительных значений y применяется решение о наличии сигнала $S_1(t)$ в принимаемой смеси, а для отрицательных – о присутствии в смеси сигнала $S_2(t)$.

Для простоты анализа в полученных алгоритмах коэффициент отношения полезных сигналов на входе к опорным принят равным 1, коэффициент передачи перемножителей – также равным 1.

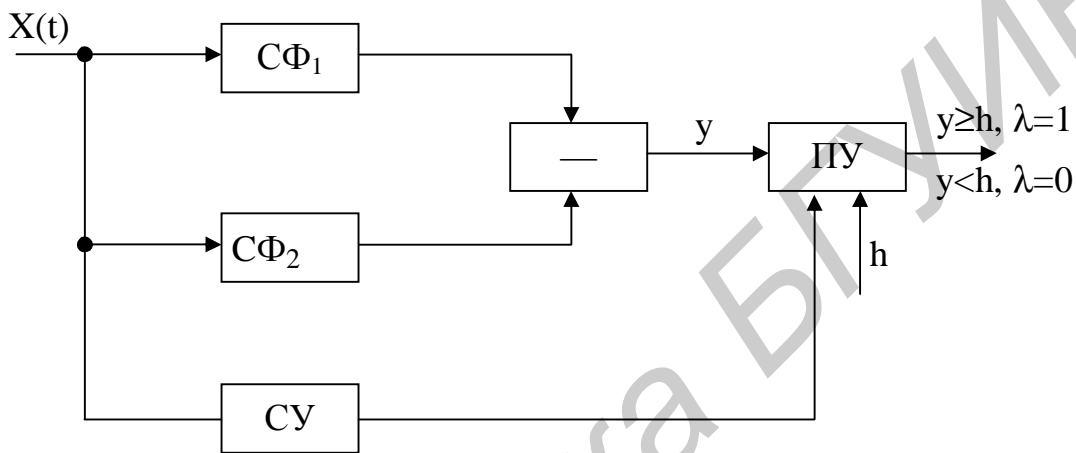


Рис. 33

На рис. 33 приведена фильтровая структура оптимального различителя двух известных сигналов, являющаяся аналогом корреляционной структуры рис. 32. Согласованные фильтры ($C\Phi_1$ и $C\Phi_2$) имеют коэффициенты передачи, равные соответственно

$$K_1(j\omega) = C \cdot S_1^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} \quad \text{и} \quad K_2(j\omega) = C \cdot S_2^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega T},$$

где $S_1^*(j\omega)$ и $S_2^*(j\omega)$ – функции, комплексно сопряженные со спектральными функциями сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$.

Произведем количественную оценку качества различения синтезированных структур различителей. Случайная величина y , согласно формуле (161), может принимать два вида – y_1 и y_2 . Если в принимаемой смеси присутствует сигнал $S_1(t)$, то

$$y_1 = \int_0^T [S_1(t) + n(t)] \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt,$$

а если в смеси присутствует сигнал $S_2(t)$, то

$$y_2 = \int_0^T [S_2(t) + n(t)] \cdot [S_1(t) - S_2(t)] dt.$$

Случайные величины y_1 и y_2 подчиняются нормальному закону распределения, так как они формируются в результате линейных преобразований над входной смесью, являющейся нормальным случайным процессом. Поэтому для нахождения законов распределения величин y_1 и y_2 достаточно найти их матожидания (m_1 и m_2) и дисперсии (σ_1^2 и σ_2^2):

$$\begin{aligned}
 m_1 = \langle y_1 \rangle &= \int_0^T S_1^2(t) dt + \int_0^T \langle n(t) \rangle \cdot S_1(t) dt - \int_0^T \langle n(t) \rangle \cdot S_2(t) dt - \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt = E_1 - R_{1,2}; \\
 \sigma_1^2 &= \langle y_1^2 \rangle - m_1^2 = (E_1 - R_{1,2})^2 + 2 \int_0^T \langle n(t) \rangle [S_1(t) - S_2(t)] dt + \\
 &+ \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) \cdot n(t_2) \rangle [S_1(t_1) - S_2(t_1)] \cdot [S_1(t_2) - S_2(t_2)] dt_1 dt_2 - (E_1 - R_{1,2})^2 = \\
 &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} S(t_1 - t_2) [S_1(t_1) - S_2(t_1)] \cdot [S_1(t_2) - S_2(t_2)] dt_1 dt_2 = \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = N_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{2} - R_{1,2} \right); \\
 m_2 = \langle y_2 \rangle &= -E_2 + R_{1,2}, \\
 \sigma_2^2 = \langle y_2^2 \rangle - m_2^2 &= N_0 \left(\frac{E_1 + E_2}{2} - R_{1,2} \right) = \sigma_1^2 = \sigma^2.
 \end{aligned} \tag{163}$$

Характеристики нормальных случайных величин получены. В соотношениях (163) с учетом нулевого матожидания белого шума ($\langle n(t) \rangle = 0$), корреляционной функции белого шума как дельта-функции [$r(t_1 - t_2) = N_0/2 \delta(t_1 - t_2)$] и фильтрующего свойства дельта-функции законы плотности распределения случайных величин y_1 и y_2 имеют вид

$$\begin{aligned}
 P(y_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2} \right], \\
 P(y_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma^2} \right]
 \end{aligned} \tag{164}$$

На рис. 34 приведены графики распределений (164). Для указанного на графике порога h условная вероятность ошибки приема сигнала $S_1(t)$ численно определяется заштрихованной площадкой слева от порога, а условная вероятность ошибки приема сигнала $S_2(t)$ – заштрихованной площадкой справа от порога. Общая вероятность ошибочного приема информационных сигналов определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1/S_2), \tag{165}$$

где $P(S_2/S_1)$ и $P(S_1/S_2)$ – условные вероятности ошибок при приеме $S_1(t)$ и $S_2(t)$ соответственно. Найдем значения $P(S_2/S_1)$ и $P(S_1/S_2)$ (рис. 34):

$$P(S_2/S_1) = \int_{-\infty}^h P(y_1) dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^h \exp\left[-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma^2}\right] dy_1 = \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma}\right) \quad (166)$$

$$P(S_1/S_2) = \int_{-\infty}^h P(y_2) dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^h \exp\left[-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma^2}\right] dy_2 = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_2}{\sigma}\right) \quad (167)$$

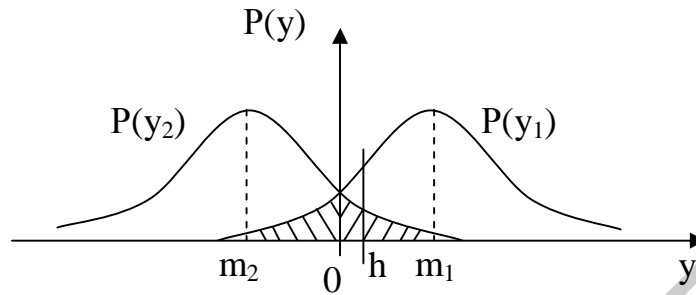


Рис. 34

С учетом формул (166) и (167) выражение (165) примет вид

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \left[\Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma}\right) \right] + P(S_2) \left[1 - \Phi\left(\frac{h - m_2}{\sigma}\right) \right]. \quad (168)$$

Если энергии сигналов и их априорные вероятности равны, то $h = 0$, $m_1 = E(1 - \rho_{1,2})$, $\rho_{1,2} = R_{1,2}/E$, $\sigma^2 = N_0 E(1 - \rho_{1,2})$, а вероятность ошибочного приема оценивается выражением

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}(1 - \rho_{1,2})\right). \quad (169)$$

Если цифровая информация передается с помощью АМ с пассивной паузой ($S_2(t) = 0$), то

$$P_{\text{ош.ам}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right). \quad (170)$$

Для сигналов с ЧМ ($\rho_{1,2} = 0$) и ФМ ($\rho_{1,2} = -1$) соответственно

$$P_{\text{ош.чм}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right), \quad (171)$$

$$P_{\text{ош.фм}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (172)$$

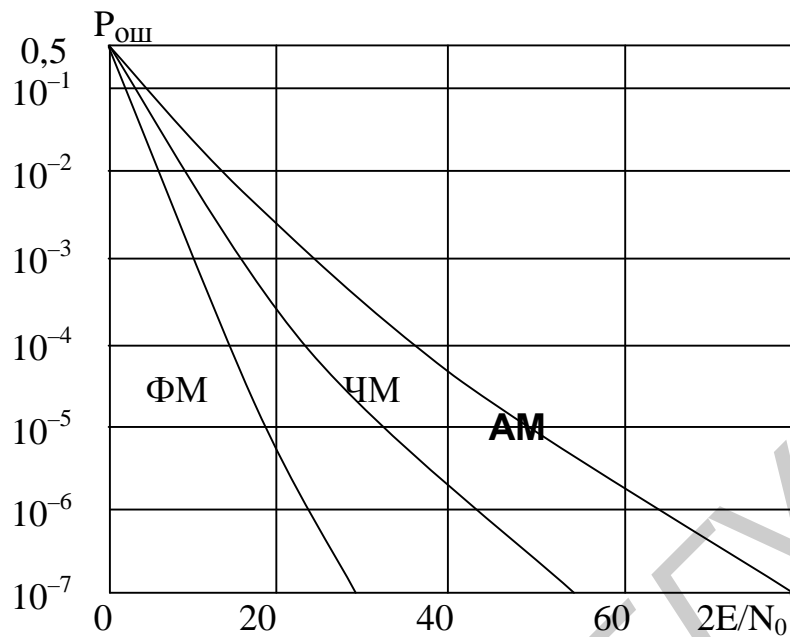


Рис. 35

На рис. 35 приведены зависимости потенциальной помехоустойчивости оптимального различителя двух известных сигналов с АМ, ЧМ и ФМ, из которых следует вывод о наибольшей помехоустойчивости фазоманипулированных сигналов.

При различении m известных сигналов ($m > 2$)

$$x(t) = S_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (173)$$

где $i = \overline{1, m}$,

$S_i(t)$ – известные сигналы с априорными вероятностями их появления $P(S_i)$.

Если в принимаемой реализации присутствует j -й сигнал, то его апостериорная вероятность будет максимальной, т.е.

$$P_{PS}(S_j) \geq P_{PS}(S_i), \quad i \neq j.$$

Следовательно, алгоритм различения m сигналов, минимизирующий вероятность ошибки, должен обеспечивать сравнение апостериорных вероятностей различаемых сигналов с принятием решения о наличии в принимаемой смеси сигнала с максимальной апостериорной вероятностью

$$P(S_j) \cdot \exp \left[-\frac{E_j}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_j(t) dt \right] \gg P(S_i) \cdot \exp \left[-\frac{E_i}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_i(t) dt \right].$$

При равенстве энергий различаемых сигналов ($E_1 = E_2 = \dots = E_m = E$) и их априорных вероятностей [$P(S_1) = P(S_2) = \dots = P(S_k)$] алгоритм различения m известных сигналов примет вид

$$y_j = \int_0^T x(t) \cdot S_j(t) dt \gg \int_0^T x(t) \cdot S_i(t) dt = y_i. \quad (175)$$

На рис. 36 в соответствии с алгоритмом (175) приведена структурная схема оптимального корреляционного различителя m известных сигналов. В этой схеме ГОС – генератор опорных сигналов, формирующий копии различаемых сигналов, а УС – устройство сравнения, выполняющее функцию устройства принятия решения.

Различитель содержит m одинаковых каналов, в каждом из которых определяется корреляционный интеграл входной смеси $x(t)$ с соответствующим опорным сигналом $S_j(t)$, $j = 1, m$.

В устройстве сравнения определяется канал с максимальным корреляционным интегралом, и если это i -й канал, то принимается решение о наличии во входной смеси, на интервале наблюдения $0 \leq t \leq T$, сигнала $S_i(t)$.

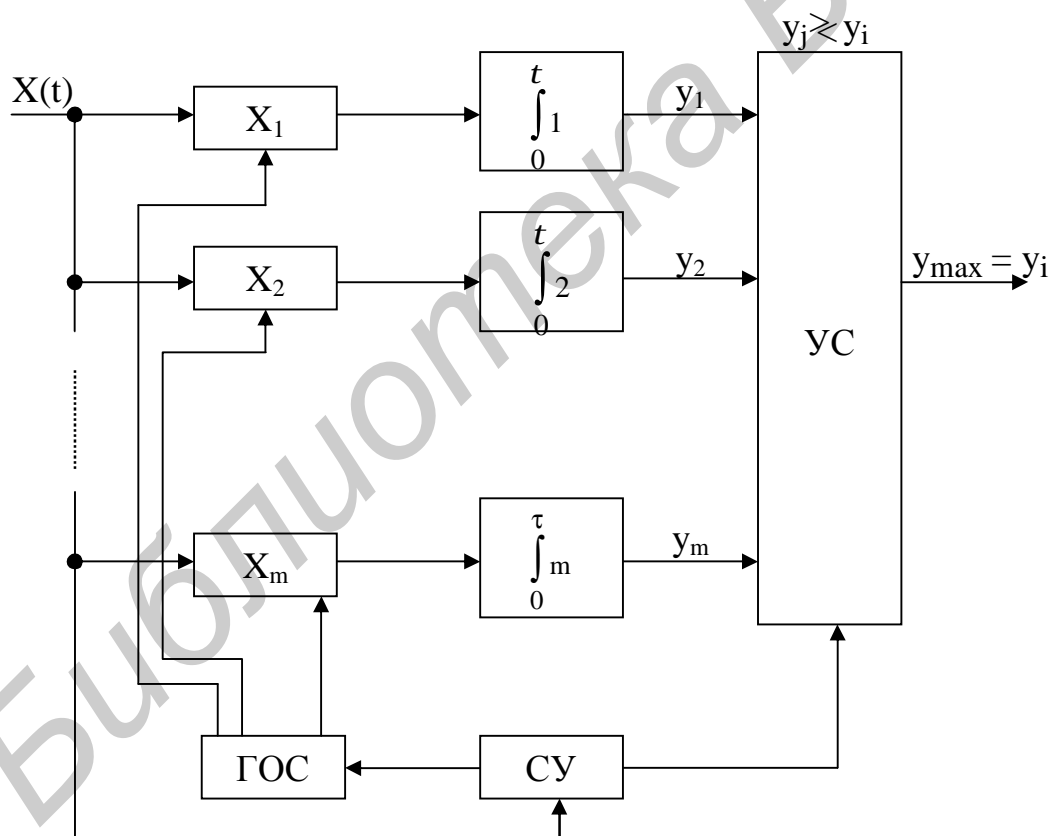


Рис. 36

На рис. 37 изображена структурная схема фильтрового различителя m известных сигналов. Напряжение y_i на выходе каждого согласованного фильтра является сверткой между входной смесью $x(t)$ и импульсным откликом

$(g_i(t) = c \cdot S_i(T - t))$ соответствующего фильтра. Процесс сравнения и принятия решения осуществляется в конце времени анализа.

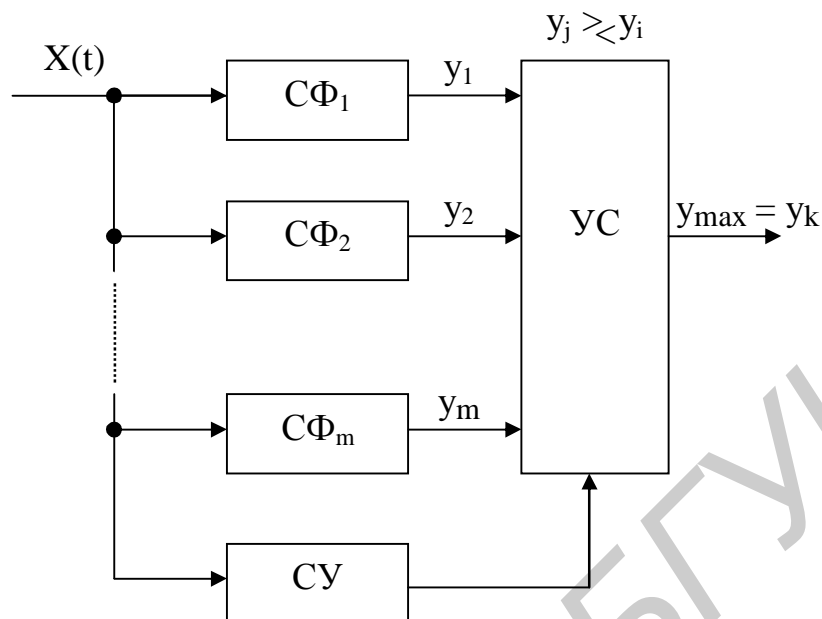


Рис. 37

Вероятность ошибки различителей рис. 36, 37 определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dy_i \int_{-\infty}^{y_i} \dots \int P\left(\frac{y_1, \dots, y_m}{S_i}\right) dy_1 \dots dy_i \dots dy_m, \quad (176)$$

где $P(y_1, \dots, y_m / S_i)$ – совместная условная плотность вероятности выходных напряжений отдельных каналов различителя в момент времени $t = T$ при условии, что во входной смеси присутствует сигнал $S_i(t)$.

Выражение (176) легко получается в частном случае, когда сигналы $\{S_i(t)\}$, $i = \overline{1, m}$, имеющие одинаковую энергию E , равновероятны и ортогональны. При этом случайные величины y_i являются совместно гауссовскими и имеют характеристики:

матожидание

$$m_j = \langle y_j \rangle = \int_0^T S_i(t) \cdot S_j(t) dt = \begin{cases} E, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases},$$

дисперсия

$$\sigma_j^2 = \langle (y_j - m_j)^2 \rangle = \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1)n(t_2) \rangle S_i(t_1) \cdot S_j(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{EN_0}{2} = \sigma^2. \quad (177)$$

Следовательно,

$$P\left(\frac{y_1, \dots, y_m}{S_i}\right) = (2\pi\sigma^2)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m y_j^2\right) \exp\left[-\frac{(y_i - E)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (178)$$

Подставив (178) в (176), получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)^2 \right] \Phi^{m-1}(x) dx. \quad (179)$$

Полная вероятность ошибки при различении равновероятных сигналов определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \cdot P_0 + P(S_2) \cdot P_0 + \dots P(S_m) \cdot P_0 = \frac{1}{m} \cdot mP_0 = P_0 =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)^2 \right] \Phi^{m-1}(x) dx, \quad (180)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности.

Анализ выражения (180) показывает, что для ортогональных сигналов и $P_{\text{ош}} \leq 10^{-3}$ полная вероятность ошибки аппроксимируется формулой

$$P_{\text{ош}} \cong (m-1) \cdot \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right]. \quad (181)$$

Рассмотренные структуры оптимальных различителей известных сигналов являются структурами оптимального когерентного приема информационных сигналов.

7.2. Различение радиосигналов с неизвестными начальными фазами

При различении двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами ($m = 2$) имеем

$$x(t) = \lambda S_1(t, \varphi) + (1-\lambda) S_2(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (182)$$

где $S_1(t, \varphi)$ и $S_2(t, \varphi)$ – различаемые сигналы с неизвестными начальными фазами,
 $\lambda \in (0, 1)$,
 $P(\varphi) = 1/2\pi$.

$$S_i(t) = S_{0i}(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Апостериорные вероятности сигналов (114)

$$P_{\text{PS}}(S_1) = K \cdot P(S_1) \cdot e^{-E_1/N_0} \cdot I_0 \left(\frac{2Z_1}{N_0} \right),$$

$$P_{\text{PS}}(S_2) = K \cdot P(S_2) \cdot e^{-E_2/N_0} \cdot I_0 \left(\frac{2Z_2}{N_0} \right),$$

где $P(S_1)$ и $P(S_2)$ – априорные вероятности,

$$Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

$$Z_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2},$$

$I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

$$X_1 = \int_0^T x(t) \cdot S_{01}(t) \cdot \cos \omega_1 t dt,$$

$$X_2 = \int_0^T x(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \cos \omega_2 t dt,$$

$$Y_1 = \int_0^T x(t) \cdot S_{01}(t) \cdot \sin \omega_1 t dt,$$

$$Y_2 = \int_0^T x(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \sin \omega_2 t dt,$$

Z_1 и Z_2 – корреляционные огибающие сигналов.

Отношение апостериорных вероятностей при $\lambda = 1$

$$\frac{P_{PS}(S_1)}{P_{PS}(S_2)} = \frac{K \cdot P(S_1) \cdot e^{-E_1/N_0} \cdot I_0\left(\frac{2Z_1}{N_0}\right)}{K \cdot P(S_2) \cdot e^{-E_2/N_0} \cdot I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right)} \geq 1,$$

откуда

$$\ln I_0\left(\frac{2Z_1}{N_0}\right) - \ln I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right) \geq \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)}. \quad (183)$$

(184)

$$Z_1 - Z_2 \geq \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} = h.$$

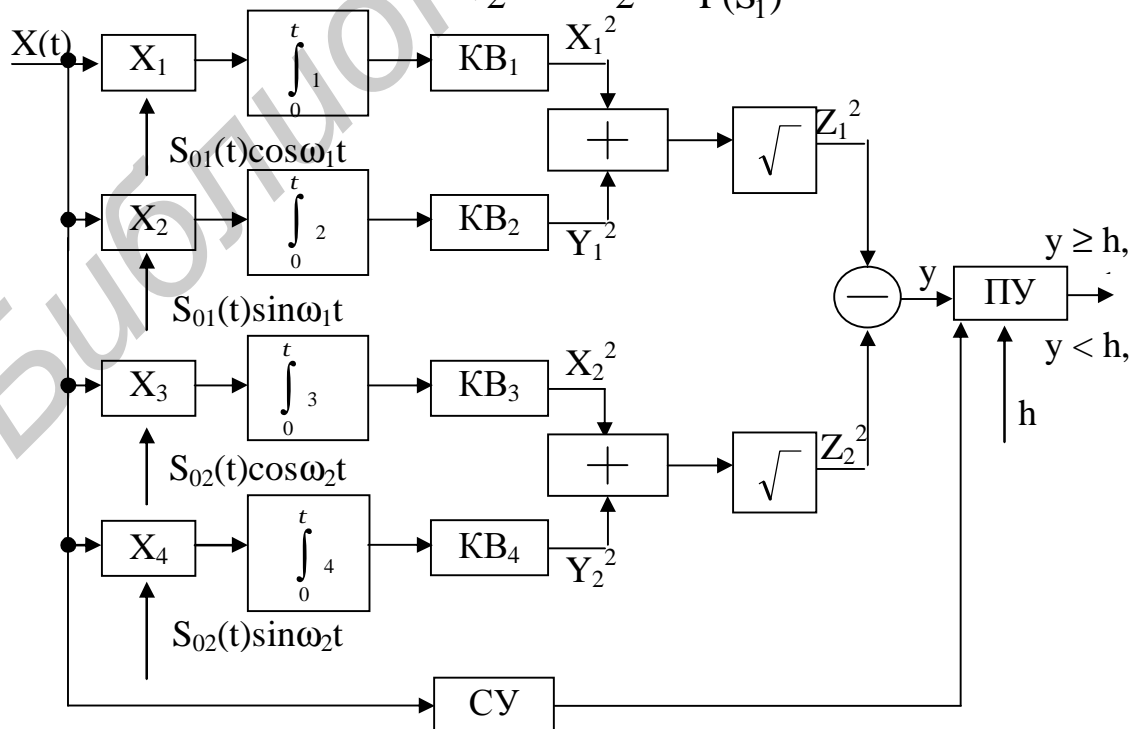


Рис. 38

На рис. 38 приведена структурная схема различителя в соответствии с алгоритмом (184). Структурная схема различителя двух сигналов с неизвестными начальными фазами фильтрового типа изображена на рис. 39. Принимаемая смесь (182) воздействует на согласованные фильтры $C\Phi_1$ и $C\Phi_2$ с импульсными характеристиками $g_1(t) = c \cdot S_1(T - t)$ и $g_2(t) = c \cdot S_2(T - t)$. Детекторы огибающих $ДО_1$ и $ДО_2$ на выходе каждого фильтра формируют напряжения, которые вычитаются, и результат сравнивается с порогом h . Если разностное напряжение Y не меньше порога h , то принимается решение о присутствии в смеси $x(t)$ сигнала $S_1(t)$, в противном случае – о присутствии в смеси $x(t)$ сигнала $S_2(t)$.

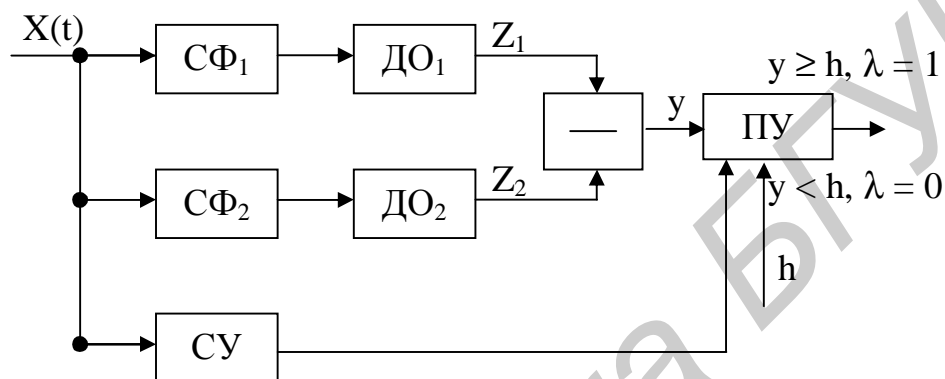


Рис. 39

Произведем оценку потенциальной помехоустойчивости синтезированных структур (рис. 38, 39). Вероятность общей ошибки

$$P_{\text{ош}} = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(S_1/S_2)$$

в рассматриваемом случае по-прежнему зависит от априорных вероятностей сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ и от их условных вероятностей ошибки. Если каналы обработки сигналов симметричны ($E_1 = E_2 = E$, $P(S_1) = P(S_2) = 0,5$), то $P(S_2/S_1) = P(S_1/S_2)$ и

$$P_{\text{ош}} = P(S_1/S_2) = \int_0^{\infty} P(Z_2) \cdot P(Z_1 \geq Z_2/S_2) dZ_2, \quad (185)$$

где $P(Z_1 \geq Z/S_2) = \int_{Z_2}^{\infty} P(Z_1) dZ_1$ – вероятность превышения уровнем огибающей Z_1 уровня огибающей Z_2 при условии наличия во входной смеси сигнала $S_2(t)$. Плотности распределения вероятностей случайных величин Z_1 и Z_2 ($P(Z_1)$ и $P(Z_2)$), как отмечалось ранее в задаче обнаружения сигнала с неизвестной начальной фазой, подчиняются закону Райса. Для рассматриваемого случая эти плотности распределения имеют вид

$$P(Z_2) = \frac{2Z_2}{N_0E} \cdot \exp\left[-\frac{Z_2^2 + E}{N_0E}\right] I_0\left(\frac{2Z_2}{N_0}\right),$$

$$P(Z_1) = \frac{2Z_1}{N_0E} \cdot \exp\left[-\frac{Z_1^2 + E\rho_{1,2}}{N_0E}\right] I_0\left(\frac{2Z_2 + \rho_{1,2}}{N_0}\right). \quad (186)$$

Подставив (186) в (185) и произведя достаточно громоздкие вычисления, получим результат

$$P_{\text{ош}} = Q\left[0,5\sqrt{\frac{2E}{N_0}(1-\sqrt{1-\rho_{1,2}^2})}, 0,5\sqrt{\frac{2E}{N_0}(1+\sqrt{1-\rho_{1,2}^2})}\right] - 0,5\exp\left(-0,5\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(0,5\frac{E\rho_{1,2}}{N_0}\right), \quad (186, \text{ а})$$

где $Q[\alpha, \beta] = \int_{\rho}^{\infty} x \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}\right] I_0(x\alpha) dx$ – табулированная функция,

$\rho_{1,2} = 1/E\sqrt{R_C^2 + R_S^2}$ – коэффициент взаимной корреляции сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, $0 \leq \rho_{1,2} < 1$.

Величины R_C и R_S определяются выражениями

$$R_C = 0,5 \int_0^T S_{01}(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] dt,$$

$$R_S = 0,5 \int_0^T S_{01}(t) \cdot S_{02}(t) \cdot \sin[(\omega_2 - \omega_1)t] dt.$$

Анализ выражения (186, а) показывает, что при заданном значении E/N_0 вероятность ошибки минимальна для ортогональных сигналов ($\rho_{1,2} = 0$). Для этого случая $Q[0, \beta] = \exp[-\beta^2/2]$ и выражение (186) принимает вид

$$P_{\text{ош}} = 0,5\exp[-E/2N_0]. \quad (187)$$

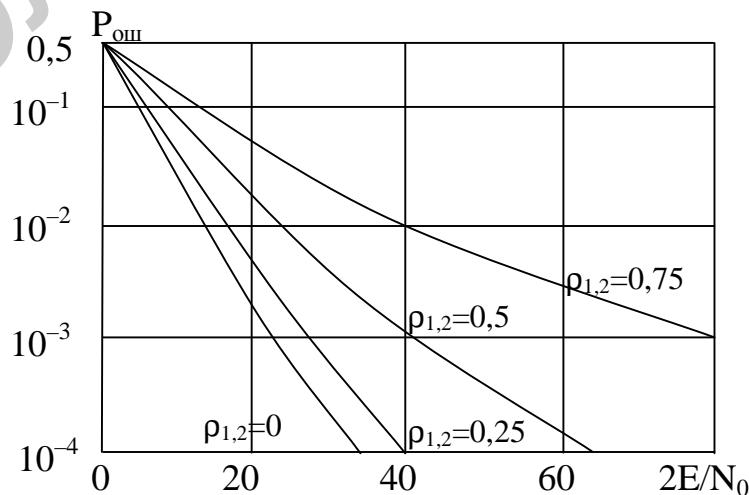


Рис. 40

На рис. 40 приведено семейство кривых, характеризующих потенциальную помехоустойчивость оптимального различителя двух радиосигналов с неизвестными начальными фазами в зависимости от отношения сигнал/шум и значений коэффициента корреляции.

При различении m сигналов с неизвестными начальными фазами ($m > 2$)

$$x(t) = S_i(t, \varphi_i) + n(t), 0 \leq t \leq T, \quad (188)$$

где $i = \overline{1, m}$, $S_i(t, \varphi)$ – сигналы с неизвестными начальными фазами и априорными вероятностями $P(S_i)$.

В соответствии с критерием сравнения апостериорных вероятностей получим

$$P_{PS}[S_i(t, \varphi_i)] \gg P_{PS}[S_j(t, \varphi_j)], i \neq j,$$

$$P[S_i(t, \varphi_i)] e^{-\frac{E_i}{N_0}} I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right) \gg P[S_j(t, \varphi_j)] e^{-\frac{E_j}{N_0}} I_0\left(\frac{2Z_j}{N_0}\right). \quad (189)$$

Если энергии и априорные вероятности различаемых сигналов соответственно равны, то (189) примет вид

$$Z_i \gg Z_j. \quad (190)$$

На рис. 41 приведена структурная схема различителя в соответствии с алгоритмом (190). Фильтровой вариант различителя представлен на рис. 42. Устройство сравнения (УС) выбирает один из m каналов с максимальным значением на выходе, которому и соответствует различаемый сигнал, присутствующий во входной смеси (188).

Потенциальная помехоустойчивость синтезированных структур различителей

$$P_{OШ}(Z_i) = 1 - \int_0^\infty dZ_i \int_0^{Z_i} \dots \int_0^{Z_i} P(Z_1, \dots, Z_m / S_i) dZ_1 \dots dZ_m, \quad (191)$$

где $P(Z_1 \dots Z_m / S_i)$ – совместная условная плотность вероятности случайных величин при условии, что в принятом колебании $x(t)$ присутствует сигнал $S_i(t)$.

Если

$$Z_i = (X_i^2 + Y_i^2)^{1/2} = \sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_{0i}(t) \cdot \cos wtdt \right]^2 + \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_{0i}(t) \cdot \sin wtdt \right]^2}$$

сигналы взаимно ортогональны, равновероятны и имеют одинаковые энергии, т.е.

$$\int_0^T S_i(t) \cdot S_j(t) dt = \begin{cases} E, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ то верхняя граница для}$$

вероятности ошибки имеет вид

$$P_{OШ} = (m - 1)0,5 \exp[-E/2N_0]. \quad (192)$$

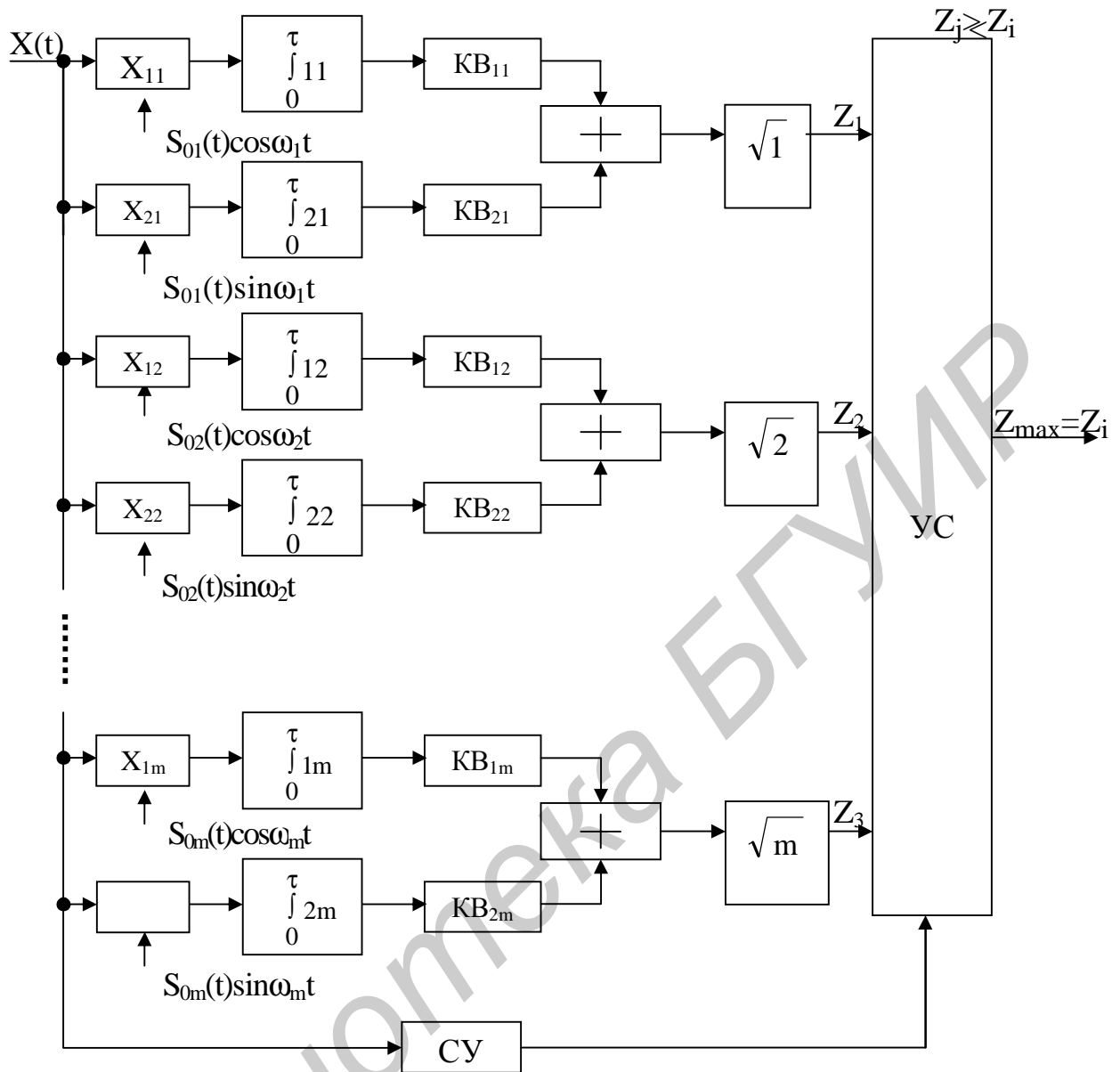


Рис. 41

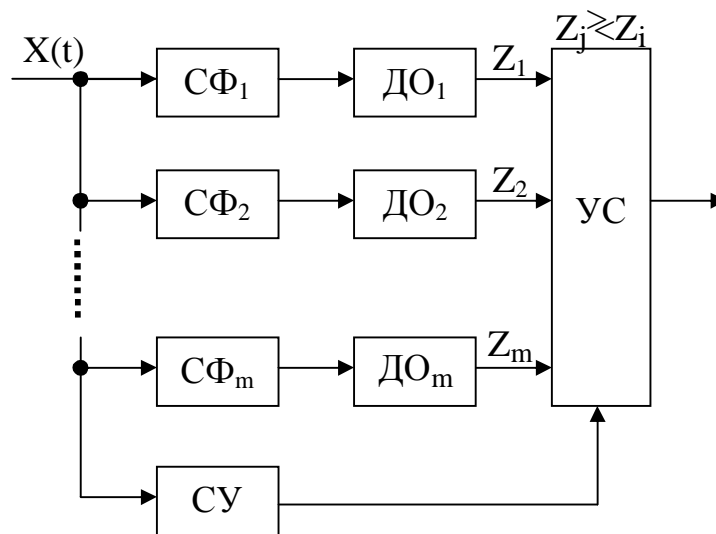


Рис. 42

Основные выводы:

1. Незнание фазы различаемых сигналов приводит к энергетическим потерям при обработке, что приводит к снижению потенциальной помехоустойчивости.
2. Структуры оптимальных различителей радиосигналов с неизвестными начальными фазами характерны для оптимального некогерентного приема.
3. Потенциальная помехоустойчивость различаемых сигналов зависит от их коэффициента взаимной корреляции. Наименьшие ошибки имеют место для симплексных и ортогональных сигналов.
4. Вероятность ошибки различаемых сигналов при $m > 2$ прямо пропорциональна количеству различаемых сигналов.

8. Оценка параметров радиосигнала

Как указывалось ранее, оптимальная оценка параметров радиосигнала заключается в синтезе структуры, наилучшим образом выделяющей информационный параметр (или несколько параметров), и количественной характеристике качества работы синтезированной структуры.

В принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, \lambda) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

полагаются известными все необходимые характеристики белого шума и (точно или ориентировочно) априорная плотность вероятности $P_{PS}(\lambda)$ информационного параметра λ . Сам параметр на интервале $[0, T]$ является постоянной величиной. Так как $x(t)$ – случайный процесс, можно указать лишь приближенную оценку $\lambda = f[x(t)]$. В общем случае $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \hat{\lambda}_m\}$.

Вся информация об интересующем нас параметре заключена в апостериорной вероятности $P_{PS}(\lambda)$. На основании анализа апостериорного распределения принимается то или иное решение об оцениваемом параметре.

В основном применяются следующие критерии оценки параметров:

- оценка по максимуму апостериорной вероятности $(P_{PS}(\lambda))_{\max} \rightarrow \hat{\lambda} = \lambda_m$;
- оценка по максимуму функционала правдоподобия $(F(\lambda))_{\max} \rightarrow \hat{\lambda} = \lambda_m$.

Важным достоинством указанных критериев является то, что точка максимума не изменяется при произвольном взаимно однозначном преобразовании апостериорного распределения. Поэтому удобно брать

$$\frac{d}{d\lambda} \ln P_{PS}(\lambda) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) = 0$$

для оптимальной оценки параметра.

Параметры радиосигнала можно разделить на энергетические (амплитуда, длительность) и неэнергетические (фаза, частота, время запаздывания).

8.1. Оценка амплитуды известного радиосигнала

Пусть в принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, A) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

информационный сигнал описывается следующим выражением

$$S(t, A) = A \cdot S_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = AS_1(t),$$

где $S_0(t)$ – огибающая сигнала единичной амплитуды,

$$\int_0^T S_0^2(t) dt = E_0 - \text{энергия единичной огибающей радиосигнала,}$$

$n(t)$ – белый шум с постоянной спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$,

T – длительность сигнала (интервал наблюдения).

Функционал правдоподобия параметра (24):

$$F(A) = \exp \left[-1/N_0 \int_0^T x(t) - AS_1(t) \right]^2 dt \right].$$

Уравнение правдоподобия

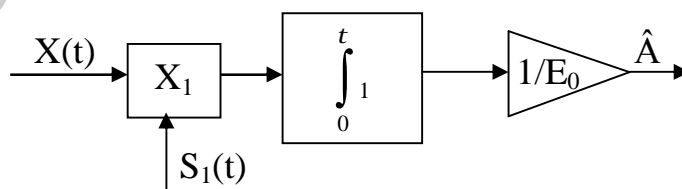
$$\frac{d \ln F(\hat{A})}{d \hat{A}} = \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - \hat{A} S_1(t)] \cdot S_1(t) dt,$$

откуда

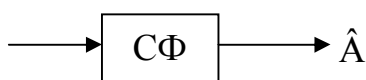
$$\hat{A} = \frac{\int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt}{\int_0^T S_1^2(t) dt} = \frac{1}{E_1} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt, \quad (193)$$

где E_1 – энергия радиоимпульса единичной амплитуды.

На рис. 43 приведены корреляционная и фильтровая схемы оценки амплитуды.



а)



б)

Рис. 43

Выражение (193) определяет структуру оптимального приемника оценки амплитуды. Импульсный отклик согласованного фильтра при этом определяется выражением

$$g(t) = S_1(T - t)/E_1. \quad (194)$$

Если истинное значение амплитуды A_0 , то среднее значение оценки

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{E_1} \int_0^T [A_0 S_1(t) + \langle n(t) \rangle] \cdot S_1(t) dt = A_0. \quad (195)$$

Дисперсия оценки амплитуды

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle \hat{A} \rangle}^2 &= \langle (\hat{A} - A_0)^2 \rangle = \frac{1}{E_1} \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) \cdot n(t_2) \rangle S_1(t_1) \cdot S_1(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{E_1} \cdot \frac{N_0}{2} \int_0^T S_1^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0}{2E_1} = \frac{N_0}{E_0}. \end{aligned} \quad (196)$$

Из (196) следует, что потенциальная ошибка при оценке амплитуды зависит только от соотношения спектральной плотности шума и энергии единичной огибающей радиосигнала.

8.2. Оценка амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой

Для смеси на входе

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t, A, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ S(t, A, \varphi) &= A \cdot S_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi], \end{aligned}$$

где φ – случайная фаза,

$$P(\varphi) = 1/2\pi,$$

$n(t)$ – белый шум с $F_n(\omega) = N_0/2$.

Функционал правдоподобия параметра A примет вид (128)

$$F(A) = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{A^2 E_0}{2N_0} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2AZ}{N_0} \right) \quad (197)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,
 Z – огибающая корреляционной функции.

$$Z = \sqrt{\left[\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \cos \omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin \omega_0 t dt \right]^2}. \quad (198)$$

Уравнение правдоподобия

$$\frac{d \ln F(\hat{A})}{d\hat{A}} = \exp\left[-\frac{\hat{A}^2 E_0}{2N_0}\right] \cdot \left(-\frac{\hat{A} E_0}{2N_0}\right) I_0\left(\frac{2AZ}{N_0}\right) + \exp\left[-\frac{\hat{A}^2 E_0}{2N_0}\right] \cdot I_0'\left(-\frac{2AZ}{N_0}\right) \cdot \frac{2Z}{N} = 0. \quad (199)$$

В (199) $I_0'\left(-\frac{2\hat{A}Z}{N_0}\right) = I_1\left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0}\right)$ – модифицированная функция Бесселя

первого рода первого порядка.

На рис. 44 представлены графики функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$.

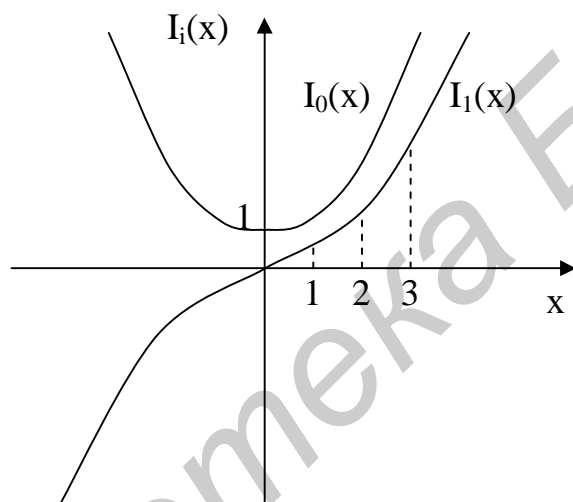


Рис. 44

Из (199) определяется оценка амплитуды

$$\hat{A} = \frac{\frac{2Z}{N_0} \cdot I_1\left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0}\right)}{\frac{E_0}{N_0} \cdot I_0\left(\frac{2\hat{A}Z}{N_0}\right)}. \quad (200)$$

Множитель $I_1(x)/I_0(x)$ нелинейно зависит от x и изменяется от 0 до 1 при изменении x от 0 до ∞ . Однако уже при $x \geq 3$ $I_1(x)/I_0(x) \approx 1$, поэтому из (200) справедливо равенство

$$\hat{A} = 2Z/N_0. \quad (201)$$

На рис. 45 в соответствии с (201) приведены корреляционная и фильтровая структуры оптимальной оценки амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой. Согласованный фильтр (СФ) имеет импульсный отклик $g(t) = CS_1(T - t)$.

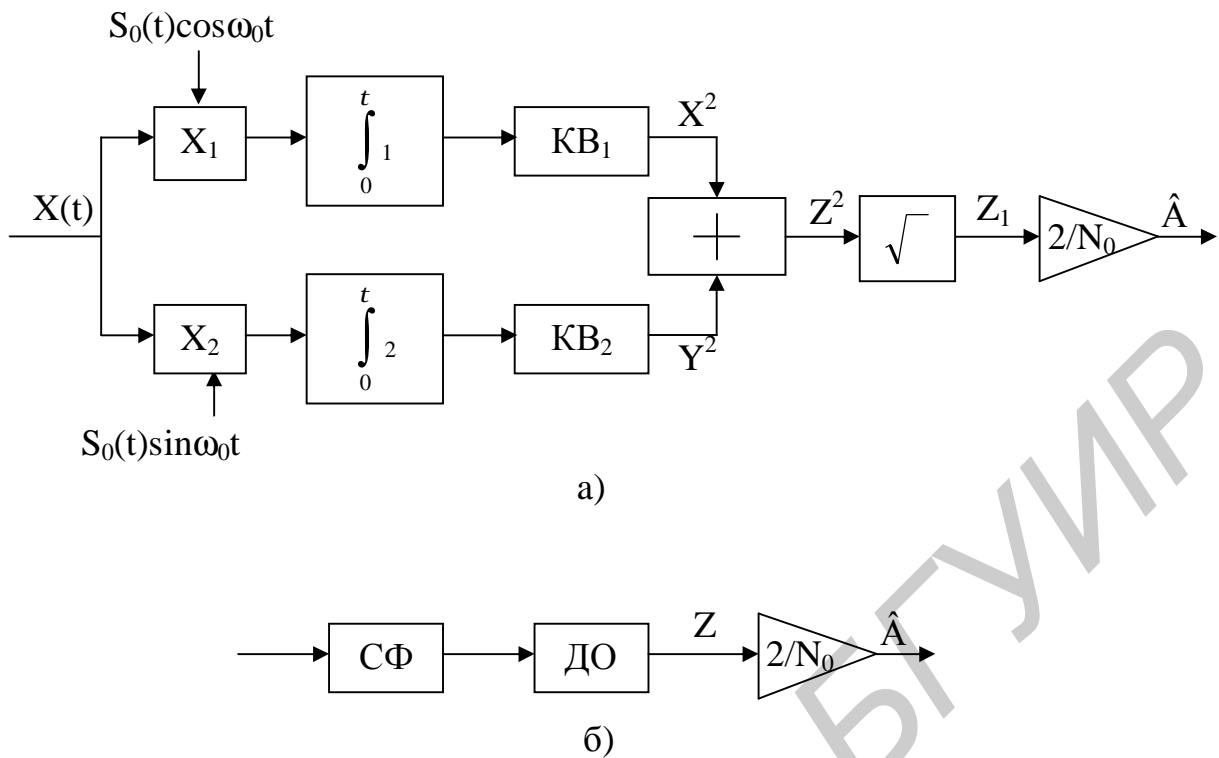


Рис. 45

Дисперсию оценки амплитуды можно получить из анализа структуры апостериорной вероятности, если воспользоваться асимптотическим разложением модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

$$P_{PS}(A) = \text{const} \cdot F(\lambda) = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{A^2 E_0}{2N_0}\right] I_0\left(\frac{2AZ}{N_0}\right) \cong$$

$$\cong \text{const} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2AZ}{N_0}\right)^{-1/\lambda} e^{-\left(\frac{A^2 E_0}{2N_0} - \frac{2AZ}{N_0}\right)} \cong \text{const} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A}} e^{-\left(\frac{(A-\hat{A})^2}{2\sigma_A^2}\right)},$$

где дисперсия оценки амплитуды радиосигнала с неизвестной фазой имеет вид

$$\sigma_A^2 = N_0/E_0. \quad (202)$$

Сравнение (196) и (202) показывает, что дисперсии оценки амплитуд радиосигналов с известной и неизвестной начальными фазами одинаковы. Этот вывод справедлив для больших входных отношений сигнал/шум ($q \gg 1$).

8.3. Оценка неэнергетических параметров радиосигналов

Для известного сигнала функционал правдоподобия имеет вид

$$F(\lambda) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right].$$

Если оцениваемые параметры неэнергетические, то функционал правдоподобия упростится:

$$F(\lambda) = \text{const} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot s(t, \lambda) dt \right]. \quad (203)$$

Максимизируя натуральный логарифм выражения (203)

$$\ln F(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, \hat{\lambda}) dt + \text{const},$$

можно синтезировать обобщенную структур-

ную схему оценки неэнергетического параметра радиосигнала (рис. 46)

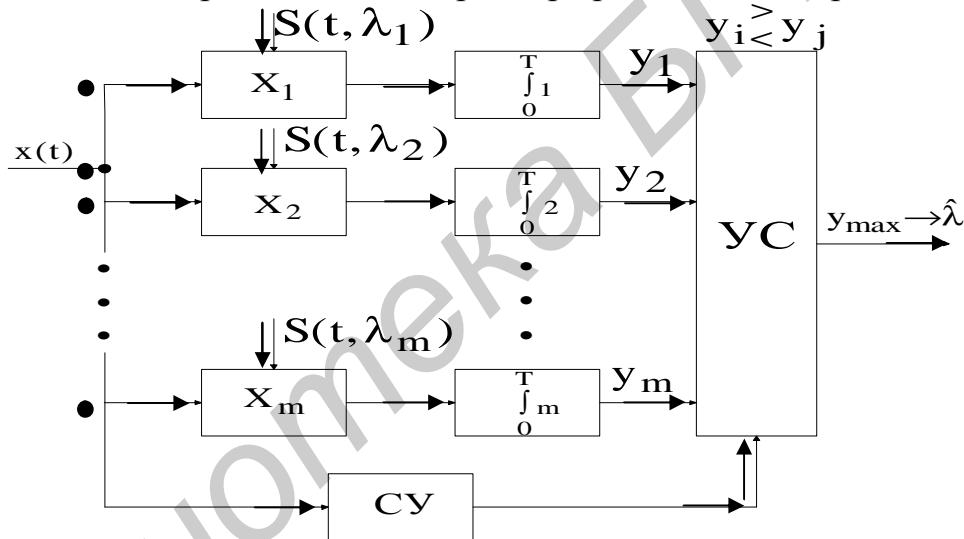


Рис. 46

Отсюда правило $y_i = \int_0^T x(t) \cdot S(t, \lambda_i) dt \geq \int_0^T x(t) S(t, \hat{\lambda}_j) dt = y_j$. (204)

Структурная схема представляет многоканальный коррелятор. Опорный сигнал для каждого из каналов формируется с учетом конкретного значения параметра из диапазона его возможных значений. Весь диапазон возможных значений измеряемого параметра разбивается на m дискретных величин

$$m = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\Delta\lambda},$$

где $\Delta\lambda$ – необходимая точность оценки параметра.

Представим функцию $y(\lambda)$ через сигнальную и шумовую составляющие:

$$y(\lambda) = \frac{2}{N_0} \left[\int_0^T S(t, \lambda) \cdot S(t, \hat{\lambda}) dt + \int_0^T S(t, \hat{\lambda}) \cdot n(t) dt \right] = y_c(\lambda, \hat{\lambda}) + y_h(\hat{\lambda}). \quad (205)$$

Так как измерения происходят при отношении сигнал/шум $q \gg 1$, то вторым интегралом $((y_h(\hat{\lambda}))$ можно пренебречь.

Разложим сигнальную функцию $y_c(t, \hat{\lambda})$ в ряд Тейлора в точке $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 – истинное значение оцениваемого параметра) и ограничимся тремя первыми членами [10]:

$$y_c(\lambda, \hat{\lambda}) = y_c(\lambda_0) + y'_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0) + \left(\frac{1}{2}\right)y''_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2. \quad (206)$$

Первый член (206) не содержит ошибки измерения. Второй член равен нулю, так как производная $y'_c(\lambda_0)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ равна нулю (максимум корреляционной функции). Следовательно, функция правдоподобия для оптимальной оценки неэнергетического параметра имеет вид

$$F(\lambda) = \text{const} \exp\left[\frac{1}{2}y''_c(\lambda_0)(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2\right] = \text{const} \exp\left[\frac{(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2}{2 \cdot \frac{1}{y''_c(\lambda_0)}}\right] = \text{const} \exp\left[-\frac{(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2}{2\sigma_\lambda^2}\right]. \quad (207)$$

$$\text{В (208) } \sigma_\lambda^2 = -\frac{1}{y''_c} = \frac{N_0}{2R''(\lambda_0)} = -\frac{N_0}{2E \cdot \rho''(\lambda_0)}. \quad (208)$$

В выражениях (206), (207) и (208) $y''_c(\lambda_0)$ – вторая производная от сигнальной функции для значения $\lambda = \lambda_0$, $R''(\lambda_0)$ – вторая производная корреляционной функции информационного сигнала в точке $\lambda = \lambda_0$, $\rho''(\lambda_0)$ – вторая производная нормированной корреляционной функции.

Таким образом, дисперсия оценки неэнергетического параметра λ обратно пропорциональна кривизне функции автокорреляции сигнала на выходе приемника в ее максимуме.

8.3.1. Оценка фазы радиосигнала

Пусть на вход приемника поступает аддитивная смесь сигнала с белым шумом

$$x(t) = S(t, \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(t, \varphi) = S_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

$$F_t(\omega) = \frac{N_0}{2} \text{ – спектральная плотность белого шума.}$$

Синтез оптимальной структуры оценки фазы радиосигнала проведем по критерию максимума логарифма функционала правдоподобия:

$$F(\varphi) = \text{const} \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, \varphi) dt\right],$$

$$\frac{d \ln F(\varphi)}{d\varphi} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin(\omega t + \hat{\varphi}) dt = 0. \quad (209)$$

Уравнение (209) моделируется структурной схемой (рис. 47).

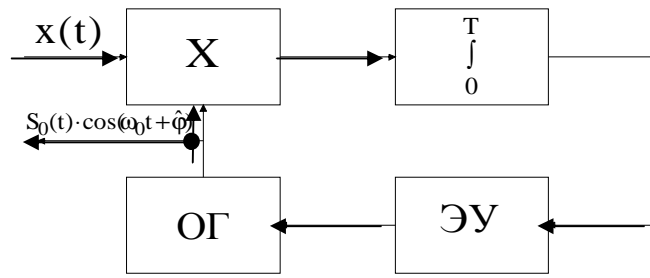


Рис. 47

Опорный генератор (ОГ) формирует гармоническое колебание с оценочной фазой, а элемент управления преобразует напряжение рассогласования в фазовую подстройку частоты. Возможен и другой вариант оптимальной оценки фазы, вытекающий из выражения

$$\hat{\phi} = -\arctg \frac{\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \sin \omega_0 t}{\int_0^T x(t) \cdot S_0(t) \cdot \cos \omega_0 t}. \quad (210)$$

Выражение (210) моделируется структурой (рис. 48)

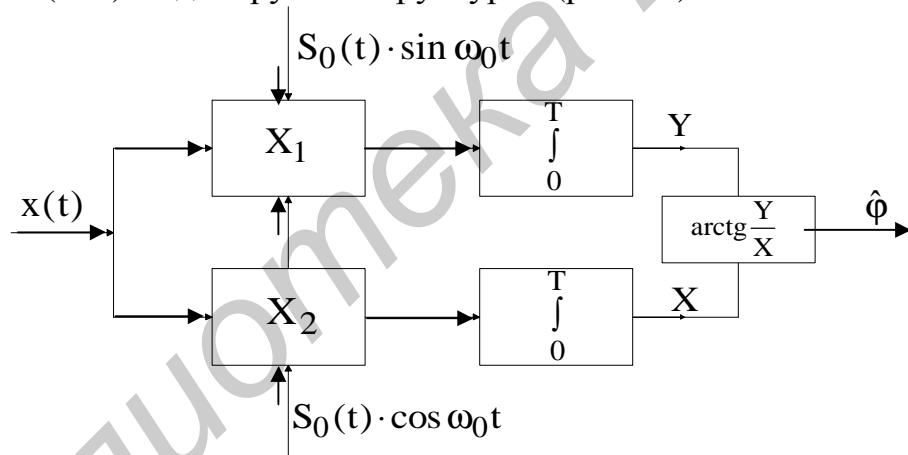


Рис. 48

Произведем количественную оценку качества выделения фазы

$$\sigma_{\phi}^2 = -1/y_c''(\phi_0).$$

Сигнальная функция имеет вид

$$y_c(\phi) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) dt = \frac{2E}{N_0} \cos(\phi - \phi_0).$$

Первая и вторая производные от сигнальной функции

$$y_c'(\phi) = -\frac{2E}{N_0} \sin(\phi - \phi_0),$$

$$y_c''(\phi) = -\frac{2E}{N_0} \cos(\phi - \phi_0).$$

Следовательно, дисперсия оценки фазы примет вид

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \frac{N_0}{2E}. \quad (211)$$

Дисперсия оценки фазы не зависит ни от формы сигнала, ни от вида модуляции и определяется только соотношением между спектральной плотностью шума и энергии радиосигнала.

8.3.2. Оценка временного положения радиосигнала

В колебании $x(t) = S(t, \tau) + n(t)$, $0 \leq t \leq T$, полезный сигнал $S(t, \tau) = S_0(t - \tau) \cos(\omega_0 t + \phi)$ является функцией от временного положения τ . Так как огибающая сигнала – медленно изменяющаяся функция по сравнению с несущей частотой ω_0 , то оценку временного положения сигнала можно проводить, анализируя сигнальную функцию огибающих сигналов

$$y_c(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0(t - \tau_0) \cdot S_0(t - \tau) dt, \quad (212)$$

где τ_0 – истинное значение временного положения сигнала.

Вторая производная сигнальной функции (212) по информационному параметру τ при $\tau = \tau_0$

$$y_c''(\tau_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0(t - \tau_0) \cdot \left[\frac{d^2 S_0(t - \tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=\tau_0} dt. \quad (213)$$

Выразим $y_c''(\tau_0)$ через параметры спектральной функции огибающей, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье

$$S_0'(t - \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t - \tau_0)} d\omega,$$

$$S_0''(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\Omega) e^{j\Omega(t - \tau)} d\Omega,$$

$$\frac{d^2 S_0(t - \tau)}{d\tau^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\Omega) e^{j\Omega(t - \tau)} d\Omega,$$

$$y_c''(\tau_0) = -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{j\omega(t - \tau_0)} e^{j\Omega(t - \tau)} d\omega d\Omega =$$

$$= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{-j(\omega + \Omega)\tau_0} d\omega d\Omega \int_0^T e^{j(\omega + \Omega)t} dt =$$

$$= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S(j\omega) \cdot S(j\Omega) e^{-j(\omega + \Omega)\tau_0} \delta(\omega + \Omega) d\omega d\Omega =$$

$$= -\frac{2}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega = -\frac{2E}{N_0} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\Omega)|^2 d\Omega} = -\frac{2E}{N_0} \cdot F_{\text{эк}}^2, \quad (214)$$

где $S(j\Omega)$ – спектральная функция огибающей сигнала,

E – энергия огибающей сигнала,

$F_{\text{эк}}^2$ – квадрат эквивалентной полосы частот занимаемой огибающей радио-сигнала.

Из (208) и (214) следует

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot F_{\text{эк}}^2}. \quad (215)$$

Эквивалентная полоса частот сигнала $F_{\text{эк}}$ вычисляется по формуле

$$F_{\text{эк}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |S(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\Omega)|^2 d\Omega}}, \quad (216)$$

и ее величина мало чем отличается от эффективной полосы частот, занимаемой сигналом, поэтому на практике обычно принимают $F_{\text{эк}} = F_{\text{эф}}$. Точность оценки временного положения сигнала тем выше, чем шире полоса частот сигнала и больше отношение сигнал/шум на входе приемника.

Структурная схема, представленная на рис. 46, оптимально оценивает временную задержку ($\lambda_i = \tau_i$). Можно синтезировать и следящую оценку временного положения, если приравнять к нулю производную от натурального логарифма функционала правдоподобия по измеряемому параметру τ (203)

$$\frac{d \ln F(\hat{\tau})}{d\hat{\tau}} = \int_0^T x(t) \frac{ds(t - \hat{\tau})}{d\hat{\tau}} dt = 0$$

или

$$\int_0^T x(t) \cdot [S(t - \hat{\tau} + \Delta) - S(t - \hat{\tau} - \Delta)] dt = 0. \quad (217)$$

Временное смещение Δ в (217) выбирается равным или длительности элементарного дискрета, или его половине, если сигнал цифровой. Для непрерывного сигнала Δ равно интервалу дискретизации или половине этого интервала.

На рис. 49 приведена структура следящего измерителя временного положения сигнала, моделирующая уравнение (217).

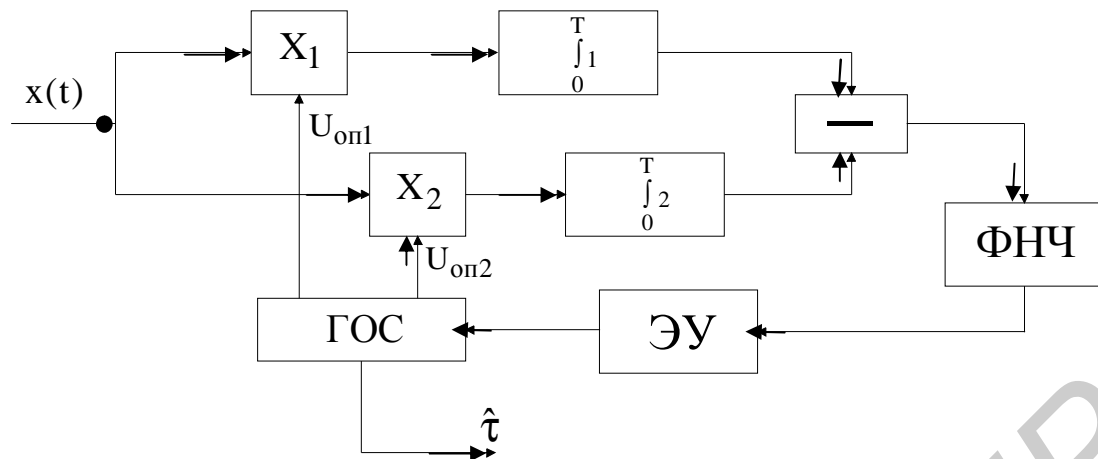


Рис. 49

Генератор опорного сигнала (ГОС) формирует опорные колебания

$$U_{оп1} = S(t - \hat{\tau} + \Delta), \quad U_{оп2} = S(t - \hat{\tau} - \Delta).$$

Элемент управления (ЭУ) преобразует напряжение рассогласования во временную задержку опорных колебаний.

Синтезированные структуры и оценочная характеристика временной задержки составляют основу при проектировании синхронизирующих устройств в системах обработки информационных сигналов.

8.3.3. Оценка смещения частоты радиосигнала

Полезный сигнал

$$S(t, \Omega) = S_0(t) \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi], \quad 0 \leq t \leq T$$

в принимаемой смеси

$$x(t) = S(t, \Omega) + n(t)$$

содержит информацию о смещении частоты Ω . Для этого случая сигнальная функция примет вид

$$\begin{aligned} y_c(\Omega) &= \frac{2}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cdot \cos[(\omega_0 - \Omega_0)t + \varphi] \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi] dt = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^T S_0^2(t) \cos(\Omega - \Omega_0)t dt. \end{aligned} \quad (218)$$

Первая и вторая производные (218)

$$y'_c(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t S_0^2(t) \sin(\Omega - \Omega_0)t dt,$$

$$y''_c(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t^2 S_0^2(t) \cos(\Omega - \Omega_0)t dt.$$

При $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 – истинное значение смещения частоты,

$$y_c''(\Omega) = -\frac{1}{N_0} \int_0^T t^2 S_0^2(t) dt = -\frac{2E}{N_0} \cdot \frac{\int_0^T t^2 S_0^2(t) dt}{\int_0^T S_0^2(t) dt} = -\frac{2E}{N_0} \cdot \alpha^2,$$

где $\int_0^T S_0^2(t) dt = 2E,$

$$\alpha^2 = \frac{\int_0^T t^2 S_0^2(t) dt}{\int_0^T S_0^2(t) dt}$$

имеет размерность круговой частоты в квадрате.

Следовательно, дисперсия оценки смещения круговой частоты примет вид

$$\sigma_{\hat{\Omega}}^2 = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \alpha^2}. \quad (219)$$

Из (219) получим дисперсию оценки смещения действительной частоты

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{\sigma_{\hat{\Omega}}^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \alpha^2 (2\pi)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) T_{\text{эк}}^2}, \quad (220)$$

где $T_{\text{эк}} = 2\pi\alpha$ – эквивалентная длительность сигнала.

Например, для прямоугольного импульса длительности T_c эквивалентная длительность $T_{\text{эк}} = \frac{\pi T_c}{3}$, а для гауссова импульса $(S_0(t) = \exp\left[\frac{-2,8t^2}{T_{\text{эф}}^2}\right])$

$T_{\text{эк}} = \frac{\pi T_{\text{эф}}}{2,8}$, где $T_{\text{эф}}$ – эффективная длительность сигнала, определяемая на уровне 0,5 от максимальной амплитуды.

Из (220) следует: потенциальная точность оценки смещения частоты тем выше, чем больше отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума и эквивалентная длительность.

Многоканальный вариант структурной схемы оптимальной оценки частоты представлен на рис. 46 ($\lambda_i = f_i$). Следящий измеритель смещения частоты вытекает из анализа функционала правдоподобия

$$F(f) = \text{const} \exp\left[-\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot S(t, f) dt\right],$$

$$\frac{d \ln F(f)}{df} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot \frac{dS(t, \hat{f})}{df} dt = 0. \quad (221)$$

На рис. 50 приведена структурная схема следящего измерителя смещения частоты, моделирующего выражение (221).

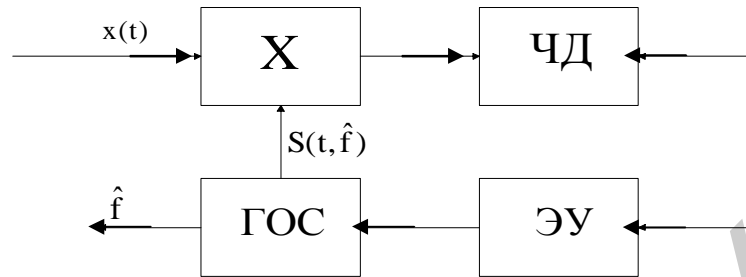


Рис. 50

Частотный дискриминатор (ЧД) вырабатывает напряжение, пропорциональное величине рассогласования между частотой опорного сигнала и информационного входного сигнала, которое через элемент управления (ЭУ) сводит к минимуму рассогласование частот, давая оценку смещения частоты на выходе генератора опорного сигнала в соответствии с выражением (220).

8.3.4. Совместная оценка временного запаздывания и смещения частоты

Часто встречающийся на практике случай требует совместной оценки временного запаздывания τ и доплеровского смещения частоты f . Пусть на вход приемника поступает смесь

$$x(t) = S(t, \tau, f) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (222)$$

где $S(t, \tau, f)$ – полезный информационный сигнал

$$S(t, \tau, f) = S_0(t - \tau) \cdot \cos[(\omega_0 - 2\pi f)t + \psi(t)]. \quad (223)$$

Сигнальная функция для случая (223) примет вид

$$y_c(\tau, f) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \tau_0, f_0) \cdot S(t, \tau, f) dt. \quad (224)$$

Произведем нормировку сигнальной функции по энергии полезного сигнала

$$\overline{y_c(\tau, f)} = \frac{\int_0^T S(t, \tau_0, f_0) \cdot S(t, \tau, f) dt}{\int_0^T S^2(t, \tau, f) dt}. \quad (225)$$

Далее, если ввести обозначения

$$I_{\tau,f} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau,f)}}{\partial \tau \partial f} \right]_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}}, \quad I_{\tau,\tau} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau,f)}}{\partial \tau^2} \right]_{\tau=\tau_0},$$

$$I_{f,f} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau,f)}}{\partial f^2} \right]_{f=f_0}, \quad I_{f,\tau} = \left[\frac{\partial^2 \overline{y_c(\tau,f)}}{\partial f \partial \tau} \right]_{\substack{\tau=\tau_0 \\ f=f_0}},$$

$\Delta = I_{\tau\tau} \cdot I_{ff} - I_{\tau,f} \cdot I_{f,\tau}$, то выполняются соотношения при совместной оценке τ и f :

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{I_{ff}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}; \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{I_{\tau\tau}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}; \quad R_{\hat{\tau}\hat{f}} = \frac{I_{\tau f}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \Delta}. \quad (226)$$

В (226) $I_{\tau\tau} = F_{\text{ЭК}}^2 = F_{\text{ЭФ}}^2$, $I_{ff} = T_{\text{ЭК}}^2$ – эквивалентные полоса и длительность сигнала в квадрате.

$$I_{\tau f} = I_{f\tau} = \overline{(\omega t)} = \int_0^T t \frac{d\psi(t)}{dt} S_0^2(t) dt. \quad (227)$$

Последнее выражение в (227) справедливо, если вторая производная по τ и f непрерывна в точках $\tau = \tau_0$ и $f = f_0$, что на практике всегда выполняется. При $\overline{\omega t} = 0$ оценки по τ и f некоррелированы: отсутствует угловая модуляция или сигнальная функция $y_c(\tau, f)$ является четной функцией относительно точки (τ_0, f_0) по τ или по f . С учетом (227) соотношения (226) запишутся в виде

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \frac{T_{\text{ЭК}}^2}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2 \right]}, \quad \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{F_{\text{ЭК}}^2}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2 \right]},$$

$$R_{\hat{\tau}\hat{f}} = \frac{\overline{(\omega t)}}{\left(\frac{2E}{N_0}\right) \cdot \left[F_{\text{ЭК}}^2 \cdot T_{\text{ЭК}}^2 - (\overline{\omega t})^2 \right]}. \quad (228)$$

В (227) и (228) $\overline{(\omega t)}$ – среднее значение произведения частоты на длительность, $R_{\hat{\tau}\hat{f}}$ – корреляция между оценками частоты и временной задержкой.

При отсутствии корреляции между $\hat{\tau}$ и \hat{f} дисперсии оценок этих параметров совпадают с выражениями (215) и (220) соответственно.

Анализ выражений (228) показывает, что при совместной оценке смещения частоты и временной задержки требования к сигналам противоречивы. Это наблюдается для простых сигналов. Для получения высокой точности оценки по временной задержке необходимо расширять эффективную полосу сигнала, т.е. уменьшать ее длительность. Точность оценки смещения частоты, наоборот, возрастает с увеличением длительности сигнала. Для любого сигнала при неиз-

менном отношении мощности сигнала к мощности шума выполняется равенство

$\sigma_{\hat{\tau}} \cdot \sigma_{\hat{f}} = \text{const}$, которое, в свою очередь, связано с равенством $T_{\text{эк}} \cdot T_{\text{эф}} = \text{const}$. Эти равенства и отражают «принцип неопределенности» в радиолокации, не позволяющий при совместной оценке $\hat{\tau}$ и \hat{f} одновременно получать высокие точные значения, если применяются простые сигналы. При использовании сложных сигналов ($B \gg 1$) возможно получение необходимых значений точности при совместном измерении τ и f , если длительность сигнала выбирается исходя из заданной точности оценки частоты, а желаемая точность оценки временной задержки определяется выбором эффективной полосы частот сигнала за счет введения внутрисигнальной модуляции (частотной, временной, фазовой).

Структурные схемы рис. 46, 49, 50 справедливы и при совместном измерении τ и f .

9. Оптимальная фильтрация сообщений

Наблюдение ведется за случайным процессом:

$$X[t] = S[t, \lambda(t)] + n(t), 0 \leq t \leq T, \quad (229)$$

где $S[t, \lambda(t)]$ – полезный сигнал (известная функция), один из параметров которого несет информацию о сообщении $\lambda(t)$, причем, в отличие от задачи оценки параметров, сообщение $\lambda(t)$ может меняться за время наблюдения T . Как правило, известны все необходимые вероятностные характеристики процессов $\lambda(t)$ и $n(t)$.

Пусть передаваемое информационное сообщение описывается заданным стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = K_1(t_1, \lambda) + n_\lambda(t), \quad (230)$$

где $K_1(t_1, \lambda)$ – известная функция аргументов t и λ ,

$n_\lambda(t)$ – нормальный белый шум с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью N_λ (формирующий белый шум).

В зависимости от вида уравнения наблюдения (229) и уравнения сообщения (230) различают две задачи фильтрации:

1. Линейная фильтрация – уравнения (229) и (230) являются линейными относительно $\lambda(t)$.

2. Нелинейная фильтрация – уравнение (229) или (230) содержит нелинейные функции сообщения $\lambda(t)$.

Процесс $\lambda(t)$, описываемый (230), является диффузионным марковским процессом, априорная плотность вероятности которого определяется уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial P_{pr}(t, \lambda)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(t, \lambda) \cdot P_{pr}(t, \lambda)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(t, \lambda) \cdot P_{pr}(t, \lambda)], \quad (231)$$

где $K_1(t, \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [\lambda(t - \tau) - \lambda(t)] \rangle}{\tau}$ – средняя скорость систематического изменения $\lambda(t)$,

$K_2(t, \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [\lambda(t - \tau) - \lambda(t)]^2 \rangle}{\tau}$ – случайный разброс относительной средней скорости.

Если в качестве критерия оптимальности при фильтрации использовать критерий максимума апостериорной вероятности, то от уравнения для априорной плотности вероятности можно перейти к уравнению для финальной апостериорной плотности вероятности параметра $\lambda(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ps}(t, \lambda)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(t, \lambda) \cdot P_{ps}'(t, \lambda)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(t, \lambda) \cdot P_{ps}(t, \lambda)] + \\ & + [V(t, \lambda) - \langle V(t, \lambda) \rangle] P_{ps}'(t, \lambda), \end{aligned} \quad (232)$$

где $V(t, \lambda) = -\frac{1}{N_0} [X(t) - S[t, \lambda(t)]]^2$ – производная по времени от логарифма функционала правдоподобия $V[t, \lambda] = \frac{\partial \ln F(t, \lambda)}{\partial t}$,

$$\langle V(t, \lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(t, \lambda) \cdot P_{ps}(t, \lambda) d\lambda.$$

Начальные условия для уравнения (232) определяются априорной плотностью вероятности $P_{pr}(0, \lambda)$ начальной координаты $\lambda(0) = \lambda_0$.

Для гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности

$$P_{ps}'(t, \hat{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}} \exp \left[-\frac{[\hat{\lambda}(t) - \lambda_0(t)]^2}{2\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)} \right],$$

где $\lambda_0(t)$ – матожидание процесса $\lambda(t)$.

Можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = K_1(\hat{\lambda}, t) + \sigma_{\hat{\lambda}}(t) \frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}}, \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = K_2(\hat{\lambda}, t) + 2K_1'(\hat{\lambda}, t) \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) + \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (233)$$

Система уравнений (233) позволяет синтезировать структуру оптимальной фильтрации сообщения $\lambda(t)$ и оценить потенциальные возможности этой структуры.

9.1. Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана

Пусть наблюдается смесь

$$x(t) = \lambda(t) + n(t), 0 \leq t \leq T, \quad (234)$$

где $n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$, а сообщение $\lambda(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением (уравнением Ланжевена) вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t), \quad (235)$$

где α – постоянный коэффициент, определяющий ширину спектра сообщения $\lambda(t)$,

$n_\lambda(t)$ – другой белый шум со спектральной плотностью $F_{n_\lambda}(\omega) = \frac{N_\lambda}{2}$.

Если пропустить белый шум $n_\lambda(t)$ через RC-цепочку с постоянной времени $\tau_{RC} = \frac{1}{\alpha}$, то получится $\lambda(t)$.

Уравнения (234) и (235) являются линейными относительно $\lambda(t)$.

Система уравнений фильтрации (233) для рассматриваемого случая примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + s_{\hat{\lambda}}(t) \frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}}, \\ \frac{ds_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha s_{\hat{\lambda}}^2(t) + s_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (236)$$

В системе уравнений (236) $K_1(\hat{\lambda}, t) = -\alpha\hat{\lambda}(t)$, $K_2(\hat{\lambda}, t) = \frac{N_\lambda}{2}$,

$$K_1'(\hat{\lambda}, t) = \frac{\partial K_1(\hat{\lambda}, t)}{\partial \hat{\lambda}},$$

$$V(t, \hat{\lambda}) = -\frac{1}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)]^2,$$

$$\frac{\partial V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} = \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)],$$

$$\frac{\partial^2 V(t, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}^2} = -\frac{2}{N_0}.$$

Уравнения фильтрации с учетом полученных значений примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + s_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \\ \frac{ds_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha s_{\hat{\lambda}}^2(t) - s_{\hat{\lambda}}^4(t) \frac{2}{N_0}. \end{cases} \quad (237)$$

Эти уравнения описывают фильтр Калмана. Первое уравнение используется для построения фильтра. Воспользуемся преобразованием

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} + \alpha\hat{\lambda}(t) &= s_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \\ \hat{\lambda}(t) \left[\frac{d}{dt} + \alpha \right] &= s_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \quad \frac{d}{dt} = P, \\ \hat{\lambda}(t) &= \frac{s_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0} [x(t) - \hat{\lambda}(t)]}{P + \alpha}. \end{aligned} \quad (238)$$

На рис. 51 приведена структура фильтра Калмана, построенная в соответствии с выражением (238).

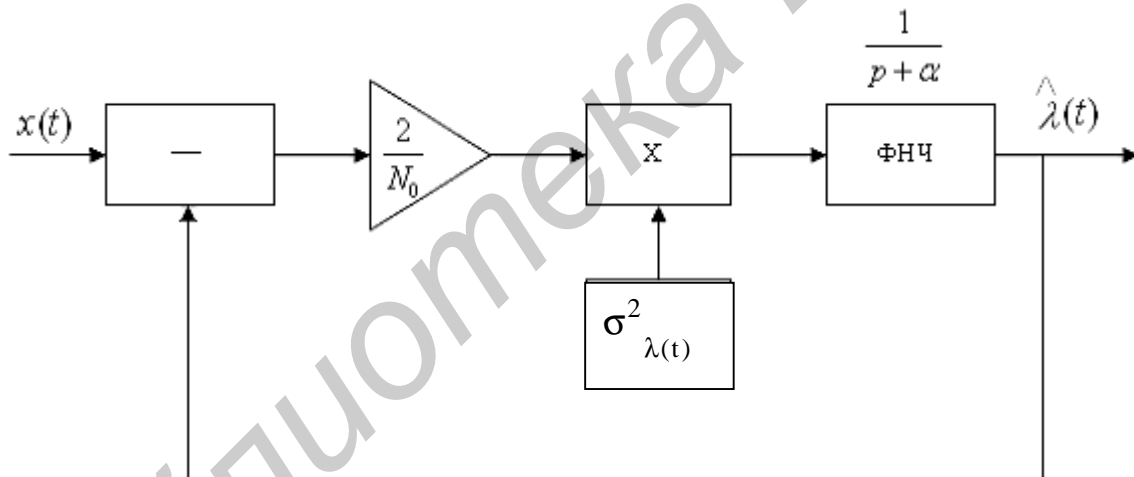


Рис. 51

Этот фильтр является фильтром с переменными параметрами.

Второе уравнение фильтрации используется для оценки потенциальной точности выделяемого сообщения.

Если $\sigma_{\lambda}^2 = \frac{N_{\lambda}}{4\alpha}$ – дисперсия сообщения на входе фильтра, то $\frac{s_{\hat{\lambda}}^2(t)}{s_{\lambda}^2(t)} = \text{const}$ в

установившемся режиме (рис. 52).

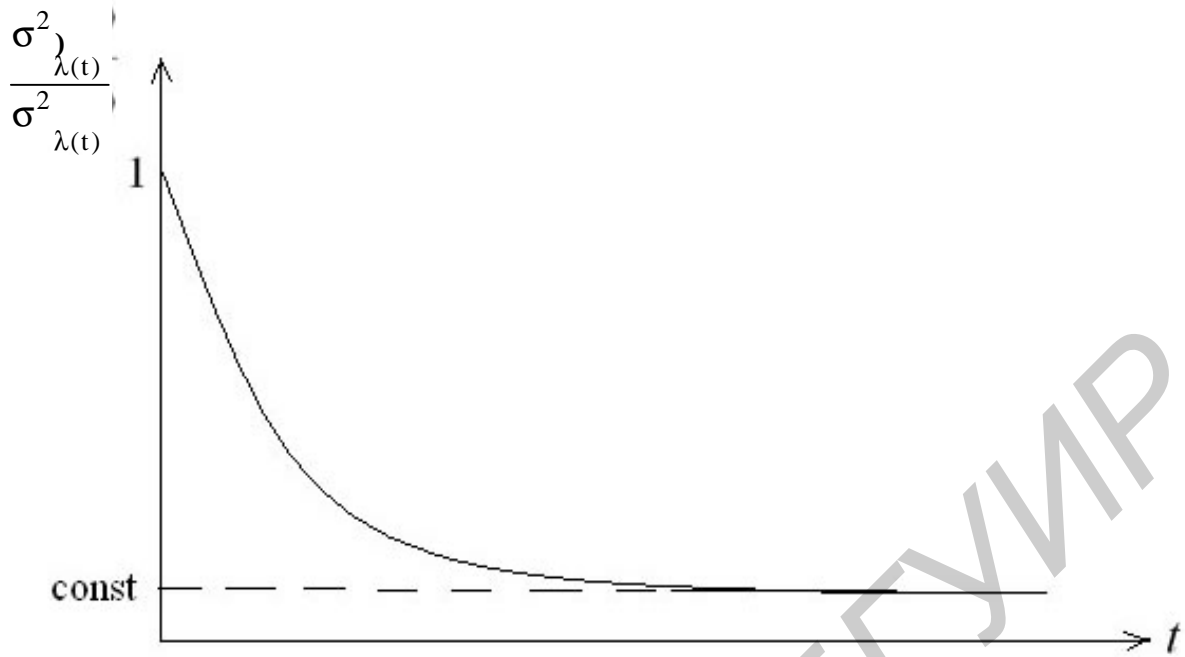


Рис. 52

Фильтр Калмана обеспечивает минимум средней квадратической ошибки как в переходном, так и в установившемся режиме. Стационарный режим предполагает

гаит $\frac{dS_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = 0$, поэтому стационарную дисперсию выделенного сообщения находят из второго уравнения фильтрации (237)

$$\frac{2}{N_0} S_{\hat{\lambda}}^4(t) + 2\alpha S_{\hat{\lambda}}^2(t) - \frac{N_{\lambda}}{2} = 0, \quad S_{\hat{\lambda}}^2(t) = \frac{N_0 \alpha}{2} + \sqrt{\frac{N_0^2 \alpha^2 + N_0 N_{\lambda}}{4}}. \quad (239)$$

Следовательно, в стационарном режиме устройство формирования дисперсии $[S_{\hat{\lambda}}^2(t)]$ не нужно.

Важным параметром в фильтре Калмана является чувствительность фильтра к отклонению его параметров.

Рассмотрим, как будет изменяться дисперсия ошибки от коэффициента передачи фильтра при стационарной фильтрации.

Первое уравнение фильтрации (237) можно записать в виде

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha \hat{\lambda}(t) + k [x(t) - \hat{\lambda}(t)], \quad (240)$$

где $k = S_{\hat{\lambda}}^2 \frac{2}{N_0}$ – коэффициент передачи фильтра.

Если априорное отклонение $\lambda(t)$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha \lambda(t) + n_{\lambda}(t),$$

то ошибку за счет изменения k можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t).$$

Уравнение для ошибки при этом примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= -\alpha\varepsilon(t) + n\lambda(t) - kx(t) + k\lambda(t) - k\varepsilon(t) = \\ &= (\alpha + k)\varepsilon(t) + n\lambda(t) - kn(t). \end{aligned} \quad (241)$$

Дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ в (241) для стационарного режима

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{(N_{\lambda} + N_0 \cdot k^2)}{4(\alpha + k)}. \quad (242)$$

При $k = k_{\text{опт}}$, которое находится из уравнения $\frac{d\sigma_{\varepsilon}^2(t)}{dk} = 0$, σ_{ε}^2 будет минимальной.

На рис. 53 приведен график зависимости дисперсии ошибки от коэффициента передачи фильтра.

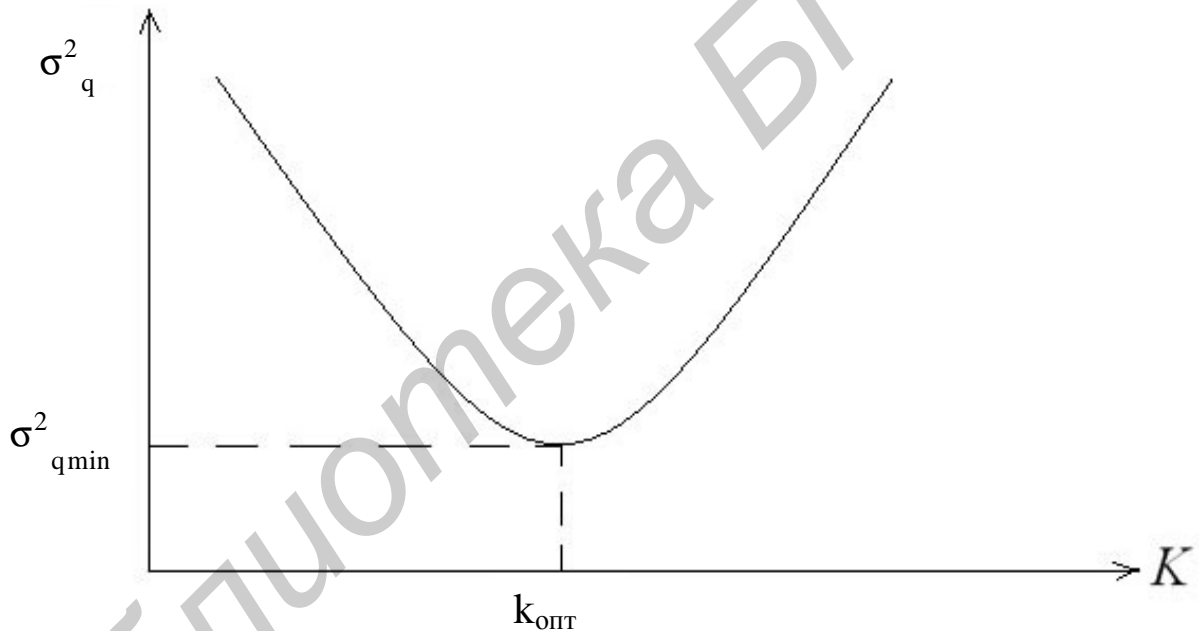


Рис. 53

Минимальное значение дисперсии соответствует $k_{\text{опт}}$.

Найдем выражение для вычисления оптимального коэффициента передачи:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon}^2}{dk} = \frac{4(\alpha + k_{\text{опт}}) \cdot 2N_0k_{\text{опт}} - (N_{\lambda} + N_0k_{\text{опт}}^2)^2}{[4(\alpha + k_{\text{опт}})]^2} = 0,$$

$$k_{\text{опт}}^2 + 2\alpha k_{\text{опт}} - \frac{N_{\lambda}}{N_0} = 0,$$

$$k_{\text{опт}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{N_{\lambda}}{N_0}}. \quad (243)$$

Если за время наблюдения T сообщение мало изменяется, т.е. $\frac{d\lambda(t)}{dt} \approx 0$, то фильтр Калмана сводится к обычному полосовому фильтру, синтезированному по критерию минимума средней квадратической ошибки.

При оптимальной линейной фильтрации сообщения из входной смеси $x[t] = S[t, \lambda(t)] + n(t), 0 \leq t \leq T$,

где $S[t, \lambda(t)] = \lambda(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$,

$n(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$,

$\lambda(t)$ – диффузионный марковский процесс типа (235),

первое уравнение фильтрации примет вид

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = - \left(\alpha + \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{N_0} \right) \hat{\lambda}(t) + 2 \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{N_0} x(t) \cdot \sin \omega_0 t. \quad (244)$$

Уравнение (244) можно моделировать фильтром разомкнутого типа (рис. 54), в котором перемножитель и RC-фильтр выполняют функцию синхронного детектора, причем интегрирующая цепочка RC имеет постоянную времени

$$\tau_{RC} = \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\sigma_{\hat{\lambda}}^2}{N_0} \right)}$$

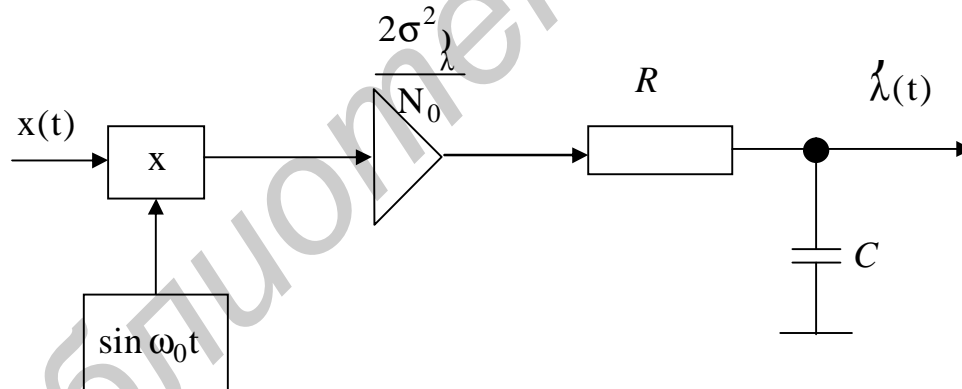


Рис. 54

9.2. Оптимальная нелинейная фильтрация

Если в наблюдаемой смеси

$$x(t) = S[t, \lambda(t)] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (245)$$

сообщение $\lambda(t)$ модулирует неэнергетический параметр сигнала $S[t, \lambda(t)]$ (нелинейная связь), $n(t)$ – белый шум с постоянной спектральной плотностью

$F_n(\omega) = \frac{N_\lambda}{2}$ в полосе приемника, а само сообщение $\lambda(t)$ является марковским

процессом и описывается дифференциальным уравнением типа (235), то система уравнений фильтрации примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = -\alpha\hat{\lambda}(t) + \frac{2}{N_0} \cdot \sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) \cdot x(t) \frac{\partial S[t, \hat{\lambda}(t)]}{\partial \hat{\lambda}}, \\ \frac{d\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t) + \frac{2}{N_0} \cdot \sigma_{\hat{\lambda}}^4(t) \cdot x(t) \cdot \frac{\partial^2 S[t, \hat{\lambda}(t)]}{\partial \hat{\lambda}^2}. \end{cases} \quad (246)$$

Уравнения (246) оптимальной нелинейной фильтрации получаются из уравнения (236) при $V(t, \hat{\lambda}) = \frac{2}{N_0} \cdot x(t) \cdot S[t, \hat{\lambda}(t)]$, так как $\hat{\lambda}(t)$ – неэнергетический параметр.

В системе (246) первое уравнение описывает нелинейный фильтр оценки фильтруемого параметра $\hat{\lambda}(t)$, а второе уравнение – устройство формирования текущего значения дисперсии оценки $\sigma_{\hat{\lambda}}^2(t)$.

На примере фильтрации фазы узкополосного сигнала рассмотрим синтез нелинейного фильтра. Пусть в смеси (237) сигнал $S[t, \lambda(t)]$ – узкополосный радиосигнал вида

$$S[t, \varphi] = A_0 \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (247)$$

где амплитуда радиосигнала A_0 и его частота ω_0 считаются известными, а фаза $\lambda(t) = \varphi(t)$ является случайной.

Для простоты возьмем $\varphi(t)$ заданным винеровским процессом

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = n_{\varphi}(t), \quad (248)$$

где $n_{\varphi}(t)$ – белый шум со спектральной плотностью $F_n(\omega) = \frac{N_{\varphi}}{2}$ и функцией корреляции $r(t_1, t_2) = 1/2 N_{\varphi} \cdot \delta(t_2 - t_1)$.

С учетом (245), (247) и (248) уравнения фильтрации (238) примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\frac{2A_0}{N_0} \sigma_{\hat{\varphi}}^2(t) \cdot x(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \hat{\varphi}), \\ \frac{d\sigma_{\hat{\varphi}}^2}{dt} = \frac{N_{\varphi}}{2} - \frac{2A_0}{N_0} \sigma_{\hat{\varphi}}^4(t) \cdot x(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \hat{\varphi}). \end{cases} \quad (249)$$

На рис. 55 приведена структурная схема нелинейного фильтра, описываемого уравнениями (249).

Эта схема отражает оптимальную схему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Нижняя часть схемы, обведенная пунктиром, является схемой АРУ, регулирующей коэффициент усиления входного усилителя. Коэффициенты

$$K_1 = K_2 = \frac{2}{N_0}.$$

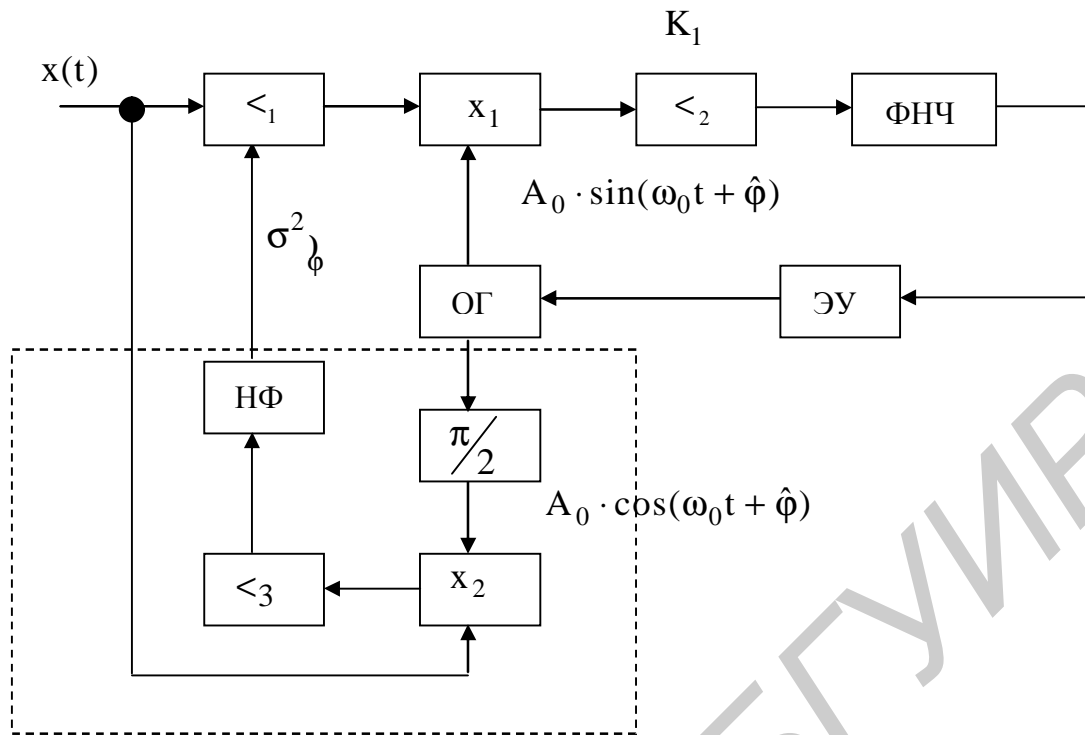


Рис. 55

В стационарном режиме работы при больших отношениях сигнал/шум второе уравнение фильтрации (249) $\frac{d\sigma_{\hat{\phi}}^2}{dt} \approx 0$ и дисперсия оценки фильтрации фазы не зависит от времени, принимая значение

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \sqrt{\frac{N_0 N_{\phi}}{2A_0^2}}. \quad (250)$$

При этом схему рис. 55 можно упростить до схемы ФАПЧ рис. 56, считая ее квазиоптимальным приближением устройства слежения за случайной фазой узкополосного радиосигнала.

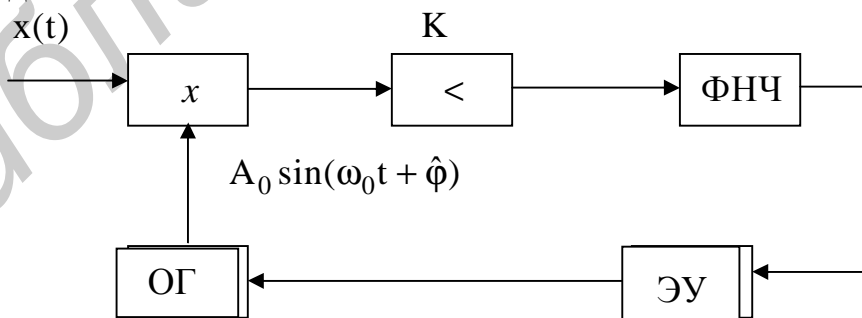


Рис. 56

На рис. 56 коэффициент усиления усилителя $K = \sqrt{\frac{2N_{\phi}}{2A_0^2 N_0}}$, а элемент управ-

ления (ЭУ) преобразует напряжение рассогласования фаз в смещение частоты опорного генератора (ОГ).

10. Оптимальное разрешение

Как отмечалось ранее (раздел 1), при оптимальном разрешении принимается реализация

$$X(t) = \sum_{i=1}^k S_i(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где в общем случае параметр $\lambda = f(\lambda_i, j)$, $j = \overline{1, m}$, а $n(t)$ – по-прежнему белый шум с постоянной спектральной плотностью $F_n(\omega) = N_0/2$.

Задачу разрешения можно представить как две частные задачи: разрешение–разделение, разрешение–измерение.

В задаче разрешение–разделение принимаемую реализацию можно записать в виде

$$X(t) = \sum_{I=1}^K \lambda_i s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (251)$$

где λ_i принимает значение 1 или 0.

Ансамбль сигналов

$\{S_i(t)\}$, $i = \overline{1, K}$ характеризуется коэффициентами взаимной корреляции

$\rho_{j,i}$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, k}$, $j \neq i$. Каждый из сигналов ансамбля несет свою информацию о передаваемом сообщении. Требуется синтезировать оптимальную структуру различаемых сигналов $S_i(t)$ для любых сочетаний λ_i из заданных значений. Задача оптимального разрешения–разделения отличается от задачи оптимального различения тем, что на входе приемника одновременно могут присутствовать несколько полезных сигналов или отсутствовать все.

Рассмотрим эту задачу для случая разрешения–разделения двух сигналов ($k = 2$):

$$X(t) = \lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (252)$$

Естественно предположить, что λ_1 и λ_2 – независимые случайные величины, принимающие значения 1 или 0, а $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – полностью известные функции времени с одинаковыми энергиями $E_1 = E_2 = E$ и коэффициентом взаимной

корреляции $\rho_{1,2} = \frac{1}{E_0} \int_0^T S_1(t) \cdot S_2(t) dt$. В качестве критерия оптимизации воспользуемся максимизацией логарифма функционала правдоподобия (38)

$$\ln F(\lambda_1, \lambda_2) = \max. \quad (253)$$

Для нашего случая функционал правдоподобия примет вид

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - S(t, \lambda_1, \lambda_2)]^2 dt \right\}, \quad (254)$$

где $S(t, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t)$.

С учетом (254) найдем значение (253):

$$\begin{aligned} \ln F(\lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2 \int_0^T x(t) \cdot S(t, \lambda_1, \lambda_2) dt + \int_0^T S^2(t, \lambda_1, \lambda_2) dt \right] = \\ &= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2\lambda_1 \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - 2\lambda_2 \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_1^2 \int_0^T S_1^2(t) dt + 2\lambda_1 \lambda_2 \int_0^T S_1'(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_2^2 \int_0^T S_2'^2(t) dt \right] = \\ &= -\frac{1}{N_0} \left[\int_0^T x^2(t) dt - 2\lambda_1 \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - 2\lambda_2 \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt + \lambda_1^2 E + 2\lambda_1 \lambda_2 E \rho_{1,2} + \lambda_2^2 E \right]. \end{aligned} \quad (255)$$

Выражение (255) принимает максимальное значение, когда имеется минимальная ошибка оцениваемых параметров $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$. Оцениваемые параметры можно найти, решив дифференциальные уравнения

$$\frac{d \ln F(\lambda_1, \lambda_2)}{d \lambda_1} = 0, \quad \frac{d \ln F(\lambda_1, \lambda_2)}{d \lambda_2} = 0. \quad (256)$$

Дифференциальные уравнения (256) дадут систему уравнений

$$\begin{cases} \int_0^T x(t) \cdot S_1(t) dt - \hat{\lambda}_1 E - \hat{\lambda}_2 E \rho_{1,2} = 0, \\ \int_0^T x(t) \cdot S_2(t) dt - \hat{\lambda}_2 E - \hat{\lambda}_1 E \rho_{1,2} = 0. \end{cases} \quad (257)$$

Решая систему (257), получим

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{E} \cdot (1 - \rho_{1,2}^2) \cdot \int_0^T x(t) \cdot [S_1(t) - \rho_{1,2} S_2(t)] dt, \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{1}{E} \cdot (1 - \rho_{1,2}^2) \cdot \int_0^T x(t) \cdot [S_2(t) - \rho_{1,2} S_1(t)] dt. \end{aligned} \quad (258)$$

На рис. 57 приведена оптимальная структура приемника, реализующая алгоритмы (258). Генератор опорных сигналов (ГОС) формирует сигналы

$$S_{оп1}(t) = S_1(t) - \rho_{1,2} S_2(t),$$

$$S_{оп2}(t) = S_2(t) - \rho_{1,2} S_1(t).$$

Коэффициенты усилителей $K_1 = K_2 = 1/E(1 - \rho_{1,2}^2)$, а пороговые устройства ПУ₁ и ПУ₂ выполняют функции устройств принятия решений. Синхронизирующее устройство (СУ) дает оценку временного положения входящих сигналов.

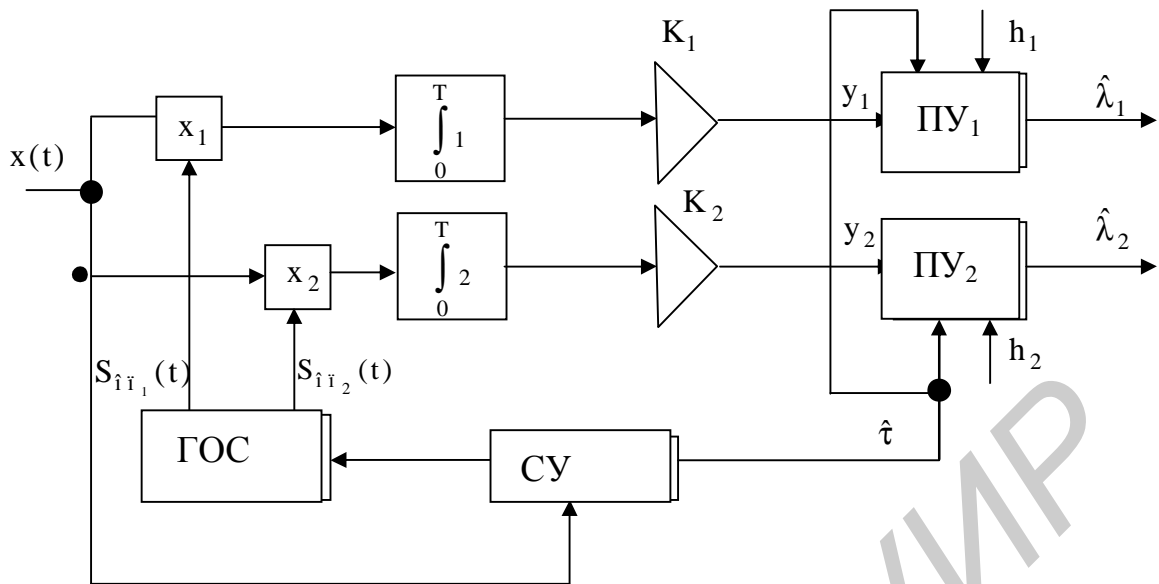


Рис. 57

Если принимаемые сигналы ортогональны ($\rho_{1,2} = 0$), то структура приемника ничем не отличается от обнаружителей двух известных сигналов. Поэтому качество работы приемника можно оценить по характеристикам обнаружения.

Так как $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – случайные величины с нормальным законом распределения, то математические ожидания и дисперсии этих величин принимают значения:

$$m_{\hat{\lambda}_i} = \begin{cases} 1, & \lambda_i = 1; \\ 0, & \lambda_i = 0 \end{cases};$$

$$\sigma_{\hat{\lambda}_i}^2 = \frac{N_0}{2E(1-\rho_{1,2}^2)} = \sigma_{\hat{\lambda}}^2. \quad (259)$$

По аналогии с (109) и (110) получим выражения для вероятности правильного разрешения–разделения и вероятности ложной тревоги

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(\frac{h-1}{\sigma_{\hat{\lambda}}}\right), \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_{\hat{\lambda}}}\right). \end{cases} \quad (260)$$

Если порог h выбрать оптимальным (т.к. минимизируется общая ошибка, а следовательно, $h = h_{\text{опт}} = 1/2$), то характеристики разрешения–разделения примут вид

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right), \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{\lambda}}}\right). \end{cases} \quad (261)$$

С учетом (259) характеристики (261) можно записать в виде

$$\begin{cases} P_{\text{по}} = \Phi\left[\frac{E}{N_0}(1 - \rho_{1,2}^2)\right], \\ P_{\text{лт}} = 1 - \Phi\left[\frac{E}{N_0}(1 - \rho_{1,2}^2)\right]. \end{cases} \quad (262)$$

Из (262) следует, что наилучшие результаты при разрешении–разделении получаются, когда разрешаемые сигналы ортогональны ($\rho_{1,2} = 0$). При разрешении k сигналов ($k > 2$) структура приемника многоканальна (рис. 58) и наилучшие качественные показатели разрешения–разделения получаются для взаимно ортогональных разрешаемых сигналов ($\rho_{ij} = 0; i \neq j; i, j = \overline{1, k}$). Характеристики разрешения (262) справедливы и для $k > 2$, если $\rho_{1,2}$ заменить ρ_{ij} , а пороги обнаружения в каждом канале (рис. 58) взять оптимальными.

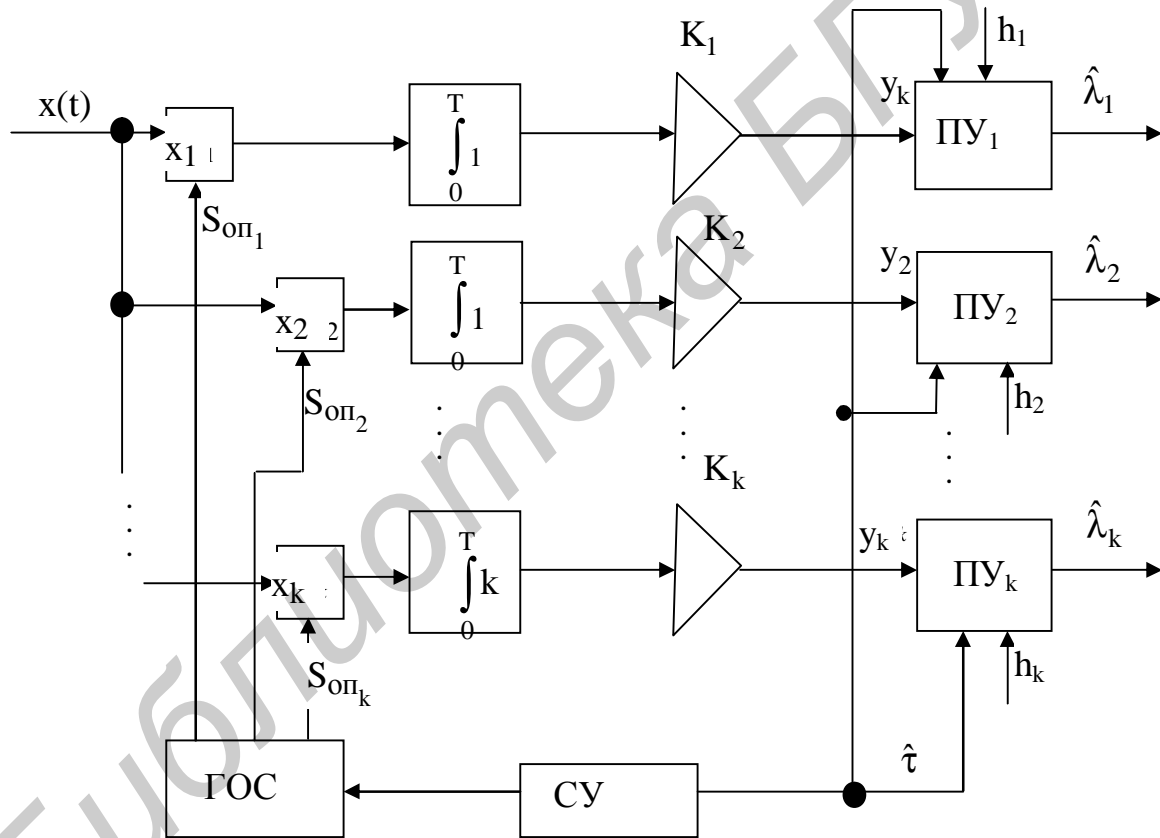


Рис. 58

Структуры (рис. 57, 58) получены для разрешения известных сигналов. При разрешении сигналов с неизвестными начальными фазами структура обработки соответствует рис. 59.

Если разрешаемые сигналы взаимно ортогональны и имеют одинаковые энергии, то импульсный отклик каждого согласованного фильтра имеет вид

$$g_i(t) = c \frac{S_i(T-t)}{E}, \quad (263)$$

а характеристики обнаружения строятся исходя из выражения

$$P_{\text{по}} = \Phi\left[\sqrt{\frac{2E}{N_0}} - \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{P_{\text{лт}}}\right)}\right]. \quad (264)$$

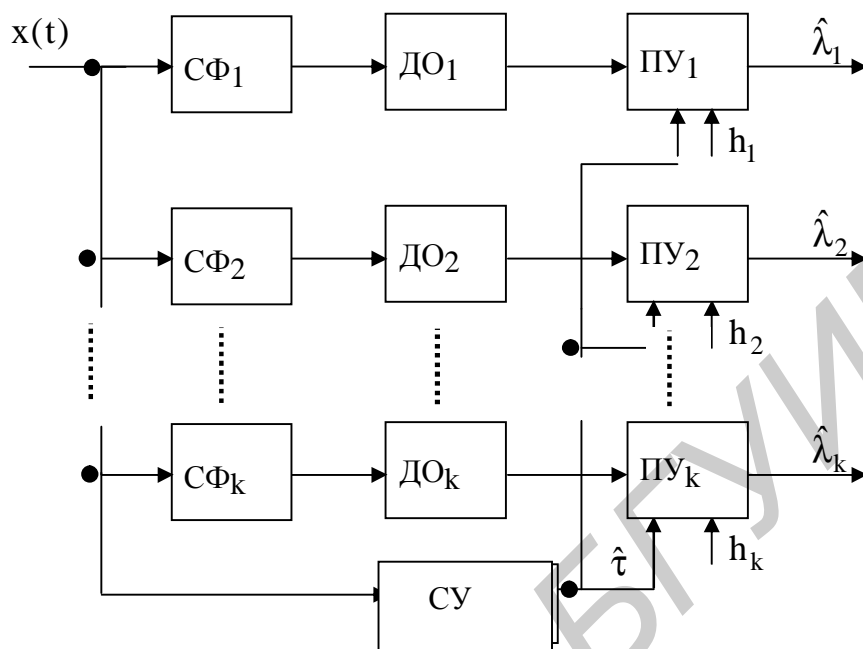


Рис. 59

Задача разрешения–измерения характерна для радиолокационных систем, когда отраженные сигналы от множества объектов наблюдения требуется разрешить по одному или нескольким параметрам: дальности, радиальной скорости, угловым координатам.

При разрешении по дальности отраженные сигналы имеют одинаковые формы и отличаются временной задержкой. Пусть $S(t)$ и $S(t - \tau)$ – сигналы, отраженные от двух объектов, находящихся на разных дальностях от точки наблюдения. Воспользуемся геометрической интерпретацией расстояния между этими сигналами для гильбертова пространства

$$d = \sqrt{\int_0^T [S(t) - S(t - \tau)]^2 dt} = \sqrt{2E[1 - \rho(\tau)]}, \quad (265)$$

где E – энергия,

$$\rho(\tau) = 1/E \int_0^T S(t) \cdot S(t - \tau) dt \quad \text{– нормированная автокорреляционная функция сигнала.}$$

Выражение (265) удобно представить в виде

$$d^2 = 2E[1 - \rho(\tau)]. \quad (266)$$

Из (266) следует, что разрешение по времени зависит от вида автокорреляционной функции (АКФ) сигнала и, в частности, определяется шириной основного пика АКФ или временем корреляции (τ_k).

Интервал времени, в пределах которого сигналы считаются неразрешенными, называют интервалом неопределенности – τ_H :

$$\tau_H = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) d\tau = \tau_k. \quad (267)$$

Наименьшим интервалом неопределенности, а следовательно, и наилучшей разрешающей способностью по временной задержке обладают сложные сигналы.

Аналогичным образом можно показать, что интервал неопределенности смещения частоты определяется выражением

$$\Omega_H = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Omega) d\Omega, \quad (268)$$

где $\rho(\Omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot S[j(\omega - \Omega)t] d\omega$ – нормированная функция частной корреляции,

$S(j\omega)$ – спектральная функция отраженного сигнала.

Из (268) следует, что наилучшей разрешающей способностью по смещению частоты обладают протяженные сигналы.

При совместной оценке разрешения сигналов по временной задержке и смещению частоты

$$S_1(t) = S(t) = S_0(t) \exp(j\omega_0 t),$$

$$S_2(t) = S(t, \tau, \Omega) = S_0(t - \tau) \exp[j(\omega_0 - \Omega)t].$$

Эквивалентный интервал неопределенности Δ_i определяется выражением

$$\Delta_H = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau, \Omega) d\tau d\Omega, \quad (269)$$

где $|\rho(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_0^1 S_0(t) \cdot S_0(t - \tau) \exp(-j\Omega t) dt \right|$ – функция неопределенности сигнала (модуль нормированной двумерной автокорреляционной функции). (270)

Эквивалентный интервал неопределенности (269) – это сечение тела неопределенности (270) горизонтальной плоскостью на уровне 0,5. Он соответствует области сильной корреляции и называется диаграммой неопределенности (ДН). Вид ДН-сигнала позволяет дать оценку разрешений по временной задержке и смещению частоты, а следовательно, определить разрешающие способности по дальности и радиальной скорости.

На рис. 60 приведена ДН прямоугольного импульса длительности T .

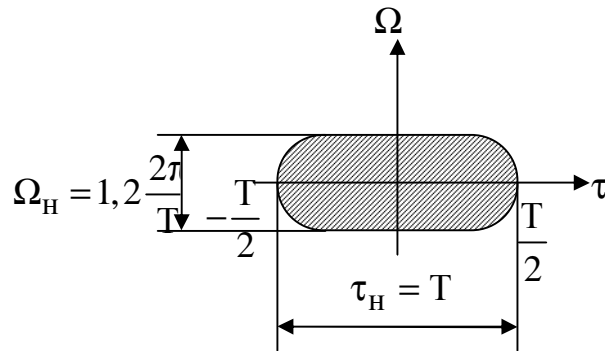


Рис. 60

Вид ДН вытекает из аналитического описания функции неопределенности прямоугольного импульса

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \left| \frac{\sin \left[\frac{\Omega}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) T \right]}{\frac{\Omega T}{2}} \right|, \quad |\tau| \leq T. \quad (271)$$

Из рис. 60 можно получить потенциальные разрешающие способности по дальности и радиальной скорости:

$$\begin{aligned} \delta D &= 0,5c \cdot \tau_H = 0,5 \cdot c \cdot T, \\ \delta V_r &= 0,5 \cdot \frac{c}{f_0} \cdot \frac{\Omega_H}{2\pi} = 0,6 \cdot \frac{\lambda}{T}, \end{aligned} \quad (272)$$

где c – скорость распространения электромагнитных колебаний,

$\lambda = \frac{c}{f_0}$ – длина волны электромагнитного колебания.

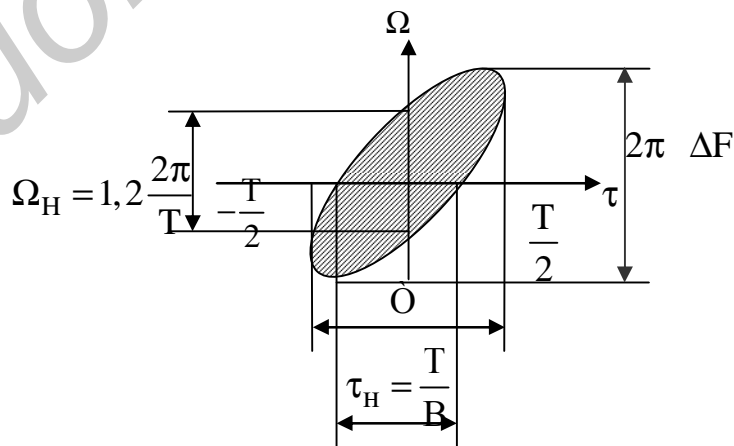


Рис. 61

На рис. 61 представлена ДН сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнала). Аналитическое описание функции неопределенности ЛЧМ-сигнала с девиацией частоты ΔF [9]

$$|\rho(\tau, \Omega)| = \left| \frac{\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \sin 0,5 \left(\frac{2\pi\Delta F}{T} - \Omega \right) (T - |\tau|)}{0,5 \left(\frac{2\pi\Delta F\tau}{T} - \Omega \right) (T - |\tau|)} \right|. \quad (273)$$

Из рис. 61 следует: интервал неопределенности по времени $\tau_H = T/B$, где $B = \Delta F \cdot T$ – база ЛЧМ-сигнала, интервал неопределенности по частоте $\Omega_H = 1,2 \cdot \frac{2\pi}{T}$. Соответственно, разрешающие способности по дальности и радиальной скорости для сложного сигнала:

$$\begin{aligned} \delta D &= 0,5 \cdot cT/B, \\ \delta V_r &= 0,6 \cdot \lambda/T. \end{aligned} \quad (274)$$

Следовательно, применение сложных сигналов в базу раз улучшает разрешающую способность по дальности, не ухудшая разрешения по радиальной скорости.

В радиолокации решение часто принимается по анализу пакета отраженных импульсов длительностью T с периодом следования T_{Π} .

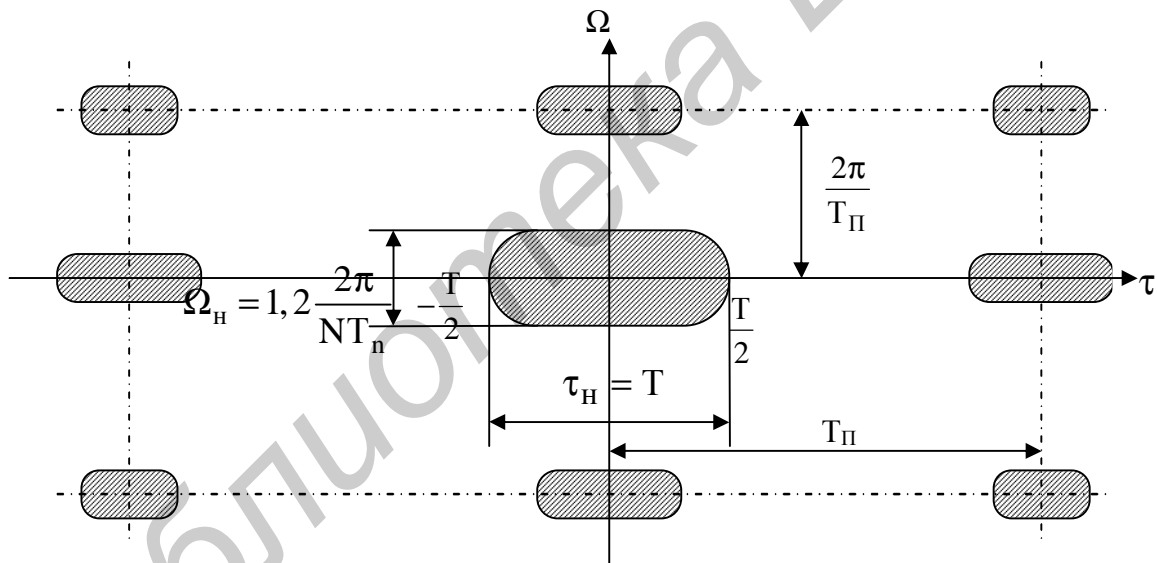


Рис. 62

На рис. 62 приведена ДН для пакета из N импульсов. Из рисунка следует: интервал неопределенности по времени $\tau_H = T$, интервал неопределенности по частоте $\Omega_H = 1,2 \cdot \frac{2\pi}{NT_{\Pi}}$. Выражения для разрешения по дальности и радиальной скорости при обработке пакета из N импульсов с периодом следования T_{Π} примут вид

$$\begin{aligned} \delta D &= 0,5 \cdot T \cdot c, \\ \delta V_r &= 0,6 \cdot \frac{\lambda}{NT_{\Pi}}. \end{aligned} \quad (275)$$

Анализ (274) показывает, что обработка пакета из N импульсов может существенно повысить разрешающую способность по радиальной скорости, не ухудшая разрешения по дальности. Однако следует учесть, что при обработке пакета из N импульсов возможна неоднозначность в оценках дальности и радиальной скорости.

Библиотека БГУИР

Литература

1. Котельников, В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости / В. А. Котельников. – М. : Госэнергоиздат, 1958.
2. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М. : Радио-связь, 1982.
3. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1983.
4. Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. – М. : Высш. школа, 1990.
5. Чердынцев, В. А. Радиотехнические системы / В. А. Чердынцев. – Минск : Вышэйш. школа, 1988.
6. Тихонов, В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991.
7. Охрименко, А. Е. Основы извлечения, обработки и передачи информации. Ч. 1–3 / А. Е. Охрименко. – Минск : БГУИР, 1994, 1995.
8. Информационные технологии в радиотехнических системах / под ред. И. Б. Федорова. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
9. Карпушкин, Э. М. Основы теории радиотехнических систем / Э. М. Карпушкин. Ч. 1. – Минск : МРТИ, 1993.
10. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968.

Содержание

Введение.....	3
1. Основные задачи теории оптимальных методов радиоприема..	4
2. Понятие об апостериорной вероятности.....	6
3. Критерии оптимального приема.....	9
3.1. Критерий минимума средней квадратической ошибки.....	9
3.2. Критерий максимума отношения сигнал/шум.....	10
3.3. Критерий идеального наблюдателя.....	10
3.4. Критерий максимума апостериорной вероятности, отношения правдоподобий.....	11
4. Оптимальный линейный фильтр.....	12
5. Согласованный фильтр.....	16
5.1. Синтез и анализ.....	16
5.2. Примеры согласованных фильтров.....	21
6. Обнаружение радиосигналов.....	27
6.1. Обнаружение известного (детерминированного) радиосигнала.....	29
6.2. Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой.....	34
6.3. Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой и флюктуирующей амплитудой.....	40
6.4. Обнаружение пакетов радиоимпульсов.....	46
6.4.1. Обнаружение когерентного пакета.....	46
6.4.2. Обнаружение некогерентного пакета.....	47
6.5. Обнаружение случайного сигнала.....	49
7. Различение радиосигналов.....	52
7.1. Различение известных радиосигналов.....	53
7.2. Различение радиосигналов с неизвестными начальными фазами.....	60
8. Оценка параметров радиосигнала.....	66
8.1. Оценка амплитуды известного радиосигнала.....	67
8.2. Оценка амплитуды радиосигнала с неизвестной начальной фазой.....	68
8.3. Оценка неэнергетических параметров радиосигналов.....	71
8.3.1. Оценка фазы радиосигнала.....	72
8.3.2. Оценка временного положения радиосигнала.....	74
8.3.3. Оценка смещения частоты радиосигнала.....	76
8.3.4. Совместная оценка временного запаздывания и смещения частоты... 78	
9. Оптимальная фильтрация сообщений.....	80
9.1. Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана.....	82
9.2. Оптимальная нелинейная фильтрация.....	86
10. Оптимальное разрешение.....	89
Литература.....	98

Учебное издание

Карпушкин Эдуард Михайлович

Основы теории радиотехнических систем

Учебно-методическое пособие
для студентов радиотехнических специальностей

В 2-х частях
Часть 2

Оптимальный прием радиосигналов

Редактор С. Б. Саченко
Корректор М. В. Тезина

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 5,2.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 250 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л.
Заказ 166.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6