ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Цегельник В. В.
Кафедра высшей математики,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: tsegvv@bsuir.by

Исследован характер возможных подвижных особых точек решений семейства трехмерных пятиэлементных диссипативных динамических систем с хаотическим поведением. Показано, что ни одна из девяти систем данного семейства не является системой Пенлеве -типа.

Введение

Построение как можно более простой хаотической системы является интересной и значимой темой в изучении динамических систем, а также практических применений в безопасной связи и широкополосной генерации сигналов. Основываясь на классических работах [1, 2], Спротт [3, 4] построил с помощью компьютерного моделирования ряд простых автономных дифференциальных уравнений третьего порядка с несколькими квадратичными нелинейностями и показал, что они обладают хаотическим поведением. Работы Спротта ставят вопрос, насколько простой может быть трехмерная автономная система непрерывного времени, если она хаотична. Ответ на данный вопрос был частично дан в работах [5, 6]. В [5] было показано, что все диссипативные трехмерные автономные квадратичные системы с общим числом членов в правых частях равным 4, нехаотичны. Аналогичный результат для консервативных систем (за исключением одной) был получен в [6].

В работе [7] исследованы качественные свойства решений класса трехмерных пятиэлементных диссипативных динамических систем с одной квадратичной нелинейностью. Используя также систематический компьютерный поиск в [7] было установлено наличие хаоса (в частности, странных аттракторов) в системах дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y^2 - x + Az,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = y, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = yz - x + Ay,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = y^2 + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = y, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = yz + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = x, \qquad (4)$$

$$\dot{x} = yz + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = y, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = -x + y + A,\ \dot{y} = xz,\ \dot{z} = y, \qquad (6)$$

$$\dot{x} = yz - x,\ \dot{y} = z + A,\ \dot{z} = x, \qquad (7)$$

$$\dot{x} = -x + z,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = xy, \qquad (8)$$

$$\dot{x} = -x + z,\ \dot{y} = z + A,\ \dot{z} = xy \qquad (9)$$

при определенных значениях параметра A. Каждая из систем (1)–(9) является диссипативной.

I. Постановка задачи

Целью работы является исследование характера возможных подвижных особых точек (т.е. точек, положение которых зависит от начальных условий) решений систем (1)–(9) с неизвестными функциями x, y, z в предположении, что независимая переменная t является комплексной.

Системы (уравнения), общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек, называют системами (уравнениями) Пенлеве -типа или P -типа.

II. Алгоритм

Для решения поставленной задачи использован тест Пенлеве [8], представляющий набор условий, необходимых для отсутствия у общего решения системы дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек (свойство Пенлеве). Тест [8] применяется к системам дифференциальных уравнений, представленных в виде

$$x_i' \cdot Q_i(x_1, x_2, ..., x_n, \tau) = P_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = \overline{1, n}. \qquad (10)$$

Здесь $\tau = t - t_0$, t_0 — произвольная точка области $G \subset C$, а P_i, Q_i — полиномы от x_1, x_2, ..., x_n с аналитическими по τ коэффициентами; $' = \frac{d}{d\tau}$. Тест представляет собой последовательное выполнение следующих шагов.

Первый шаг. Определяются наименьшие возможные степени переменной τ в формальных разложениях i-х компонент решения системы уравнений (10) вида

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \tau^{j-p_i}, i = \overline{1, n}. \qquad (11)$$

Для определения пар (c_0, p), $c_0 = (c_{10}, c_{20}, ..., c_{n0})$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ в систему (10) подставляются выражения (11). Если не все $c_{i0} = 0$ и полученные $p_i \in \mathbb{N}$, то первый шаг пройден и анализ системы может быть продолжен.

Второй шаг. Он связан с отысканием индексов Фукса для каждой пары (c_0, p). Индексами Фукса или резонансами называются номера j_r коэффициентов c_{ij} в разложениях i-х компонент решения (11), для которых коэффициенты c_{ij_r} содержат произвольный параметр. Индексы Фукса определяются подстановкой выражений $x_i \sim c_{i0}\tau^{-p_i} + \beta_i \tau^{r-p_i}$ $(i = \overline{1,n})$ в ведущие члены уравнений системы (10). Приравнивая выражения, линейные относительно β_k $(k = \overline{1,n})$, нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Определитель матрицы коэффициентов этой системы, приравненный к нулю, определяет уравнение резонансов $Q(r) = 0$.

В случае, когда для каждой пары (c_0, p) все корни уравнения резонансов являются целыми, а отличные от -1 и возможно, от нуля — положительными числами, второй шаг формального теста считается пройденным.

Третий шаг. Если все коэффициенты в разложении (11) могут быть определены и число произвольных среди них коэффициентов равно $n - 1$, то считается, что система дифференциальных уравнений (10) проходит третий шаг, а вместе с ним проходит и весь формальный тест Пенлеве.

Для анализа решений систем (1)–(9) использован также подход, заключающийся в замене каждой из них эквивалентным уравнением третьего порядка и сравнением его с известными уравнениями, являющимися уравнениями Пенлеве -типа.

III. Выводы

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. Системы (1), (3) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y} + \ddot{y} - 2y\dot{y} - Ay = 0, \tag{12}$$

а системы (7), (8) — уравнению

$$\dddot{y} + \ddot{y} - y\dot{y} + Ay = 0. \tag{13}$$

Системы (2), (4), (5), (6), (9) эквивалентны соответственно уравнениям

$$\dddot{y} + \ddot{y} - y\dot{y} - Ay = 0, \tag{14}$$

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = z^2\dot{z} - z\ddot{z} + Az^2, \tag{15}$$

$$\dddot{z} + \ddot{z} - z\dot{z} - Az = 0, \tag{16}$$

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = -z\ddot{z} + z^2\dot{z} + Az^2, \tag{17}$$

$$y\dddot{y} - \dot{y}\ddot{y} = -y\ddot{y} + y^2\dot{y} - Ay^2. \tag{18}$$

Теорема 2 [9]. Ни одно из уравнений (12)–(14), (16) не является уравнением Пенлеве -типа.

Следствие 1. Ни одна из систем (1)–(3), (5), (7), (8) не является системой P -типа.

Теорема 3. Система (4) не является системой Пенлеве -типа.

Справедливость данного утверждения следует из того, что система (4) не проходит третий шаг теста Пенлеве.

Следствие 2. Уравнения (15), (17), (18) не являются уравнениями P -типа.

Поскольку уравнение (15) эквивалентно системе (4), а уравнение (18) получается из (15) заменой $z \to y$, $A \to -A$, то на основании теоремы 3 они не являются уравнениями Пенлеве -типа.

Следствие 3. Системы (6), (9) также не являются системами P -типа.

IV. Список литературы

1. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // J. Atmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
2. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos / O. E. Rössler // Phys. Lett. A. – 1987. – Vol. 57. – P. 397–398.
3. Sprott, J. C. Some simple chaotic flow / J. C. Sprott // Phys. Rev. E. – 1994. – Vol. 50. – P. R 647–650.
4. Sprott, J. C. Simplest dissipative chaotic flow / J. C. Sprott // Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 228. – P. 271–274.
5. Zhang, Fu. Nonchaotic behaviour in three -dimensional quadratic systems / Fu Zhang, J. Heidel // Nonlinearity. – 1999. – Vol. 10. – P. 1289–1303.
6. Heidel, J. Nonchaotic behaviour in three -dimensional quadratic systems II. The conservative case / J. Heidel, Fu Zhang // Nonlinearity. – 1999. – Vol. 12. – P. 617–633.
7. Zhang, Fu. Chaotic and nonchaotic behavior in three -dimensional quadratic system: 5 –1 dissipative cases / Fu Zhang, J. Heidel // Inter. Journal of Bif. and Chaos. – 2012. – Vol. 22, № 1. – P. 1250010.
8. Грицук, Е. В. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.–мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
9. Цегельник, В. В. Аналитические свойства решений семейства нелинейных трехмерных диссипативных систем с хаотическим поведением / В. В. Цегельник // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: материалы Междунар. науч. конф. памяти профессора Р. Ф. Габасова, Минск, 5 –10 октября 2021 г. /Белорус. гос. ун-т; редкол.: Ф. М. Кириллова (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2021. – С. 194–196.