http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-7-22-30

Оригинальная статья
Original paper

УДК 621.391.83:681.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ, ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ И РЕАКЦИЙ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Н.И. БЕЛЕНКЕВИЧ, В.А. ИЛЬИНКОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 1 июня 2021

Аннотация. Разработана единая математическая модель временных характеристик сигналов, звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники, которая описывает импульсную и переходную характеристики всех типов линейных звеньев и реакции последних на воздействия в виде периодических, непериодических финитных и непериодических бесконечно протяженных сигналов. Разработан алгоритм расчета временных характеристик, обеспечивающий построение эффективной автоматизированной процедуры моделирования сигналов, звеньев и реакций во временной области. Проведен сравнительный количественный анализ точности предлагаемого алгоритма и алгоритма дискретного преобразования Фурье.

Ключевые слова: система, звено, сигнал, реакция, характеристика, линейность, модель, алгоритм, точность.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Беленкевич Н.И., Ильинков В.А. Математическое моделирование сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники во временной области. Доклады БГУИР. 2021; 19(7): 22-30.

MATHEMATICAL MODELING OF SIGNALS, LINEAR LINKS AND RESPONSES OF TELECOMMUNICATIONS AND RADIOELECTRONICS SYSTEMS IN TIME DOMAIN

NATALIA I. BELENKEVICH, VALERI A. ILYINKOV

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 1 June 2021

Abstract. A single mathematical model of time characteristics of signals, links and responses of telecommunications and radioelectronics systems is suggested. It embodies Dirac- and Heaviside responses of all types of linear links, as well as their responses to the input in the form of periodic signals, no periodic finite and no periodic eternal signals. On the basis of the suggested model the algorithm for calculation of time characteristics was developed, which allows creation of effective automated simulations procedure of signals, links and responses in time-domain. The comparative quantitative analysis of accuracy of the suggested algorithm and discrete Fourier transformation (DFT) algorithm was carried out.

Keywords: system, link, signal, response, characteristic, linearity, model, algorithm, accuracy.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. Belenkevich N.I., Ilyinkov V.A. Mathematical modeling of signals, linear links and responses of telecommunications and radioelectronics systems in time domain. Doklady BGUIR. 2021; 19(7): 22-30.

Введение

В условиях стремительногоразвития систем телекоммуникаций и радиоэлектроники (СТР) основным инструментом их проектирования и разработки является математическое моделирование (ММ), подразделяемое на структурно- и схемотехническое.

Структурно-техническое ММ применяется на начальных этапах цикла проектирования и разработки. Оно определяет алгоритм функционирования, структуру и основные параметры качества создаваемой техники [1]. Важнейшим компонентом структурнотехнического ММ является моделирование линейных искажений, с помощью которого вырабатывают обоснованные требования к частотным и временным характеристикам функциональных блоков и системы в целом. В качестве моделей воздействий и блоков используют континуальные детерминированные сигналы и линейные звенья. При этом ММ искажений отличают многообразие и сложность моделей сигналов, звеньев, сложность процедуры и большой объем вычислений [2].

Сравнительный анализ методов, моделей, алгоритмов и программ моделирования СТР показывает [1], что известные программные средства структурнотехнического ММ обладают существенными недостатками, в числе которых отсутствие развитых библиотек моделей сигналов, звеньев и отсутствие автоматизированных процедур расчета частотных и временных характеристик сигналов, звеньев и реакций (СЗР).

Цель работы – разработка единой математической модели и алгоритма расчета импульсной, переходной характеристик линейных звеньев и реакций последних на периодические и непериодические (финитные, бесконечно протяженные) сигналы, которые обеспечивают построение эффективной автоматизированной процедуры ММ во временной области.

Разработка единой математической модели временных характеристик СЗР

Вначале отметим, что при моделировании линейных искажений в качестве воздействий применяют периодические $\varphi_i(t)$, непериодические финитные $\varphi_{iT}(t)$ и непериодические бесконечно протяженные $\alpha_i(t)$ сигналы [1]:

$$\varphi_{iT}(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \left[(i-1)(i-2)t_1/2,\, t_1+(i-1)^2(t_2-t_1)\right)\\ 0, & \left(-\infty,(i-1)(i-2)t_1/2\right)\cup\left[t_1+(i-1)^2(t_2-t_1),\infty\right)\end{cases},$$

$$\alpha_i(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \left[i(2-i)t_1+i(i-1)t_2/2,\infty\right)\\ 0, & \left(-\infty, i(2-i)t_1+i(i-1)t_2/2\right)\end{cases},\qquad \varphi_i(t)=\begin{cases}\varphi_{iT}(t), & [0,T)\\ \varphi_i(t+T), & (-\infty,\infty)\end{cases}, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ – образующая действительная функция, определяемая на неограниченном полуоткрытом интервале $[0, \infty)$, имеющая все производные $\left|\varphi^{(u)}(t)\right|\le ML^{u+1}$ $\left(u=\overline{0,\infty}\right)$; $0\le t_1<t_2\le T$, $i=0,\ 1,\ 2$.

Оптимальным описанием сигналов (1) является их задание на комплексной плоскости лапласовскими изображениями, представляемыми в виде [3, 4]:

$$\varphi_{0T}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{0T}(p) = S_2(p)e^{-pt_2} - S_1(p)e^{-pt_1},\ \varphi_{1(2)T}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{1(2)T}(p) = S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}} - S_0(p),$$

$$\alpha_0(t) \Leftrightarrow \bar{\alpha}_0(p) = -S_0(p) = -\lim_{t_1\to 0} S_1(p) = -\lim_{t_2\to 0} S_2(p), \tag{2}$$

$$\alpha_{1(2)}(t) \Leftrightarrow \bar{\alpha}_{1(2)}(p) = -S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}},\ \varphi_{0(1,2)}(t) \Leftrightarrow \bar{\varphi}_{0(1,2)}(p) = \bar{\varphi}_{0(1,2)T}(p)\left(1-e^{-pT}\right)^{-1},$$

причем, для расширения возможностей моделирования компоненты $S_i(p)$ модели (2) целесообразно задавать операторными функциями специального вида с кратными нулями и полюсами [1]:

$$S_i(p) = \frac{A_i(p)}{C_i B_0(p)} = \frac{\prod_{x=1}^{N_{i3}}\left(p+a_{i3x}\right)^{n_{i3x}} \prod_{y=1}^{N_{i4}}\left(p^2+2a_{i4y}p+a_{i4y}^2+\omega_{i4y}^2\right)^{n_{i4y}}}{C_i \prod_{s=1}^{N_{01}}\left(p+a_{01s}\right)^{n_{01s}} \prod_{l=1}^{N_{02}}\left(p^2+2a_{02l}p+a_{02l}^2+\omega_{02l}^2\right)^{n_{02l}}}, \tag{3}$$

где $v_0 = \sum_{s=1}^{N_{01}} n_{01s} + 2\sum_{l=1}^{N_{02}} n_{02l}$, $g_i = \sum_{x=1}^{N_{i3}} n_{i3x} + 2\sum_{y=1}^{N_{i4}} n_{i4y}$ – порядки полиномов знаменателя $B_0(p)$ и числителя $A_i(p)$ $(g_i \le v_0)$; $a_{01s} = \mathrm{Re}\,a_{01s}$; $n_{01s} = [n_{01s}] > 0$; $a_{02l} = \mathrm{Re}\,a_{02l}$; $\omega_{02l} = \mathrm{Re}\,\omega_{02l} > 0$; $n_{02l} = [n_{02l}] > 0$; $a_{i3x} = \mathrm{Re}\,a_{i3x}$; $n_{i3x} = [n_{i3x}] > 0$; $a_{i4y} = \mathrm{Re}\,a_{i4y}$; $\omega_{i4y} = \mathrm{Re}\,\omega_{i4y} > 0$; $n_{i4y} = [n_{i4y}] > 0$; $C_i = \mathrm{Re}\,C_i \ne 0$.

Дополнительно, при ММ искажений применяют (не)минимально-фазовые линейные звенья с различной формой частотных характеристик, которые описываются на комплексной плоскости передаточной функцией $K_Z(p) = A_Z(p)/(C_Z B_Z(p))$, отличающейся от модели (3) только тем, что полином $B_Z(p)$ знаменателя является полиномом Гурвица [1, 5].

С учетом приведенных необходимых сведений за основу решения поставленной задачи принимаем совместное математическое описание (на комплексной плоскости) СЗР

$$R(p) = \left(R_{2Z}(p)e^{-pt_2} - R_{1Z}(p)e^{-pt_1}\right)\left(1-e^{-pT}\right)^{-1}, \tag{4}$$

реализованное на базе операторной дробно-рациональной функции [1]

$$R_{00}(p) = \frac{A(p)}{CB(p)} = \frac{\prod_{x=1}^{N_3}\left(p+a_{3x}\right)^{n_{3x}} \prod_{y=1}^{N_4}\left(p^2+2a_{4y}p+a_{4y}^2+\omega_{4y}^2\right)^{n_{4y}}}{C\prod_{s=1}^{N_1}\left(p+a_{1s}\right)^{n_{1s}} \prod_{l=1}^{N_2}\left(p^2+2a_{2l}p+a_{2l}^2+\omega_{2l}^2\right)^{n_{2l}}}. \tag{5}$$

Последняя получена объединением несовпадающих (одинаковых по форме) массивов коэффициентов функций $K_Z(p)$ и $S_k(p)$ $k = 0, 1, 2$, от чего $N_{1(2)} = N_{Z1(Z2)} + N_{01(02)}$, $N_{3(4)} = N_{Z3(Z4)} + \sum_{k=0}^{2} N_{k3(k4)}$, $C = C_Z^{h_Z} \cdot \prod_{k=0}^{2} C_k^{h_k}$ $(h_Z = 0, 1;\ h_k = 0, 1)$, где N_{Zi}, N_{ki} – размеры массивов функций $K_Z(p)$ и $S_k(p)$ ($i = \overline{1,4}$; массивы знаменателей функций $S_k(p)$ совпадают). Поэтому при $i = \overline{1,4}$ и $j = \overline{3,4}$

$$R_{00}(p) = \begin{cases} R_Z(p) = K_Z(p) & \left(h_Z = 1,\ h_0 = h_1 = h_2 = N_{0i} = N_{1j} = N_{2j} = 0\right) \\ R_{0(1,2)}(p) = S_{0(1,2)}(p) & \left(h_{0(1,2)} = 1,\ h_Z = h_{1(0,0)} = h_{2(2,1)} = N_{Zi} = N_{1(0,0)j} = N_{2(2,1)j} = 0\right) \\ R_{0(1,2)Z}(p) = S_{0(1,2)}(p)K_Z(p) & \left(h_Z = h_{0(1,2)} = 1,\ h_{1(0,0)} = h_{2(2,1)} = N_{1(0,0)3} = N_{1(0,0)4} = N_{2(2,1)3} = N_{2(2,1)4} = 0\right). \end{cases} \tag{6}$$

Важно дополнительно отметить, что для построения единой математической модели временных характеристик (ВХ) звеньев и реакций оригинал, соответствующий изображению (4), должен быть представлен в замкнутом виде – конечным числом слагаемых [1]. Это обеспечивает модифицированный операционный метод [3, 4], который выполняет переход от изображения к оригиналу нестандартным вычислением интеграла Римана – Меллина [5].

С использованием упомянутого метода образована формальная математическая модель во временной области [1], которая, однако, напрямую непригодна для ММ:

$$\psi_0(t)=\begin{Bmatrix}\psi_{0L}\\ \psi_{0B}\\ \psi_{0U}\end{Bmatrix}=-\sum_{p_{Si}} res\left(R_{0Z}(p)e^{pt}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}\right)+\sum_{p_{Kz}} res\left(\frac{R_{1Z}(p)e^{p(t-t_1)}}{1-e^{-pT}}\begin{Bmatrix}1\\e^{-pT}\\e^{-pT}\end{Bmatrix}\right)-$$
$$-\sum_{p_{Kz}} res\left(\frac{R_{2Z}(p)e^{p(t-t_2)}}{1-e^{-pT}}\begin{Bmatrix}1\\1\\e^{-pT}\end{Bmatrix}\right),\qquad \psi_0(t)=\begin{cases}\psi_{0L}(t),\ (0,t_1)\\ \psi_{0B}(t),\ (t_1,t_2)\\ \psi_{0U}(t),\ (t_2,T)\end{cases}, \tag{7}$$

где $\psi_0(t)$ – реакция линейного звена на периодическое воздействие $\varphi_0(t)$; p_{Si}, p_{Kz} – полюсы функций соответственно $S_i(p)$ и $K_Z(p)$. В результате задача построения единой модели ВХ звеньев и реакций сводится к реализации математических процедур вычисления вычетов (с учетом кратности полюсов) в модели (7).

В практике ММ применяются функции $R_{0(1,2)Z}(p)$ с одно-, дву- и трехкратными полюсами. Учитывая последнее, выполняя математические процедуры нахождения вычетов и последующие преобразования, окончательно приходим к модели:

$$\begin{pmatrix}\psi_L(t)\\ \psi_M(t)\\ \psi_U(t)\end{pmatrix}=\sum_{s=1}^{N_{Z1}}\left(\begin{pmatrix}D_{1Z1s}\\ D_{1Z1s}^T\\ D_{1Z1s}^T\end{pmatrix}e^{-a_{1s}(t-t_1)}-\begin{pmatrix}D_{2Z1s}\\ D_{2Z1s}\\ D_{2Z1s}^T\end{pmatrix}e^{-a_{1s}(t-t_2)}\right)+\sum_{l=1}^{N_{Z2}}\left(\begin{pmatrix}D_{1Z2l}\\ D_{1Z2l}^T\\ D_{1Z2l}^T\end{pmatrix}e^{-a_{2l}(t-t_1)}-\begin{pmatrix}D_{2Z2l}\\ D_{2Z2l}\\ D_{2Z2l}^T\end{pmatrix}e^{-a_{2l}(t-t_2)}\right)-$$
$$-\sum_{s=N_{Z1}+1}^{N_{Z1}+N_{01}}\begin{pmatrix}0\\ D_{0Z1s}\\ 0\end{pmatrix}e^{-a_{1s}t}-\sum_{l=N_{Z2}+1}^{N_{Z2}+N_{02}}\begin{pmatrix}0\\ D_{0Z2l}\\ 0\end{pmatrix}e^{-a_{2l}t},\qquad \begin{pmatrix}0,\ t_1\\ t_1,\ t_2\\ t_2,\ T\end{pmatrix}, \tag{8}$$

где при $n_{1s}=1$ $D_{0Z1s}=R_{0Z1s}^0$, $D_{1(2)Z1s}=R_{1(2)Z1s}^0M_{11s}$, $D_{1(2)Z1s}^T=R_{1(2)Z1s}^0M_{21s}$; (9)

при $n_{1s}=2$ $D_{0Z1s}=R_{0Z1s}^0t+R_{0Z1s}^I$,

$$D_{1(2)Z1s}=-R_{1(2)Z1s}^0M_{11s}^2Te^{a_{1s}T}+R_{1(2)Z1s}^0M_{11s}\left(t-t_{1(2)}\right)+R_{1(2)Z1s}^IM_{11s}, \tag{10}$$

$$D_{1(2)Z1s}^T=-R_{1(2)Z1s}^0M_{21s}^2Te^{-a_{1s}T}+R_{1(2)Z1s}^0M_{21s}\left(t-t_{1(2)}\right)+R_{1(2)Z1s}^IM_{21s};$$

при $n_{2l}=1$ $D_{0Z2l}=\left(R_{0Z2l}^0/\omega_{2l}\right)\sin\left(\omega_{2l}t+\varphi_{0Z2l}^0\right)$,

$$D_{1(2)Z2l}=\frac{R_{1(2)Z2l}^0N_{12l}}{\omega_{2l}}\sin\left(\omega_{2l}\left(t-t_{1(2)}\right)+\varphi_{1(2)Z2l}^0\right)-\frac{R_{1(2)Z2l}^0M_{12l}}{\omega_{2l}}\cos\left(\omega_{2l}\left(t-t_{1(2)}\right)+\varphi_{1(2)Z2l}^0\right), \tag{11}$$

$$D_{1(2)Z2l}^T=\frac{R_{1(2)Z2l}^0N_{22l}}{\omega_{2l}}\sin\left(\omega_{2l}\left(t-t_{1(2)}\right)+\varphi_{1(2)Z2l}^0\right)-\frac{R_{1(2)Z2l}^0M_{12l}}{\omega_{2l}}\cos\left(\omega_{2l}\left(t-t_{1(2)}\right)+\varphi_{1(2)Z2l}^0\right);$$

при $n_{2l}=2$ $D_{0Z2l}=\frac{R_{0Z2l}^0}{2\omega_{2l}^3}\sin\left(\omega_{2l}t+\varphi_{0Z2l}^0\right)-\frac{R_{0Z2l}^0}{2\omega_{2l}^2}t\cos\left(\omega_{2l}t+\varphi_{0Z2l}^0\right)-\frac{R_{0Z2l}^I}{2\omega_{2l}^2}\cos\left(\omega_{2l}t+\varphi_{0Z2l}^I\right)$,

$$
\begin{aligned}
D_{1(2)Z2l} = R^{0}_{1(2)Z2l}\Bigg(\Bigg(&\frac{Te^{a_{2l}T}}{2\omega_{2l}^{2}}\Big(N_{12l}^{2}\sin(\omega_{2l}T)+2M_{12l}N_{12l}\cos(\omega_{2l}T)-M_{12l}^{2}\sin(\omega_{2l}T)\Big)+\frac{N_{12l}}{2\omega_{2l}^{3}}\Bigg)-\\
&-\big(t-t_{1(2)}\big)\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\Bigg)\sin\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{0}_{1(2)Z2l}\Big)+\\
+R^{0}_{1(2)Z2l}\Bigg(\Bigg(&\frac{Te^{a_{2l}T}}{2\omega_{2l}^{2}}\Big(N_{12l}^{2}\cos(\omega_{2l}T)-2M_{12l}N_{12l}\sin(\omega_{2l}T)-M_{12l}^{2}\cos(\omega_{2l}T)\Big)-\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{3}}\Bigg)-\\
&-\big(t-t_{1(2)}\big)\frac{N_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\Bigg)\cos\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{0}_{1(2)Z2l}\Big)-\\
-R^{I}_{1(2)Z2l}&\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\sin\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{I}_{1(2)Z2l}\Big)-R^{I}_{1(2)Z2l}\frac{N_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\cos\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{I}_{1(2)Z2l}\Big),\\
D^{T}_{1(2)Z2l} = R^{0}_{1(2)Z2l}\Bigg(\Bigg(&\frac{Te^{-a_{2l}T}}{2\omega_{2l}^{2}}\Big(-N_{22l}^{2}\sin(\omega_{2l}T)+2M_{12l}N_{22l}\cos(\omega_{2l}T)+M_{12l}^{2}\sin(\omega_{2l}T)\Big)+\frac{N_{22l}}{2\omega_{2l}^{3}}\Bigg)-\\
&-\big(t-t_{1(2)}\big)\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\Bigg)\sin\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{0}_{1(2)Z2l}\Big)+\\
+R^{0}_{1(2)Z2l}\Bigg(\Bigg(&\frac{Te^{-a_{2l}T}}{2\omega_{2l}^{2}}\Big(N_{22l}^{2}\cos(\omega_{2l}T)+2M_{12l}N_{22l}\sin(\omega_{2l}T)-M_{12l}^{2}\cos(\omega_{2l}T)\Big)-\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{3}}\Bigg)-\\
&-\big(t-t_{1(2)}\big)\frac{N_{22l}}{2\omega_{2l}^{2}}\Bigg)\cos\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{0}_{1(2)Z2l}\Big)-\\
-R^{I}_{1(2)Z2l}&\frac{M_{12l}}{2\omega_{2l}^{2}}\sin\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{I}_{1(2)Z2l}\Big)-R^{I}_{1(2)Z2l}\frac{N_{22l}}{2\omega_{2l}^{2}}\cos\Big(\omega_{2l}\big(t-t_{1(2)}\big)+\varphi^{I}_{1(2)Z2l}\Big);
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
M_{12l}=\frac{e^{a_{2l}T}\sin(\omega_{2l}T)}{1-2e^{a_{2l}T}\cos(\omega_{2l}T)+e^{2a_{2l}T}},\qquad N_{12l}=\frac{1-e^{a_{2l}T}\cos(\omega_{2l}T)}{1-2e^{a_{2l}T}\cos(\omega_{2l}T)+e^{2a_{2l}T}},
\tag{13}
$$

$$
N_{22l}=\frac{e^{a_{2l}T}\cos(\omega_{2l}T)-e^{2a_{2l}T}}{1-2e^{a_{2l}T}\cos(\omega_{2l}T)+e^{2a_{2l}T}},\qquad M_{11s}=\left(1-e^{a_{1s}T}\right)^{-1},\qquad M_{21s}=\left(e^{-a_{1s}T}-1\right)^{-1};
$$

$$
\begin{aligned}
&R^{M}_{0(1,2)Z1s}=\left[\left(R_{0(1,2)Z}(p)\left(p+a_{1s}\right)^{n_{1s}}\right)^{(n_{1s}-1)}\right]_{p=-a_{1s}},\quad M=n_{1s}-1=0,\ I,\ II;\\
&R^{M}_{0(1,2)Z2l}e^{j\varphi_{0(1,2)Z2l}}=\left[\left(R_{0(1,2)Z}(p)\left(p+2a_{2l}p+a_{2l}^{2}+\omega_{2l}^{2}\right)^{n_{2l}}\right)^{(n_{2l}-1)}\right]_{p=-a_{2l}+j\omega_{2l}},\quad M=n_{2l}-1=0,\ I,\ II;
\end{aligned}
\tag{14}
$$

для сокращения объема статьи выражения компонентов D_{0Z1s}, $D_{1(2)Z1s}$, $D^{T}_{1(2)Z1s}$, D_{0Z2l}, $D_{1(2)Z2l}$, $D^{T}_{1(2)Z2l}$ при трехкратных полюсах не приводятся.

Модель (8) являет собой точное аналитическое выражение для реакции $\psi_0(t)$ линейного звена на периодическое воздействие $\varphi_0(t)$. Оно, в отличие от классического решения спектральным и операционным методами [5–7], является результатом разложения по конечной системе собственных функций линейного звена $e^{p_{Kz}t}$ и воздействия $e^{p_{S0}t}$. Такое представление устраняет проблемы улучшения сходимости, оценки точности, минимизирует объем и время моделирования.

Очевидно, при временных переходах $t_1 \to 0$, $t_2 \to \infty$ и $T \to \infty$ модель (8) описывает реакции $\psi_{iT}(t)$, $\beta_i(t)$ и $\psi_i(t)$ $(i = 0, 1, 2)$ на соответственно непериодическое финитное $\varphi_{iT}(t)$, непериодическое бесконечно протяженное $\alpha_i(t)$ и периодическое $\varphi_i(t)$ воздействия (1). Дополнительно, при использовании в качестве воздействия $\alpha_0(t)$ функции $\delta(t)$ Дирака и функции $\gamma(t)$ Хэвисайда реакция $\beta_0(t)$ является соответственно импульсной (ИХ) $g(t)$ и переходной (ПХ) $h(t)$ характеристиками звена. Таким образом, выражение (8), по сути, представляет собой единую математическую модель временных характеристик СЗР.

Разработка алгоритма расчета временных характеристик СЗР

На основе единой математической модели (8) разработан алгоритм расчета временных характеристик СЗР, который состоит из следующих последовательных этапов.

1. *Выбор предмета исследования*. Выбирается предмет исследования: ИХ $g(t)$, ПХ $h(t)$; реакции $\psi_{kT}(t)$, $\beta_k(t)$ и $\psi_k(t)$ на соответственно непериодическое финитное $\varphi_{kT}(t)$, непериодическое бесконечно протяженное $\alpha_k(t)$ и периодическое $\varphi_k(t)$ воздействия (k = 0, 1, 2).

2. *Формирование базовой операторной передаточной функции* $R_{00}(p)$ (5). Находится изображение моделируемого воздействия. Определяются его компоненты $S_k(p)$, представляемые в форме (3). Формируется передаточная функция $K_Z(p)$ моделируемого звена. Объединением несовпадающих (одинаковых по форме) массивов коэффициентов функций $K_Z(p)$ и $S_k(p)$ образуется искомая операторная функция $R_{00}(p)$.

3. *Определение сочетания параметров*. Для выбранного предмета исследования определяются соответствующие сочетания значений параметров N_{Zi}, N_{ki}, h_Z, h_k, t_1, t_2 и T $\left(k=\overline{0,\ 2},\ i=\overline{1,\ 4}\right)$, при которых согласно модели (8) рассчитываются искомые характеристики. При этом учитывается, что в случае ИХ воздействием выступает функция Дирака и $S_0(p) = -1$, в случае ПХ – функция Хэвисайда и $S_0(p) = -1/p$.

4. *Выбор временного интервала и шага расчета*. Ограничения по выбору временного интервала и шага расчета отсутствуют. Точность моделирования не зависит от шага и способа разбиения интервала, определяется только точностью расчета элементарных функций в используемой системе программирования.

5. *Расчет ВХ сигналов и реакций*. Расчет отсчетных значений моделируемых ВХ выполняется по единой модели (8) при соответствующих временных переходах и сочетаниях параметров. Как следует из выражений (9)–(14), количество вычислительных операций сложения и умножения определяется только числом полюсов передаточной функции звена и изображения воздействия, что обеспечивает предельную точность, минимизирует объем вычислений и время моделирования. Отмеченное является существенным преимуществом разработанного алгоритма в сравнении, например, с используемым на практике алгоритмом дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (реализуемым в форме быстрого преобразования Фурье (БПФ)).

Сравнительный анализ точности предлагаемого алгоритма и алгоритма ДПФ

Выше показано, что разработанный алгоритм обеспечивает предельную точность моделирования, не зависящую от выбранного временного интервала и шага его разбиения. На практике широко применяется алгоритм ДПФ, реализуемый в форме БПФ. Известно, при недостаточном количестве N точек дискретизации по времени возникает эффект наложения спектров в основной полосе частот и в частотных полосах вокруг гармоник частоты дискретизации, влекущий так называемую ошибку наложения спектров. Дискретизация по частоте соответствует тому, что алгоритм ДПФ, по сути, рассчитывает реакцию на периодическое воздействие. Поэтому при недостаточном количестве M точек дискретизации по частоте возникает эффект наложения реакции рассматриваемого и предыдущих импульсов периодической последовательности, приводящий к так называемой ошибке наложения реакций [6, 7]. В итоге при расчете алгоритмом ДПФ реакции $\psi_{kT}(t)$ на непериодическое финитное воздействие $\varphi_{kT}(t)$ возникают ошибка наложения спектров и ошибка наложения реакций, а в случае вычисления реакции $\psi_k(t)$ на периодическое воздействие $\varphi_k(t)$ – только ошибка наложения спектров. Величины указанных погрешностей могут быть весьма значительными, существенно зависят от вида моделируемого воздействия (видеоимпульс, радиоимпульс), определяются корректностью выбора количества точек дискретизации по времени и частоте.

С учетом изложенного для количественной оценки возможной погрешности выполнен вычислительный эксперимент, суть которого состоит в следующем.

1. Используются четыре воздействия: непериодическое финитное $\varphi_{1T1}(t)$ – идеальный прямоугольный видеоимпульс длительностью $\tau = 10$ мкс; периодическое воздействие $\varphi_{11}(t)$, образованное повторением с периодом T сигнала $\varphi_{1T1}(t)$; непериодическое финитное воздействие $\varphi_{1T2}(t)$ – радиоимпульс с прямоугольной огибающей длительностью $\tau = 10$ мкс и несущей частотой $f_0 = 1$ МГц; периодическое воздействие $\varphi_{12}(t)$, образованное повторением с периодом T сигнала $\varphi_{1T2}(t)$ (в классификации (1)).

2. В качестве звеньев используются фильтры нижних частот ФНЧ1–ФНЧ3 с граничными частотами f_{D1}–f_{D3} полосы пропускания соответственно 0,5, 0,25 и 0,125 МГц, полосовые фильтры ПФ1–ПФ3 с центральной частотой $f_0 = 1$ МГц и полосами Δf_1–Δf_3 пропускания соответственно 1, 0,5 и 0,25 МГц. При этом передаточные функции $K_{ФНЧ1}(p)$–$K_{ФНЧ3}(p)$ упомянутых ФНЧ образованы денормированием (нормированной) передаточной функции ФНЧ-прототипа модели Золотарева – Кауэра *C*05-50-21, а передаточные функции ПФ КПФ1(р)–КПФ3(р) – реактансным преобразованием модели С05-50-21 и последующим денормированием относительно частоты f_0 [6, 7].

3. Применяя разработанный алгоритм, рассчитаны отсчетные значения $\psi_{1T1}(k\Delta t)$, $\psi_{1T2}(k\Delta t)$ ($k = \overline{0, N-1}$, $N = \tau/\Delta t$) точных реакций $\psi_{1T1}(t)$ (фильтров ФНЧ1–ФНЧ3), $\psi_{1T2}(t)$ (фильтров ПФ1–ПФ3) на непериодические воздействия соответственно $\varphi_{1T1}(t)$ и $\varphi_{1T2}(t)$ при значениях параметра N=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, а также отсчетные значения $\psi_{11}(k\Delta t)$, $\psi_{12}(k\Delta t)$ точных реакций $\psi_{11}(t)$, $\psi_{12}(t)$ тех же фильтров на периодические воздействия соответственно $\varphi_{11}(t)$ и $\varphi_{12}(t)$ с периодом повторения T = 10, 15, 20, 30, 50, 90 мкс.

4. Показано [6, 7], что использование алгоритма ДПФ соответствует переходу к периодической (с периодом $\omega_g = 2\pi/\Delta t$) комплексной передаточной функции $K^I(j\omega)$ моделируемого звена. Учитывая последнее, периодическим повторением исходных комплексных передаточных функций $K_{ФНЧ1}(j\omega)$–$K_{ФНЧ3}(j\omega)$ и $K_{ПФ1}(j\omega)$–$K_{ПФ3}(j\omega)$ образованы соответствующие периодические передаточные функции $K^I_{ФНЧ1}(j\omega)$–$K^I_{ФНЧ3}(j\omega)$ и $K^I_{ПФ1}(j\omega)$–$K^I_{ПФ3}(j\omega)$, необходимые при моделировании реакции алгоритмом ДПФ.

5. Применяя полученные сведения, алгоритмом ДПФ моделируется реакция фильтров ФНЧ1–ФНЧ3 на воздействие $\varphi_{1T1}(t)$. Для этого выполняется прямое ДПФ с количеством $N = \tau/\Delta t$ = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 точек дискретизации по времени. В результате образуется (непрерывная) периодическая спектральная плотность $S^I_{вх}(j\omega)$, соответствующая дискретному сигналу на входе ФНЧ. Далее вычисляется спектральная плотность $S^I_{вх}(j\omega) = S^I_{вых}(j\omega)K^I_{ФНЧ}(j\omega)$ на выходе ФНЧ1–ФНЧ3. Для выполнения обратного ДПФ осуществляется дискретизация спектральной плотности $S^I_{вых}(j\omega)$ по частоте с шагом $\Delta\omega = \omega_g/M$. При этом дискретная переменная обратного ДПФ изменяется в пределах $m = \overline{0, M-1}$, где $M = (T/\tau)N$. Такой зависимый выбор параметра M соответствует отсчетным значениям $\psi^I{}_{11}(m\Delta t)$ периодической реакции $\psi^I{}_{11}(t)$ в точках, совпадающих с расчетными точками по разработанному алгоритму. Последнее обеспечивает корректность процедуры сравнения реакций $\psi_{11}(t)$ и $\psi^I{}_{11}(t)$. По изложенному выше сценарию также моделируется реакция фильтров ПФ1–ПФ3 на воздействие $\varphi_{1T2}(t)$.

6. В результате весьма значительного по объему вычислительного эксперимента применительно к ФНЧ1–ФНЧ3 и ПФ1–ПФ3 при различных значениях параметров N и M рассчитаны реакции $\psi_{1T1(2)}(t)$, $\psi_{11(2)}(t)$ (разработанным алгоритмом) и $\psi^I{}_{11(2)}(t)$ (алгоритмом ДПФ). Для последующей оценки точности алгоритма ДПФ введены критерии:

$$\delta^T = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi^I{}_{11(2)k} - \psi_{1T1(2)k} \right)^2 \Big/ \sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi_{1T1(2)k} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \delta = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi^I{}_{11(2)k} - \psi_{11(2)k} \right)^2 \Big/ \sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi_{11(2)k} \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad (15)$$

где (с учетом упомянутых сведений) δ^T – суммарная относительная среднеквадратическая погрешность вследствие ошибки наложения спектров и ошибки наложения реакций; δ – относительная среднеквадратическая погрешность вследствие ошибки наложения реакций. По критериям (15) выполнена количественная оценка точности, ее результаты применительно к видеоимпульсу сведены в табл. 1 (применительно к радиоимпульсу для сокращения объема статьи не приводятся).

Анализ результатов позволяет сформулировать следующие выводы: при некорректном выборе значений N и M погрешности δ^T и δ могут быть весьма значительными и превышать десятки процентов; для минимизации ошибки наложения спектров частота дискретизации по времени должна на порядок превышать ширину основного лепестка спектра видеоимпульса и еще больше – в случае радиоимпульса; для последующей минимизации ошибки наложения реакций и достижения высокой точности моделирования (порядка 1 % и менее) должно выполняться условие $M \geq 10N$, что соответствует $T \geq 10\tau$.

Таблица 1. Значения погрешностей δ и δ^T (%) моделирования видеоимпульса алгоритмом ДПФ

Table 1. Uncertainties values δ and δ^T (%) of modeling of video pulse using a DFT algorithm

Звено link	T, мкс	N (f_g, МГц)													
		4		5		6		7		8		9		10	
ФНЧ1	15	4,457	4,250	3,555	3,438	2,957	2,922	2,532	2,573	2,214	2,327	1,966	2,148	1,769	2,014
	20	4,173	4,391	3,329	3,550	2,770	2,994	2,372	2,600	2,073	2,306	1,842	2,078	1,657	1,897
	30	4,207	4,225	3,356	3,374	2,792	2,810	2,391	2,409	2,090	2,108	1,857	1,875	1,670	1,689
	50	4,207	4,207	3,356	3,357	2,792	2,793	2,391	2,391	2,090	2,091	1,857	1,857	1,671	1,671
	90	4,207	4,207	3,356	3,356	2,792	2,792	2,391	2,391	2,090	2,090	1,857	1,857	1,671	1,671
ФНЧ2	15	3,032	10,45	2,420	10,03	2,014	9,762	1,724	9,579	1,508	9,446	1,339	9,344	1,205	9,265
	20	3,546	4,160	2,831	3,812	2,355	3,636	2,017	3,543	1,763	3,492	1,567	3,464	1,409	3,449
	30	3,295	3,807	2,631	3,163	2,189	2,741	1,875	2,445	1,639	2,227	1,456	2,060	1,310	1,929
	50	3,318	3,355	2,648	2,686	2,204	2,242	1,887	1,925	1,650	1,688	1,466	1,504	1,319	1,358
	90	3,317	3,317	2,648	2,648	2,203	2,203	1,887	1,887	1,650	1,650	1,466	1,466	1,318	1,319
ФНЧ3	15	3,416	33,89	2,722	33,72	2,263	33,61	1,936	33,54	1,692	33,49	1,502	33,45	1,351	33,41
	20	2,533	15,49	2,019	15,01	1,679	14,69	1,436	14,46	1,255	14,29	1,114	14,17	1,002	14,06
	30	2,886	3,819	2,299	3,555	1,911	3,425	1,634	3,356	1,428	3,318	1,268	3,298	1,140	3,287
	50	2,920	3,611	2,327	3,056	1,934	2,698	1,655	2,450	1,446	2,270	1,284	2,133	1,154	2,027
	90	2,903	2,930	2,313	2,340	1,922	1,950	1,645	1,673	1,437	1,466	1,276	1,305	1,147	1,177

Заключение

Разработана единая точная математическая модель ВХ, справедливая также при кратных полюсах передаточной функции звена и изображения воздействия. Она, в отличие от классического решения спектральным и операционным методами, является результатом разложения по конечной системе собственных функций звена и воздействия.

Разработан алгоритм расчета ВХ, обеспечивающий построение эффективной автоматизированной процедуры моделирования СЗР во временной области. В алгоритме количество операций сложения и умножения определяется только числом полюсов передаточной функции звена и изображения воздействия, что обеспечивает предельную точность, минимизирует объем вычислений и время моделирования.

Проведен сравнительный количественный анализ точности моделирования алгоритмом ДПФ, получены количественные оценки ошибок наложения спектров и наложения реакций, сформулированы рекомендации по корректному выбору значений параметров N и M.

Список литературы

1. Беленкевич Н.И., Ильинков В.А. Совместное описание сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серия физико-технических навук.* 2017;4:93-104.
2. Беленкевич Н.И., Ильинков В.А., Кухмар Д.А. Моделирование сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники в частотной области. *Доклады БГУИР*. 2018;4(114):29-36.
3. Ильинков В.А. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое воздействие. *Радиотехника*.1990;10:14-16.

4. Ильинков В.А., Ильинкова Н.И. Метод расчета реакции линейной системы на периодическое и непериодическое воздействие. *Вестник БГУ. Сер. 1: Физика, математика, информатика.* 1999;3:33-38.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. СПб.: Лань; 2002.
6. Гоноровский И.С. *Радиотехнические цепи и сигналы*. Москва: Дрофа; 2006.
7. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы*. Москва: Ленанд; 2016.

References

1. Belenkevich N.I., Ilyinkov V.A. [The compatible mathematical description of signals, linear links and responses of telecommunications and radioelectronics systems]. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*. 2017;4:93-104. (In Russ.)
2. Belenkevich N.I., Ilyinkov V.A., Kukhmar D.A. [Modeling of signals, linear links and responses of telecommunications and radioelectronics systems in frequency domain]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR*. 2018;4(114):29-36. (In Russ.)
3. Ilyinkov V. A. [A method of the computation of a linear system's response to a periodic action]. *Radiotekhnika = Radio Engineering*. 1990;10:14-16 (In Russ.)
4. Ilyinkov V. A., Ilyinkova N. I. [A method of the computation of a linear system's response to periodic and non-periodic actions]. *Vestnik BGU. Seriya 1: Fizika, matematika, informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*. 1999;3:33-38. (In Russ.)
5. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. [*Methods of the theory of functions of a complex variable*]. St. Petersburg: Lan' Publ.; 2002. (In Russ.)
6. Gonorovskij I.S. [*Radio technical circuits and signals*]. Moscow: Drofa Publ.; 2006. (In Russ.)
7. Baskakov S.I. [*Radio technical circuits and signals*]. Moscow: Lenand Publ.; 2016. (In Russ.)

Вклад авторов

Беленкевич Н.И. разработала единую математическую модель и алгоритм расчета временных характеристик, провела вычислительный эксперимент, выполнила количественный анализ точности моделирования алгоритмом ДПФ.

Ильинков В.А. сформулировал задачи и методы исследования, разработал сценарий вычислительного эксперимента, обсуждал результаты.

Authors' contribution

Belenkevich N.I. developed a single mathematical model and an algorithm for calculating time-response characteristics, conducted a computational experiment, carried out a quantitative analysis of modeling accuracy using a DFT algorithm.

Ilyinkov V.A. defined problems and research design, developed a case of computational experiment, discussed the result.

Сведения об авторах

Беленкевич Н.И., старший преподаватель кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Ильинков В.А., к.т.н., доцент, доцент кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Belenkevich N.I., Senior Lecturer at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Ilyinkov V.A., PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
Минск, ул. П. Бровки, 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники;
тел. +375-17-293-88-19;
e-mail: belenkevich@bsuir.by
Беленкевич Наталья Ивановна

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki Str., 6,
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics;
tel. +375-17-293-88-19;
e-mail: belenkevich@bsuir.by
Belenkevich Natalia Ivanovna