О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Цегельник В.В.[1]

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, факультет компьютерных систем и сетей

П.Бровки, 6, 220013 Минск, Беларусь tsegvv@bsuir.by

Относительно решений системы уравнений

$$q' = \frac{1}{p} - q^2 - \frac{t}{2},\ p' = -2pq - bp^2 \tag{1}$$

с неизвестными функциями p, q независимой переменной t и параметром b справедлива

Теорема 1. *Пусть* (q,p) *— решение системы* (1). *Тогда*

$$(q_1, p_1) = \left(-q, \left(-\frac{1}{p} + 2q^2 + t\right)^{-1}\right) \tag{2}$$

есть решение системы

$$q_1' = \frac{1}{p_1} - q_1^2 - \frac{t}{2},\ p_1' = -2p_1q_1 + (b-1)p_1^2. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы достаточно пару (q_1, p_1), определяемую (2), подставить в (3) с учетом (1). Справедлива также

Теорема 2. *Пусть* (q_1,p_1) *— решение системы* (3). *Тогда*

$$(q, p) = \left(-q_1, \left(-\frac{1}{p_1} + 2q_1^2 + t\right)^{-1}\right) \tag{4}$$

— решение системы (1).

Система (1) по q эквивалентна второму уравнению Пенлеве [1]

$$q'' = 2q^3 + tq + b - \frac{1}{2}, \tag{5}$$

а по p — уравнению

$$2pp'' = 3p'^2 - 4p + 2tp^2 + b^2p^4. \tag{6}$$

Из второго уравнения системы (1) (в силу (2)) следует, что общее решение уравнения (6) не имеет подвижных критических особых точек. Следовательно оно является уравнением Пенлеве–типа.

Система (3) по p_1 эквивалентна уравнению

$$2p_1p_1'' = 3{p'}_1^2 - 4p_1 + 2tp_1^2 + (1-b)^2p^4. \tag{7}$$

Уравнение (7) получается из (6) преобразованием $p \to p_1$, $b \to 1 - b$.

Поскольку вторые компоненты пар (q_1, p_1) и (q, p) из (2), (4) можно представить в виде

$$p_1 = \left(-\frac{1}{p} + \frac{(p' + bp^2)^2}{2p^2} + t \right)^{-1}, \tag{8}$$

$$p = \left(-\frac{1}{p_1} + \frac{(p_1' + (1-b)p_1^2)^2}{2p_1^2} + t \right)^{-1} \tag{9}$$

соответственно, то формулы (8), (9) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (6).

Уравнение (6) в случае $p = b^{-1}v$, $b = \beta + \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$, β — параметр, рассматривалось в [2].

Литература

1. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ОНТИ, 1939.

2. Kudryashov N.A. *Rational solutions of equations associated with the second Painleve' equation* // Regular and chaotic dynamics. 2020. Vol. 25. no 3. P. 273–280.