ТРЕХМЕРНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗНОСТИ НА НИХ

Можей Н.П.[1]

[1]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
П. Бровки 6, 220013, Минск, Беларусь, mozheynatalya@mail.ru

В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность (см., например, [1]).

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором связная группа Ли $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Все изотропно-точные пары с $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ приведены в [2]. Однородное пространство $\bar{G}/G$ редуктивно, если $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Такое разложение называется каноническим. Если $\bar{G}/G$ является симметрическим, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M,\ \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ (см., например, [3]). Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$ для всех $x, y \in \bar{g}$; тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид: $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{g}$. Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Определим тензор Риччи Ric: $\mathrm{Ric}(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквиаффинной, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Под эквиаффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ без кручения, для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = 0$, называется канонической связностью (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$), ее также называют канонической связностью второго рода. Каждое редуктивное однородное пространство допускает единственную инвариантную аффинную связность без кручения, имеющую те же геодезические, что и каноническая: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y = 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad x, y \in \mathfrak{m}$. Такая связность называется естественной связностью без кручения, ее также называют канонической связностью первого рода.

Найдены трехмерные редуктивные и симметрические однородные пространства (а также трехмерные изотропно-точные однородные пространства, не являющиеся редуктивными), получены все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве, определено, при каких условиях связность является эквиаффинной, выделены канонические связности и естественные связности без кручения, описаны также тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии, тензоры Риччи.

Литература

1. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. V. 2. New York: Interscience Publishers, 1969, 470 p.

2. Можей Н.П. *Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них*. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015, 394 с.

3. Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. Journ. Math. 1954. V. 76., no 1. P. 33-65.