ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КРАТЧАЙШИХ ПУТЯХ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Полячок Е. Н.
Кафедра компьютерных технологий и систем, УО «Белорусский государственный университет»
Минск, Республика Беларусь
E-mail: arszp10@gmail.com

Рассматривается проблема разработки алгоритмических, структурных и технологических решений задачи о кратчайших путях из заданного узла в достижимые узлы орграфа и исследование особенностей численной реализации методов. Алгоритмы Дейкстры и Беллмана-Форда основаны на применении принципа динамического программирования. Для базисного метода построены структурные и алгоритмические решения задачи о кратчайших путях с использованием двух технологий хранения стоимостей дуг графа.

Введение

Актуальным направлением научных и прикладных исследований является развитие алгоритмической теории графов для решения задач о кратчайших путях в орграфах. Исследование и создание численных методов и их реализаций базируется на двух подходах: 1) применение принципа динамического программирования и 2) использование корневых деревьев для представления и преобразования базисного множества дуг. В работе рассматриваются алгоритмические, структурные и технологические решения задач о кратчайших путях в ориентированных графах и численное исследование их эффективности.

I. Индексные и базисные методы

В итерационных процессах индексных алгоритмов (Дейкстры, Беллмана-Форда) построение кратчайшего пути из начального узла s в достижимый узел j графа $G = (V, E)$ основано на применении принципа динамического программирования. На каждой итерации выполняется решение уравнения Беллмана:

$$B_j = \min_{i \in V_j^-(E)} \{B_i + c_{i,j}\}, j \neq s, j \in V, \qquad (1)$$

с начальным условием $B_s = 0$, где B_j – длина кратчайшего пути из начального узла s в узел j графа, $V_j^-(E)$ – множество узлов графа, из которых исходят дуги, входящие в узел j.

Опорные (базисные) методы построения кратчайших путей основаны на исследовании математической модели [1], структурных свойств базисов, представленных с помощью корневых деревьев, технологии преобразования допустимых решений на итерациях поиска кратчайших путей из начального узла s в достижимые узлы графа G.

II. Структурные свойств и технологии реализации

Существует несколько способов поиска дуги, на которой нарушаются условия оптимальности [1]: а) просмотр дуг в произвольном порядке, пока не встретится дуга, свидетельствующая о нарушении условий оптимальности текущего опорного потока; б) просмотр дуг пока не встретится дуга, свидетельствующая о *минимальной оценке* нарушения условий оптимальности; в) хранение дуг в кольцевом списке. Каждый раз, когда требуется найти дугу, на которой нарушаются условия оптимальности, ее поиск начинается с дуги, следующей за той, на которой такой поиск остановился на предыдущем шаге алгоритма. Если на очередном шаге алгоритма при поиске было пройдено $m = |E|$ дуг, то алгоритм завершается, так как текущий опорный поток является оптимальным. Этот способ поиска дуги графа с нарушением условий оптимальности дает лучшие временные характеристики.

В памяти компьютера стоимости дуг могут храниться в списке инцидентности графа G (узел, дуга, стоимость дуги). Если из узла исходит k дуг, то сложность алгоритма поиска стоимости дуги составляет $O(k)$ операций в худшем случае [2]. Можно воспользоваться хеш-таблицей, где ключом является дуга, а значением ее стоимость. Сложность алгоритма поиска значения в хеш-таблице по ключу составляет $O(1)$ и $O(n)$ операций в среднем и худшем случаях соответственно.

В [3] получен результат, позволяющий восстановить потоки по дугам оптимального корневого дерева.

III. Генерация графов

Для генерации ациклических ориентированных графов, не содержащих ориентированных циклов, можно воспользоваться заранее определенным топологическим порядком графа, например, топологическим порядком $1, 2, \ldots, n$, где n – количество узлов генерируемого графа. При необходимости генерации графа, в котором не все узлы достижимы из начального узла, на вход алгоритма также должно поступать количество дуг генерируемого графа. Пока количество дуг при генерации не достигнет желаемого значения, генерируются два случайных целых числа из интервале $[1, n]$ – узлы и стоимость генерируемой дуги. В множество дуг графа добавляется новая дуга в зависимости от порядка следования этих двух узлов в топологическом порядке, если такая дуга не принадлежит графу. Пусть сгенерированы два узла u и v. Если узел v следует после узла u в топологическом порядке генерируемого графа, то в граф можно добавить дугу $(u,\ v)$, иначе $(v,\ u)$. Начальным узлом для поиска кратчайших путей в полученном графе можно положить любой из узлов.

Таким образом, максимально возможное количество сгенерированных дуг равно $(n-1)/2$, так как первый узел топологического порядка можно соединить не более чем с $n-1$ узлом, второй узел – с $n-2$ узлами, и так далее. При генерации графа, в котором все узлы достижимы из начального узла на каждом шаге после генерации очередной дуги и ее стоимости нужно проверять существование узлов в генерируемом графе, не достижимых из начального узла. Если существуют, то генерацию дуг нужно продолжить.

IV. Временные характеристики

Реализованы два варианта базисного алгоритма, различающиеся способом хранения стоимостей дуг графа: хранение стоимостей дуг внутри списков инцидентности (алгоритм A1) и хранение стоимостей дуг в хеш-таблице (алгоритм A2). Временные характеристики в секундах для графов, в которых достижимы все узлы из начального узла представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Временные характеристики алгоритмов A1 и A2

$\|V\|$	$\|E\|$	t, A1	t, A2	t_1/t_2
100	4 950	0.1082	0.0325	3.33
200	19 900	0.4587	0.1355	3.39
300	44 850	1.1780	0.2489	4.73
400	79 800	2.2919	0.4512	5.08
500	124 750	4.3207	0.6661	6.49
750	280 785	13.6831	1.4021	9.76
1 000	499 500	31.7400	2.5531	12.43

Исходя из данных таблицы явно прослеживается тот факт, что время работы базисного алгоритма с хранением стоимостей дуг в списках инцидентности при увеличении размерностей графа растет гораздо быстрее, чем при использовании хеш-таблицы. Следовательно, в дальнейших экспериментах, для хранения стоимостей дуг используется хеш-таблица.

В работе реализованы два алгоритма поиска кратчайших путей в графе: алгоритм Дейкстры и алгоритм Беллмана-Форда. Сравнение временных характеристик этих алгоритмов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Временные характеристики алгоритмов Беллмана-Форда (B1), базисного метода (B2) и алгоритма Дейкстры (B3).

$\|V\|$	$\|E\|$	Время работы алгоритмов, с		
		B1	B2	B3
100	4 950	0.0671	0.0325	0.0008
200	19 900	0.1942	0.1355	0.0035
300	44 850	0.2697	0.2489	0.0078
400	79 800	0.5222	0.4512	0.0148
500	124 750	1.3862	0.6661	0.0232
750	280 875	4.2057	1.4021	0.0509
1 000	499 500	7.6665	2.5531	0.0932

В экспериментах использовалась реализация алгоритма Дейкстры с использованием кучи Фибоначчи. Однако для алгоритма Дейкстры стоимости дуг должны быть положительными, для алгоритмов Беллмана-Форда и базисного метода стоимости могут быть любого знака.

В таблице 3 приведено отношение времен работы алгоритма Беллмана-Форда к базисному методу.

Таблица 3 – Отношение времени t_1 работы алгоритма Беллмана-Форда (B1) и t_2 – базисного алгоритма (B2)

$\|V\|$	$\|E\|$	t_1, с	t_2, с	t_1/t_2
100	4 950	0.0671	0.0325	2.06
200	19 900	0.1942	0.1355	1.43
300	44 850	0.2697	0.2489	1.08
400	79 800	0.5222	0.4512	1.16
500	124 750	1.3862	0.6661	2.08
750	280 875	4.2057	1.4021	3.00
1 000	499 500	7.6665	2.5531	3.00

Заключение

Разработан генератор связных ориентированных ациклических графов. Реализован базисный метод поиска кратчайших путей из начального узла в достижимые узлы с использованием двух технологий хранения стоимости дуг графа и проведено сравнение его быстродействия. Выполнено численное исследование эффективности трех методов решения задач о кратчайших путях в ориентированных ациклических графах.

1. Пилипчук, Л.А. Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения / Л.А. Пилипчук, А.С. Пилипчук, Е.Н. Полячок // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальнаятэхніка і кіраванне. – Т. 10. №3. – 2020. – С. 143–151.
2. Йенсен, П. Потоковое программирование. Пер. с англ. / П. Йенсен, Д. Барнес. – М. : Радио и связь, 1984. – 392 с.
3. Пилипчук Л.А. О численных методах и технологиях построения кратчайших путей / А.С. Пилипчук, Е.Н. Полячок, А.Э. Лобко, Д.А. Шкурский // Материалы международной научной конференции «Информационные технологии и системы 2020 (ИТС 2020) = InformationTechnologiesandSystems 2020 (ITS 2020)». – Республика Беларусь. Минск, 18 ноября 2020 г. – Минск: БГУИР. – 2020. – С. 136–137.