# ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ МУЛЬТИГРАФА

Пилипчук Л. А., Малявко А. В.
Кафедра компьютерных технологий и систем, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by, maliaukas@gmail.com

*Рассматриваются недопределенные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в которых наряду с уравнениями системы, составляющими вложенную сетевую структуру блочно-диагонального вида, содержится общая часть. При этом, каждый блок разреженной части системы является матрицей инцидентности графа. На основании результатов из теории сложности вычислений и теоретико-графовых свойств матрицы инцидентности графа получены эффективные методы декомпозиции линейных систем.*

## Введение

Исследование математического аппарата для решения разреженных СЛАУ с использованием вычислительных алгоритмов на графах является актуальной проблемой. Актуальность обусловлена необходимостью решать задачи разреженного матричного и сетевого анализа большой размерности на основе разделения переменных с использованием технологий алгоритмической теории графов.

## I. Система базисных циклов в методах построения решений разреженных недоопределенных СЛАУ

Рассмотрим конечную ориентированную связную мультисеть $S = (I, U)$ без петель, где $I$ — множество узлов, $U$ — множество мультидуг, определенных на $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Пусть $K$ — множество различных типов потока в мультисети $S$, $|K| < \infty$. Обозначим через $S^k = \left(I^k, U^k\right)$ – связную сеть, соответствующую типу потока $k \in K$, где $I^k \subseteq I$ – множество узлов, $U^k$ – множество дуг сети $S^k$ для потока типа $k$ соответственно. Определим следующие множества: $K(i)$: $K(i) = \left\{k \in K : i \in I^k\right\}$ и $K(i,j) = \left\{k \in K : (i,j)^k \in U^k\right\}$ — множества типов потока, транспортируемых через каждый узел $i \in I$ и каждую дугу $(i,j) \in U$ соответственно. Введем подмножество мультидуг $U_0 \subseteq U$ такое, что для подмножества $K_0(i,j) \subseteq K(i,j)$ выполняется условие: $|K_0(i,j)| > 1$.

На введенной мультисети рассмотрим разреженную недоопределенную линейную систему следующего вида:

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k, i \in I^k, k \in K, \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p = \overline{1,q}, \quad (2)$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k = z_{ij}, \quad (i,j) \in U_0, \quad (3)$$

где $I_i^+\left(U^k\right) = \left\{j \in I^k : (i,j)^k \in U^k\right\}$, $I_i^-\left(U^k\right) = \left\{j \in I^k : (j,i)^k \in U^k\right\}$; $a_i^k$, $\lambda_{ij}^{kp}$, $\alpha_p$, $z_{ij} \in \mathbf{R}$ – параметры системы; $x = \left(x_{ij}^k, (i,j)^k \in U^k, k \in K\right)$ – вектор неизвестных.

В работе [1] рассматриваются алгоритмы и технологии построения решений разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений для однородного потока в сети $S^k$ и их реализация в системе *Wolfram Mathematica*. В [1] также разработаны и применены структуры данных для построения базиса пространства решений однородной системы, порожденной из системы (1) (характеристические векторы $\left\{\delta^k(\tau,\rho), (\tau,\rho)^k \in U^k \backslash U_T^k\right\}$) для фиксированного $k \in K$. С учетом разреженности матрицы системы (1) и теоретико-графовых свойств корневых деревьев число операций алгоритма построения каждого вектора базиса пространства решений составляет $O(|I^k|)$ в наихудшем случае.

**Теорема 1** *Система порожденных характеристических векторов* $\left\{\delta^k(\tau,\rho), (\tau,\rho)^k \in U^k \backslash U_T^k\right\}$ *базисных циклов* $\{C(\tau,\rho), (\tau,\rho) \in U^k \backslash U_T^k\}$ *относительно заданного покрывающего дерева* $U_T^k$ *образует базис пространства циклов в сети* $S^k$. *Другими словами, система порожденных характеристических векторов образует базис пространства решений однородной системы, порожденной из системы* (1) *для фиксированного* $k \in K$ [2, 3].

Обозначим $\delta^k(C)$ – характеристический вектор произвольного цикла $C$ в сети $S^k$ со следующими компонентами: $\delta_{\tau\rho}^k(C) = 1$, если $(\tau,\rho)^k$ является прямой дугой цикла $C$, т.е. $(\tau,\rho)^k \in C^+ \subseteq C$; $\delta_{\tau\rho}^k(C) = -1$, если $(\tau,\rho)^k$ является обратной дугой цикла $C$, т.е. $(\tau,\rho)^k \in C^- \subseteq C$; $\delta_{\tau\rho}^k(C) = 0$, если $(\tau,\rho)^k \notin C$.

**Теорема 2** *Пусть задана система базисных циклов* $\{C(\tau,\rho), (\tau,\rho) \in U^k \backslash U_T^k\}$ *относительно некоторого покрывающего дерева* $U_T^k$ *сети* $S^k$

*и пусть $C$ — произвольный цикл в сети $S^k$, $k \in K$. Тогда характеристический вектор любого цикла $C$ имеет представление:*

$$\delta^k(C) = \sum_{(\tau,\rho)\in U^k \setminus U_T^k} \delta^k_{\tau\rho}(C)\delta^k(\tau,\rho).$$

На основании теорем 1 – 2 и декомпозиционного подхода [2, с. 15] система уравнений (1) – (3) представлена в виде $|K|$ независимых разреженных подсистем линейных алгебраических уравнений с матрицами инцидентности графов $S^k$, $k \in K$ и системы общего вида. Это позволяет находить решения разреженной недоопределенной системы с матрицей инцидентности графа $S^k$ на надлежащих структурах данных для представления базисных циклов без использования обращения матриц.

## II. Пример построения решений разреженной недоопределенной СЛАУ

Рассмотрим пример построения решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений для мультисети $S$, представленной на рисунке 1. Мультисеть представлена в виде объединения сетей $S^k = \left(I^k, U^k\right)$, $k \in K = \{1,2,3\}$, где множество $K$ состоит из трех типов потока.

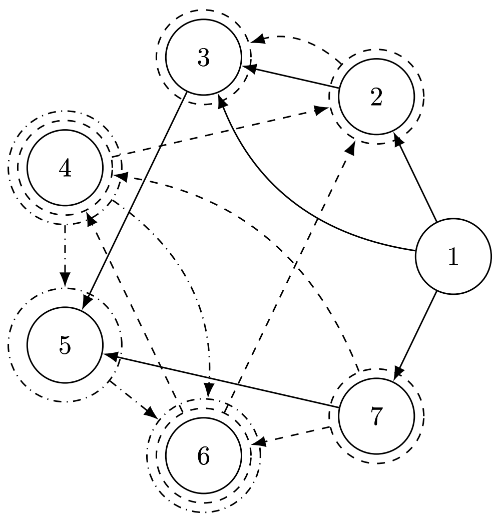


Рис. 1 – Объединение сетей $S^k = \left(I^k, U^k\right)$, $k \in K = \{1,2,3\}$

Выберем опору $U_T^k$, $k \in K$, мультисети $S = (I, U)$ для системы (1) [2, с. 10]. Выбранная опора состоит из покрывающих деревьев $U_T^k$, $k \in K$. Сформируем множество циклических дуг $U_C = \left\{U_C^k \subseteq U^k \setminus U_T^k, k \in K\right\}$, $|U_C| = q + |U_0|$, где $U_C = \bigcup\limits_{k=1}^{3} U_C^k = \left\{(1,3)^1, (5,6)^2, (6,2)^3\right\}$, $U_0 = \{(2,3)\}$. Структуры, представляющие объединение множеств $U_T^k \bigcup U_C^k$, $k \in K$, представлены на рисунке 2. Дуги, входящие в $U_T^k$, $k \in K$, отображены более насыщенными линиями; циклические дуги $U_C^k$, $k \in K$ – менее насыщенными.

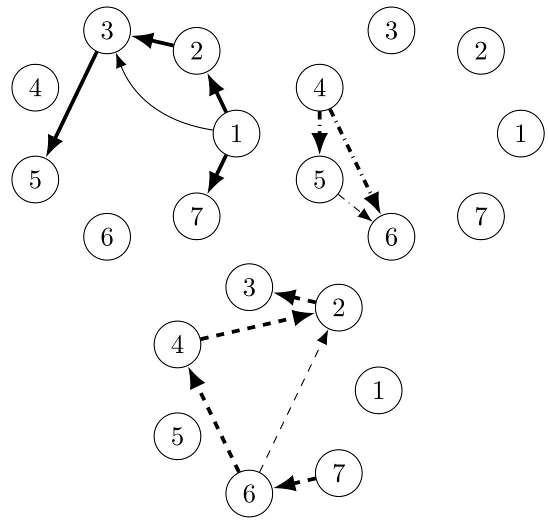


Рис. 2 – Множества $U_T^k \bigcup U_C^k$ для сетей $S^k$, $k \in K = \{1,2,3\}$

По правилам, указанным в [2], сформируем матрицу детерминантов $D = \begin{pmatrix} -11 & -7 & 10 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det D \neq 0$. Затем вычислим вектор правой части:

$$\beta = \begin{pmatrix} 88 + x^1_{7,5} - 7x^3_{7,4} \\ -5 - 3x^1_{7,5} - 2x^3_{7,4} \\ 6 + x^1_{7,5} \end{pmatrix}, \quad x_C = \begin{pmatrix} x^1_{1,3} \\ x^2_{5,6} \\ x^3_{6,2} \end{pmatrix}.$$

В случае невырожденной матрицы $D$ дуговые потоки $x_C = \left(x^k_{\tau\rho}, (\tau,\rho)^k \in U_C^k, k \in K\right)$ вычислим однозначно из системы $x_C = D^{-1}\beta$.

С учетом разреженности матрицы системы (1) и теоретико-графовых свойств корневых деревьев [1] число операций алгоритма вычисления $x^k_{ij}$, $(i,j)^k \in U_T^k$ пропорционально числу вычисляемых элементов множества $U_T^k$, $\forall k \in K$.

## Заключение

Разработаны эффективные алгоритмы декомпозиции линейных систем, которые основаны на результатах исследования структурных свойств фундаментальной системы циклов. Рассматривается пример решения разреженной недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений для мультисети, состоящей из трех типов потока.


1. Пилипчук, Л. А. Алгоритмы и технологии построения решений разреженных недоопределенных линейных систем в Wolfram Mathematica / Л. А. Пилипчук, А. А. Лагуто // Технологии информатизации и управления (TIM 2016): материалы III Международной научно-практической конференции, Гродно, 14–15 апреля 2016 г. — Гродно: ГрГУ, 2016. – 9 с.
2. Пилипчук, Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л. А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.
3. Романовский, И. В. Дискретный анализ / И. В. Романовский – СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2008. – 336 с.