ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОПУСКА ОШИБКИ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДОВ В АСИМПТОТИКЕ

Кобяк И.П.

Кафедра электронных вычислительных машин,

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники

Минск, Республика Беларусь

E-mail: ipkobyak2012@mail.ru

В представляемой работе на основе принципа включения и исключения получены соотношения, позволяющие определить вероятность пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов в последовательностях со случайной природой. Рассмотрен частный случай производящей функции для одной переменной, характеризующей практически точное значение вероятности ошибки в асимптотике. Показано, что метод наблюдения векторов переходов является наиболее эффективным инструментом идентификации последовательностей по отношению к общеизвестным алгоритмам свертки.

Введение

Формирование векторов переходов (ВП) заданного вида осуществляется путем технического дифференцирования статических векторов случайного сообщения с последующим «однополупериодным сглаживанием» отрицательных событий. Достоинством принципа наблюдения таких субдинамических объектов является низкая вероятность неперехода сформированной оценки в некоторый другой класс эквивалентностей по отношению к классу нулевой гипотезы. При этом под классом нулевой гипотезы понимают количество конечных последовательностей длиной n заданного случайного процесса, дающих одинаковый контрольный код.

Возможность формирования факториальных моментов на основе энумераторов специального вида позволяет определить ряд параметров характеризующих свойства точечных оценок, интересующих пользователей ряда прикладных задач. В частности, особый интерес вызывает принцип вычисления нормированной площади под кривой графика распределения вероятностей в асимптотике. Это позволяет выполнить сравнение показателей предлагаемого метода с другими известными алгоритмами свертки.

I. Производящая функция для вероятности наблюдения ВП

Пусть p — это теоретическая вероятность регистрации ВП заданного вида. Тогда основной результат данной работы может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема. Энумератор вида

$$m_K(0) = \sum_g^{n-1} \left(px_1^1 + \sum_{i=2}^{n-2} px_1^i \tfrac{1}{2^{i+1}} \beta_i + \tfrac{1}{pm} \right)^{n-g}, \quad (1)$$
$$g = 2j\xi + 3j\psi + ... + (n-1)\, j\eta$$

является производящей функцией для точного значения вероятности наблюдения ВП заданного вида, где

$$\beta_i = \tfrac{1}{\sqrt{1-4p}} \left[\left(1+\sqrt{1-4p}\right)^{i+1} - \left(1-\sqrt{1-4p}\right)^{i+1} \right],$$

а целочисленные значения $\xi, \psi, ..., \eta$ — характеризуют наличие или отсутствие в наблюдаемой последовательности сложных объектов с длиной постобъектов равной i.

Доказательство. Сформируем сложные объекты, состоящие из композиции динамического вектора перехода с вероятностью [1]:

$$p = \frac{3^{r-\mu}}{m^2},$$

и постобъекта длиной i. Тогда, учитывая все разбиения многомерной выборки вида

$$n = 3j\xi + 4j\psi + ... + nj\eta, \quad j = 1,$$

можем записать соотношение для вероятности пропуска ошибки при регистрации векторов переходов (или субдинамических векторов) в последовательности длиной n:

$$m_K(0) = \sum_g^{n-1} \frac{1}{m^{n-\sum_{i=1}^{n-2} ik_{1,i}}} \sum_{n-g} \left(3^{r-\mu}\right)^{k_{1,1}} \times$$
$$\times \prod_{i=2}^{n-2} \left(\tfrac{3^{r-\mu}}{2^{i+1}} \beta_i \right)^{k_{1,i}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-2} k_{1,i}\right)!}{\prod_{i=1}^{n-2} k_{1,i}!}, \quad (2)$$

при этом параметр $g = 2j\xi + 3j\psi + (n-1)\, j\eta$ или $g = 2jk_{1,1} + 3jk_{1,2} + (n-1)\, jk_{1,n-2}$, где $k_{1,i}$ — число сложных объектов с одним вектором перехода в последовательной серии из нескольких ВП.

Выполним преобразование факториальных моментов в соотношении (2), в результате чего получим функцию:

$$m_K(0) = \sum_g \sum_{n-g} \frac{1}{m^{n-g-\sum_{i=1}^{n-2} k_{1,i}}} \frac{1}{m^{2\sum_{i=1}^{n-2} k_{1,i}}} \times$$
$$\times \left(\tfrac{3^{r-\mu}}{2^0}\right)^{k_{1,1}} \left(\tfrac{3^{r-\mu}}{2^{2+1}}\right)^{k_{1,2}} \beta_2^{k_{1,2}} \left(\tfrac{3^{r-\mu}}{2^{3+1}}\right)^{k_{1,3}} \beta_3^{k_{1,3}} \times$$
$$\times ... \times \left(\tfrac{3^{r-\mu}}{2^{(n-2)+1}}\right)^{k_{1,n-2}} \beta_{n-2}^{k_{1,n-2}} \times$$

$$\times \frac{(k_{1,1}+k_{1,2}+k_{1,3}+...+k_{1,n-2})!}{k_{1,1}!k_{1,2}!k_{1,3}!...k_{1,n-2}!}.$$

Приведем подобные в степени числа m и сгруппируем члены с одинаковыми показателями. При этом имеем:

$$m_K(0) = \sum_{g}^{n-1} \sum_{n-g} \frac{1}{m^{n-g-\sum_{i=1}^{n-2} k_{1,i}}} \left(\frac{3^{r-\mu}}{m^2}\right)^{k_{1,1}} \times$$
$$\times \left(\frac{3^{r-\mu}}{m^2}\frac{\beta_2}{2^{2+1}}\right)^{k_{1,2}} \left(\frac{3^{r-\mu}}{m^2}\frac{\beta_3}{2^{3+1}}\right)^{k_{1,3}} \times ... \times$$
$$\times \left(\frac{3^{r-\mu}}{m^2}\frac{1}{2^{(n-2)+1}}\beta_{n-2}\right)^{k_{1,n-2}} \times$$
$$\times \frac{(k_{1,1}+k_{1,2}+k_{1,3}+...+k_{1,n-2})!}{k_{1,1}!k_{1,2}!k_{1,3}!...k_{1,n-2}!}.$$

Тогда, используя методику преобразования произведения в полиномиальную функцию, для произвольного момента времени t и параметра x_1 можем записать:

$$m_K(t) = \sum_{g}^{n-1} \left(x_1^1 pe^t + \tfrac{1}{2^{2+1}} x_1^2 \beta_2 pe^t + ... + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{(n-2)+1}} x_1^{n-2} \beta_{n-2} pe^t + \frac{1}{m}\right)^{n-g}. \qquad (3)$$

Откуда при $t = 0$ и соответствующей полиномиальным коэффициентам аппроксимации β_i, получаем результат (1). Теорема доказана.

В соотношении (3) степень параметра равная i указывает на длину постобъекта, а произведение на вариативность частной функции правдоподобия в пределах данного постобъекта.

II. Численное значение вероятности ошибки в асимптотике

Пусть случайный процесс характеризуют параметры $r = 2,\ \mu = 1$, что определяет максимальную вероятность наблюдения ВП равную:

$$p_{\max} = \frac{3^{r-\mu}}{m^2} = \frac{3}{16}.$$

Тогда в соответствии с формулой (1) получаем:

$$\frac{1}{2^{i+1}}\beta_i = 2\left[(0,75)^{i+1} - (0,25)^{i+1}\right].$$

В асимптотике длина постобъекта i может быть рассчитана по формуле:

$$i = \frac{1-2p}{p} = \frac{10}{3}.$$

Соответственно значение g будет равно:

$$g = \frac{1-p}{p} = \frac{13}{3}.$$

Тогда из сформированного выше энумератора имеем упрощенное равенство вида:

$$m_K(0) = \left[\tfrac{3}{8}\left[(0,75)^{i+1} - (0,25)^{i+1}\right] + \tfrac{1}{4}\right]^{n-g} =$$
$$= (0,35688)^{n-4,333...}. \qquad (4)$$

Учитывая, что дробь в степени n (то есть равной длине выборки) есть бесконечно малая величина можем констатировать факт весьма низкой вероятности пропуска ошибки при идентификации выборки контрольным кодом, соответствующим числу векторов переходов.

Используя логику формирования монообъектов с вероятностью указанной выше в доказанной теореме, можем записать также соотношение для вероятности ошибки в виде следующего равенства:

$$m_K(t) \approx \tfrac{1}{m^n}(3^{r-\mu}m)^{np}\left[\tfrac{1}{2^{i+1}}\ \tfrac{1}{\sqrt{1-4p}} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\left(1+\sqrt{1-4p}\right)^{i+1} - \left(1-\sqrt{1-4p}\right)^{i+1}\right]\right]^{np} =$$
$$= (0,3585228)^n. \qquad (5)$$

Полученные результаты незначительно отличаются по уровню мощности классов эквивалентностей, что следует из дробного представления параметров g и i, имеющих фактически статус целочисленных значений в общей форме функции (3).

III. Асимптотика для $r = \mu$

В более общем случае, то есть для вероятности регистрируемого события равной:

$$p = \frac{3^{r-\mu}}{m^2},\ \ r > 2,$$

можем записать другой крайний случай вероятности при равенстве параметров $r = \mu$:

$$p = \frac{1}{m^2} = \ = \frac{1}{16}.$$

Тогда имеем:

$$i = m^2 - 2,\ g = m^2 - 1.$$

С учетом данных значений и $m = 4$ имеем:

$$m_K(0) = \left(\tfrac{1}{16}0,408115 + \tfrac{1}{4}\right)^{n-15} =$$
$$= (0,275507)^{n-15}. \qquad (6)$$

Положим теперь значение $r = 5$, тогда:

$$m_K(0) \approx \left[\tfrac{1}{1022}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{32^2-4}{32^2}}\right)^{1023} + \tfrac{1}{32}\right]^{n-1023} =$$
$$= (0,0316098)^{n-1023}. \qquad (7)$$

Сравнение результатов (6) и (7) показывает, что уровень вероятности ошибки с ростом разрядности наблюдаемого случайного процесса уменьшается:

$$\ln \frac{(0,0316098)^{n-1023}}{(0,275507)^{n-15}} \approx 2,676825$$

при $n = 1\ 000\ 000$.

1. И.П.Кобяк. Асимптотика для вероятности пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов // В сб. науч. статей VII Международной науч.-практич. конференции «BIG DATA and Advanced Analytics», Минск, 19-20 мая 2021 г. – Минск : Бестпринт, 2021. – С. 328–335.