ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2021, том 10, № 4, с. 295–301

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.925.7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ИЛИ ЧЕТЫРЬМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

 В. В. Цегельник[1,*]

[1] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь*

**e-mail: tsegvv@bsuir.by*

Поступила в редакцию 06.09.2021 г.
После доработки 08.09.2021 г.
Принята к публикации 14.09.2021 г.

Исследованы аналитические свойства решений трех семейств трехмерных автономных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями. Консервативные системы первого семейства имеют две квадратичные нелинейности и две линейные компоненты. Системы второго семейства – консервативные системы, имеющие две квадратичные нелинейности, одну линейную компоненту и один постоянный член. К системам третьего семейства относятся консервативные системы с четырьмя квадратичными нелинейностями. Для анализа решений рассматриваемых систем использован тест Пенлеве, а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями *P*-типа. Выделены три системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения одной из указанных систем выражаются через элементарные функции, а двух других – через функции-решения первого или второго уравнений Пенлеве. Показано, что среди систем, не являющихся системами Пенлеве-типа, имеются такие, одна из компонент которых вообще не имеет подвижных особых точек. Для каждой из систем третьего семейства построены точные однопараметрические семейства решений. Кроме того, показано наличие у одной из систем третьего семейства двухпараметрического семейства мероморфных решений. Общим (с качественной точки зрения) для данных систем (за исключением одной) является отсутствие в них хаоса.

Ключевые слова: консервативная система, нехаотичное поведение, тест Пенлеве, *P*-свойство, уравнения Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X2104012X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследованы аналитические свойства решений четырех семейств трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями. Указанные системы принадлежат [2] к классу из семи семейств консервативных систем с общим числом членов в правых частях равным 4.

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней исследуются аналитические свойства решений остальных трех семейств трехмерных автономных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями.

Напомним, что система дифференциальных уравнений (или уравнение) является системой (уравнением) Пенлеве-типа, если подвижными (зависящими от начальных условий) ее (его) решения могут быть только полюсы [3]. В данном случае говорят, что система (уравнение) является системой (уравнением) *P*-типа или обладает *P*-свойством решений. Для анализа решений, рассматриваемых в данной статье систем, будем использовать тест Пенлеве [4, 5], а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями *P*-типа [6, 7].

2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ДВУМЯ ЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{2}$$

$$\dot{x} = y^2 + z^2, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{3}$$

$$\dot{x} = 2xy + z, \quad \dot{y} = -y^2, \quad \dot{z} = x. \tag{4}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{x} = xz, \quad \dot{z} = z. \tag{5}$$

$$\dot{x} = xz + y, \quad \dot{y} = -yz, \quad \dot{z} = x. \tag{6}$$

$$\dot{x} = x^2 + z, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = y. \tag{7}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = \varepsilon y. \tag{8}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \tag{9}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \tag{10}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = \varepsilon y. \tag{11}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = y. \tag{12}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \tag{13}$$

$$\dot{x} = yz + x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -z. \tag{14}$$

$$\dot{x} = y^2 - z^2, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{15}$$

В системах (1)–(15) x, y, z – неизвестные функции независимой переменной t; $\varepsilon^2 = 1$. Всюду ниже будем считать переменную t комплексной.

В работе [2] доказано, что каждая из систем (1)–(14) не имеет хаотического поведения.

Теорема 1. Ни одна из систем (1)–(3), (5–15) не является системой P-типа. Вместе с тем, компонента z систем (5), (14) вообще не имеет подвижных особых точек.

Доказательство. Системы (1)–(3) эквивалентны уравнениям третьего порядка

$$\dddot{z} = z^2 + z\dot{z}, \tag{16}$$

$$\dddot{y} = y^2 + y\dot{y}, \tag{17}$$

$$\dddot{z} = \dot{z} + z^2 \tag{18}$$

соответственно. Уравнения (16)–(18) не входят в список [7] уравнений, общие решения которых свободны от подвижных критических особых точек.

Из второго уравнения системы (5) $z = C_1 e^t$, где C_1 – произвольная постоянная. Уравнение, определяющее функцию y, имеет вид $\ddot{y} = C_1 e^t y^2$ и не входит в список [6] уравнений второго порядка, являющихся уравнениями P-типа.

Системы (6), (7) эквивалентны уравнениям третьего порядка

$$\dddot{z} = \dot{z}^2 - z^2\dot{z}, \tag{19}$$

$$\dddot{x} = 2\dot{x}^2 + 4\dot{x}x^2, \tag{20}$$

соответственно. Каждое из данных уравнений не входит в список [7] уравнений, общие решения которых обладают свойством Пенлеве.

Из второго уравнения системы (14) $z = C_1 e^{-t}$. Тогда для определения функции x имеем уравнение

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - x = C_1 e^{-t} x^2. \tag{21}$$

Уравнение (21) не принадлежит к классу [6] уравнений второго порядка, являющихся уравнениями P-типа.

Система (15) эквивалентна уравнению

$$\dddot{z} = \dot{z}^2 - z^2, \tag{22}$$

которое на основании [7] не является уравнением P-типа.

Что касается систем (8)–(13), то ни одна из них не проходит первый шаг теста Пенлеве. А именно, применение первого шага теста показывает наличие хотя бы у одной из компонент решения подвижных критических особых точек. Теорема доказана. Нетрудно проверить, что системы (8)–(13) эквивалентны уравнениям третьего порядка

$$z\dddot{z} = \dot{z}\ddot{z} + \varepsilon z^2 z^2 + z^2\dot{z}, \tag{23}$$

$$(2\dot{y}\dddot{y} - \ddot{y})^2 = 16\dot{y}^3(y^2 + y)^2, \tag{24}$$

$$(\varepsilon\dddot{z} - \dot{z})^2 = 4\dot{z}^4(\varepsilon\dot{z} - z), \tag{25}$$

$$\dddot{z}^2 = 4\ddot{z}(\dot{z}^2 + z)^2, \tag{26}$$

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} - \varepsilon z^2\dot{z}^2 - \varepsilon z^3 = 0, \tag{27}$$

$$(\varepsilon\dddot{z} - \dot{z})^2 = 4z^4(\varepsilon\ddot{z} - z), \tag{28}$$

соответственно.

Теорема 2. Система (4) является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Из второго уравнения системы (4) $y = \tau^{-1}, \tau = t - t_0, t_0$ – произвольная постоянная. Уравнение для определения функции z имеет вид

$$\tau\frac{d^2 z}{d\tau^2} - 2\frac{dz}{d\tau} - \tau z = 0. \tag{29}$$

Преобразованием

$$z = (-is)^{3/2} q, \quad \tau = -is, \quad i^2 + 1 = 0 \tag{30}$$

уравнение (29) сводится к уравнению Бесселя

$$s^2\frac{d^2 q}{ds^2} + s\frac{dq}{ds} + \left[s^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] q = 0, \tag{31}$$

общее решение которого имеет вид [8]

$$q = (s)^{1/2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3}\tilde{C}_1 \sin s + \tilde{C}_2 \cos s\right], \tag{32}$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – произвольные постоянные.

Из (32) с учетом (30) следует, что z, а также $x = \dot{z}$ — однозначные функции, не имеющие подвижных особых точек. Теорема доказана.

Относительно решений систем (3), (15) справедлива Лемма. Система (3) преобразованием

$$t = iT,\ x = iu,\ y = -v,\ z = -iw \tag{33}$$

сводится к системе (15).

Применение к системе (15) теста Пенлеве показывает, что компонента z имеет разложение

$$z = -\frac{6}{\tau} + z_0 + 3\tau - \frac{z_0}{2}\tau^2 - \frac{9}{10}\tau^3 + \frac{3}{4}z_0\tau^4 + z_5\tau^5 + \ldots, \tag{34}$$

где $z_0 = 18$, z_5 — произвольная постоянная. Несмотря на то, что корни резонансного уравнения $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 6$, третья произвольная постоянная отсутствует в разложении (34).

Отметим, что преобразование (33) не позволяет сделать вывод о том, что система (15) (также, как и система (3)) не имеет хаотического поведения.

3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ, ЛИНЕЙНОЙ КОМПОНЕНТОЙ И ПОСТОЯННЫМ ЧЛЕНОМ

$$\dot{x} = y^2 + yz,\quad \dot{y} = x,\quad \dot{z} = 1. \tag{35}$$

$$\dot{x} = y^2 + z^2,\quad \dot{y} = x,\quad \dot{z} = 1. \tag{36}$$

$$\dot{x} = 1 + y^2,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = y. \tag{37}$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2,\quad \dot{y} = z^2,\quad \dot{z} = x. \tag{38}$$

$$\dot{x} = 1 + yz,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = x. \tag{39}$$

$$\dot{x} = 1 + yz,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = y. \tag{40}$$

$$\dot{x} = 1 + yz,\quad \dot{y} = z^2,\quad \dot{z} = x. \tag{41}$$

$$\dot{x} = 1 + \varepsilon y^2,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = x. \tag{42}$$

$$\dot{x} = 1 + yz,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = \varepsilon y. \tag{43}$$

$$\dot{x} = 1 + z^2,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = y. \tag{44}$$

$$\dot{x} = z^2 + \varepsilon,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = y. \tag{45}$$

$$\dot{x} = 1 + y,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = x^2. \tag{46}$$

$$\dot{x} = 1 + y,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = y^2. \tag{47}$$

$$\dot{x} = 1 + y,\quad \dot{y} = z^2,\quad \dot{z} = x^2. \tag{48}$$

$$\dot{x} = 1 + y,\quad \dot{y} = z^2,\quad \dot{z} = xy. \tag{49}$$

$$\dot{x} = x^2 + y,\quad \dot{y} = 1,\quad \dot{z} = -2xz. \tag{50}$$

$$\dot{x} = 1 + z,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = xy. \tag{51}$$

$$\dot{x} = y^2 + y,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = 1. \tag{52}$$

$$\dot{x} = y^2 + z,\quad \dot{y} = 1,\quad \dot{z} = x^2. \tag{53}$$

$$\dot{x} = y^2 + z,\quad \dot{y} = x^2,\quad \dot{z} = 1. \tag{54}$$

$$\dot{x} = y^2 + z,\quad \dot{y} = xz,\quad \dot{z} = 1. \tag{55}$$

Теорема 3. Системы (43), (50), (53) являются системами Пенлеве-типа.

Доказательство. Действительно, система (43) имеет первый интеграл $x = \frac{\varepsilon z^2}{2} + t + +\varepsilon C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Из первого уравнения системы (42) следует, что $y = \varepsilon\dot{z}$. Тогда из второго уравнения получаем $x = \varepsilon\ddot{z}z^{-1}$. В силу этого из первого интеграла получаем уравнение относительно z:

$$\ddot{z} = \frac{z^3}{2} + 2z(t + \varepsilon C_1). \tag{56}$$

Уравнение (56) преобразованием $z = \lambda w$, $t + \varepsilon C_1 = \mu s$, где $\lambda^2\mu^2 = 4$, $2\mu^3 = 1$ приводится ко второму уравнению Пенлеве [6]

$$\frac{d^2w}{ds^2} = 2w^3 + sw + \alpha$$

при значении параметра $\alpha = 0$.

Система (50) с учетом того, что $y = t + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, сводится к системе

$$\dot{x} = x^2 + t + C_1,\ \dot{z} = -2zx. \tag{57}$$

Отметим, что первое уравнение системы (57) есть уравнение Риккати и его общее решение не имеет подвижных критических особых точек. Уравнение, определяющее функцию z имеет вид

$$2z\ddot{z} = \dot{z}^2 - 4z^2(t + C_1). \tag{58}$$

Вводя в (58) подстановку $z = e^{\int w(t)dt}$ относительно w получим уравнение Риккати $2\dot{w} = -w^2 - 4(t + C_1)$. Функция w в качестве подвижной особенности имеет простой полюс с вычетом 2. А тогда функция z вообще не имеет подвижных особых точек.

Что касается системы (53), то она (с учетом того, что $y = t + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная) преобразуется в систему $\dot{x} = z + (t + C_1)^2$, $\dot{z} = x^2$.

Исключая неизвестную функцию z относительно x получаем уравнение

$$\ddot{x} = x^2 + 2(t + C_1).$$

Последнее уравнение (аналогично как уравнение (56)) приводится к первому уравнению Пенлеве. Теорема полностью доказана.

Теорема 4. Ни одна из систем (35)–(42), (44)–(49), (51)–(52), (54)–(55) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Система (35) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = y^2 + (t + C_1)y$ (C_1 – произвольная постоянная), которое не входит в список [6] уравнений, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек.

Система (36) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = y^2 + (t + C_1)^2$, общее решение которого согласно [6] не свободно от подвижных критических особых точек.

Система (37) не проходит первый шаг теста Пенлеве. Она также эквивалентна уравнению $z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = z^2(1 + \dot{z}^2)$, которое не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений [9]. В силу этого (37) не является системой Пенлеве-типа. Для системы (38) не выполняется условие первого шага теста Пенлеве. Кроме того, она эквивалентна уравнению $\dddot{z}^2 = 4z^4(\ddot{z} - z)$. Данное уравнение не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений, так как содержит один доминантный член [9]. На основании этого система (38) не является системой Пенлеве-типа. Система (39) эквивалентна уравнению $z\dddot{z} - \dot{z}(\ddot{z} - 1) = z^2\dot{z}^2$, которое не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений (так как содержит один доминантный член). Для нее не выполняется условие первого шага теста Пенлеве. Поэтому она не является системой Пенлеве-типа.

Система (40) (с учетом наличия первого интеграла $x - \dfrac{x^2}{2} = t + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная) эквивалентна уравнению второго порядка, которое не входит в список [6]. Таким образом, система (40) не является системой Пенлеве-типа.

Для системы (41) не выполняется условие первого шага теста Пенлеве. Она эквивалентна уравнению $z\dddot{z} - \dot{z}(\ddot{z} - 1) = z^4$, не имеющему полиномиальных и целых трансцендентных решений.

Характерной особенностью системы (42) является то, что ее первые два уравнения не содержат неизвестную функцию z. Компонента x допускает представление в виде ряда Лорана $x = \dfrac{-\varepsilon}{\tau} + x_0 + x_1\tau + \ldots$. Но тогда из третьего уравнения системы сразу следует, что компонента z содержит логарифм. На основании этого делаем заключение, что система (42) не является системой Пенлеве-типа.

Для системы (44) не выполняется условие первого шага теста Пенлеве. Она также эквивалентна уравнению $\dddot{z}^2 = 4\ddot{z}(1 + z^2)^2$, которое не имеет полиномиальных (отличных от постоянной) и целых трансцендентных решений.

Применение первого шага теста Пенлеве к системам (45)–(49) показывает наличие хотя бы у одной из компонент решения подвижных критических особых точек. Каждую из данных систем можно заменить эквивалентным ей уравнением третьего порядка, которые не имеют полиномиальных и целых трансцендентных решений.

Система (51) также не является системой Пенлеве-типа, т.к. заменой $z \to y$, $y \to z$, $x \to x$ она сводится к системе (46).

Система (52) эквивалентна уравнению $a(t)\ddot{y} + \dot{a}(t)\dot{y} = y^2 + y$, где $a(t) = (t + C_1)^{-1}$, C_1 – произвольная постоянная. Указанное уравнение не входит в список [6] уравнений, являющихся уравнениями P-типа. Следовательно, система (52) не является системой Пенлеве-типа.

Система (54) эквивалентна неавтономной системе

$$x = y^2 + t + C_1, \quad \dot{y} = x^2, \tag{59}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Данная система не является системой Пенлеве-типа, а именно, число произвольных постоянных, входящих в ряды Лорана, представляющих ее формальные решения, не равно порядку системы.

Замечание. Отсутствие у общего решения системы (59) свойства Пенлеве следует также из результатов работы [10].

Система (55) (как и система (52)) эквивалентна уравнению $a(t)\ddot{y} + \dot{a}(t)\dot{y} = y^2 + t + C_1$, которое не входит в список [6] уравнений, являющихся уравнениями P-типа. Следовательно, данная система не является системой Пенлеве-типа. Теорема доказана.

4. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

$$\dot{x} = x^2 + \varepsilon y^2, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = -2zx. \tag{60}$$

$$\dot{x} = yz + x^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -2zx. \tag{61}$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = x^2. \tag{62}$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = y^2. \tag{63}$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = -2zx. \tag{64}$$

$$\dot{x} = xy + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = -yz. \tag{65}$$

$$\dot{x} = -2xy + yz, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x^2 \qquad (66)$$

$$\dot{x} = xy + z^2, \quad \dot{y} = \varepsilon x^2, \quad \dot{y} = -yz. \qquad (67)$$

$$\dot{x} = xy + z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{y} = -xz. \qquad (68)$$

$$\dot{x} = -2xy + z^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x^2. \qquad (69)$$

$$\dot{x} = -2xy + z^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = xy. \qquad (70)$$

Теорема 5. Ни одна из систем (60)–(70) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Для системы (60) не выполняется второй шаг теста Пенлеве, а именно, 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью. Система имеет точное решение

$$x = \frac{1}{2\tau}, \quad y = \frac{y_0}{\tau}, \quad z = \frac{z_0}{\tau},$$
$$z_0^2 = -y, \quad y_0^2 = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Для системы (61) возможны два случая. В первом случае она не проходит второй шаг теста Пенлеве, т.к. имеет два иррациональных положительных корня. Во втором случае система (61) допускает решение, представимое в виде формальных рядов Лорана, содержащих 2 (вместо трех) произвольных постоянных. Отметим, что система (61) имеет 2 семейства точных решений:

$$x = \frac{1}{2\tau}, \quad y = \frac{-1}{4\tau}, \quad z = \frac{3}{\tau},$$
$$x = y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = 0.$$

Система (62) обладает теми же свойствами, что и система (61), т.к. преобразованием $y \to z$, $z \to y$, $x \to x$ сводится к (61).

Что касается системы (63), то для нее не выполняется условие второго шага теста Пенлеве: 2 корня резонансного уравнения комплексно-сопряженные с положительной действительной частью. Система (63) имеет точное решение

$$x = \frac{1}{2\tau}, \quad y = \frac{z_0}{\tau}, \quad z = -\frac{z_0^2}{\tau}, \quad z_0^3 = 3.$$

Система (64) не нуждается в исследовании, т.к. преобразованием $y \to z, z \to y, x \to x$ она сводится к (63).

Что касается системы (65), то она имеет первый интеграл $x = -\frac{z}{2} + \frac{C_1}{z}$, где C_1 – произвольная постоянная. В результате система (65) редуцируется к системе второго порядка

$$\dot{y} = \varepsilon\left(\frac{C_1}{z} - \frac{z}{2}\right)z, \quad \dot{z} = -yz,$$

которая эквивалентна уравнению

$$z\ddot{z} - \dot{z}^2 - \frac{\varepsilon}{2}z^4 + C_1 z^2\varepsilon = 0, \qquad (71)$$

имеющему первый интеграл [8]

$$\dot{z}^2 - \frac{\varepsilon}{2}z^4 + 2C_1\varepsilon z^2 \ln z = C_2 z^2, \qquad (72)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Если $C_1 \neq 0$, то уравнение (72) не является уравнением P-типа. Если $C_1 = 0$, то оно интегрируется в эллиптических функциях. Таким образом:

1. Система (65) не является системой Пенлеве-типа.

2. Система (65) имеет двухпараметрическое семейство мероморфных решений, порождаемых решением уравнения $\dot{z}^2 - \frac{\varepsilon}{2}z^4 = C_2 z^2$, интегрируемого в эллиптических функциях.

Система (65) имеет точное решение $x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\tau^{-1}$, $y = \frac{1}{\tau}$, $z = \sqrt{2\varepsilon}\tau^{-1}$.

Система (66) не является системой Пенлеве-типа, т.к. она эквивалентна (с учетом того, что $y = \frac{1}{\tau}$) уравнению $\tau\ddot{x} = \dot{x} - x^2$, которое не содержится в списке уравнений [6], являющихся уравнениями P-типа. Система (66) также имеет точное решение $x = \frac{-3}{\tau}$, $y = \frac{-1}{\tau}$, $z = \frac{-9}{\tau}$.

Для системы (67) (также, как и для системы (61)) возможны 2 случая. В первом случае она не проходит второй шаг теста Пенлеве, т.к. имеет 2 комплексно-сопряженных корня с положительной действительной частью. Во втором случае система (5.8) допускает решение, представимое в виде формальных рядов Лорана, содержащих 2 (вместо трех) произвольных постоянных.

Система (67) имеет точное решение $x = \frac{x_0}{\tau}$, $y = \frac{1}{\tau}$, $z = \frac{z_0}{\tau}$, $x_0^2 = \varepsilon$, $z_0^2 = -2\sqrt{\varepsilon}$.

Система (68) не является системой Пенлеве-типа, так как она эквивалентна уравнению $\dddot{y} + 3y\ddot{y} = 0$, общее решение которого не свободно от подвижных критических особых точек [7]. Система (68) также имеет точное решение $x = -\frac{z_0^2}{2\tau}$, $y = \frac{1}{\tau}$, $z = \frac{z_0}{\tau}$, $z_0^3 = 2$.

Система (69) (с учетом того, что $y = -\frac{1}{\tau}$) редуцируется к системе

$$\dot{x} = \frac{2}{\tau}x + z^2, \quad \dot{z} = x^2,$$

которая не является системой Пенлеве-типа, т.к. корни резонансного уравнения иррациональны. Система (69) имеет точное решение

$$x = \frac{x_0}{\tau}, \quad y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = -\frac{x_0^2}{\tau}, \quad x_0^2 = -3.$$

Что касается системы (70) то она (с учетом того, что $y = -\frac{1}{\tau}$) эквивалентна уравнению $\tau\ddot{z} = -\dot{z} + z^2$, не принадлежащему согласно [6] к уравнениям P-типа. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений трех семейств трехмерных автономных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями. Общее число членов в правых частях каждой из указанных систем равно 4. Для анализа решений использован тест Пенлеве, а также замена систем эквивалентными им уравнениями второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями Пенлеве-типа. Выделены 3 системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения одной из указанных систем выражаются через элементарные функции, а двух других — через функции-решения первого или второго уравнений Пенлеве. Показано, что среди систем, не являющихся системами Пенлеве-типа, имеются такие, одна из компонент которых вообще не имеет подвижных особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями без хаотического поведения // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2020. Т. 9. № 4. С. 338–344.
2. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems. II. The conservative case // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 617–633.
3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
4. *Громак В.И., Грицук Е.В.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз.-мат. навук. 2010. № 3. С. 25–30.
5. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с хаотическим поведением // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 101–106.
6. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
7. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations // Stud. Appl. Math. 2001. V. 104. № 3. P. 171–228.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
9. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: ГИФМЛ, 1960.
10. *Яблонский А.И.* Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических точек // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 6. С. 752–762.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 295–301

Analytical Properties of Solutions of Three-Dimensional Conservative Systems with Two or Four Quadratic Nonlinearities

V. V. Tsegel’nik[a,#]

[a] Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013 Belarus

[#]e-mail: tsegvv@bsuir.by

Received September 6, 2021; revised September 8, 2021; accepted September 14, 2021

Abstract—The analytical properties of solutions of three families of three-dimensional autonomous conservative systems with two or four quadratic nonlinearities are studied. The conservative systems of the first family have two quadratic nonlinearities and two linear components. The conservative systems of the second family have two quadratic nonlinearities, one linear component, and one constant term. The conservative systems of the third family have four quadratic nonlinearities. To analyze the solutions of the systems under consideration, the Painlevé test, the reduction of the systems to second- or third-order equations equivalent to them, and the comparison of the latter with the known nonlinear P-type equations are used. Three systems whose general solutions have the Painlevé property are separated. The solutions of one of these systems are expressed in terms of elementary functions, and the other two are expressed in terms of solutions of the first or second Painlevé equation. It is shown that there are some non-Painlevé -type systems, one of the components of which does not have any moving singular points. For each of the systems of the third family, exact one-parameter families of solutions are constructed. In addition, it is shown that one of the systems of the third family has a two-parameter family of meromorphic solutions. A common qualitative property of these systems, except for one, is the absence of chaos in them.

Keywords: conservative system, non-chaotic behavior, Painlevé test, *P*-property, Painlevé equations

DOI: 10.1134/S2304487X2104012X

REFERENCE

1. Tsegel'nik V.V. Analiticheskie svoistva reshenii trekhmernikh autonomnykh konservativnikh system s odnoi ili tremya kvadratichnimi nelineinostyami bes chaoticheskogo povedeniya [Analytical properties of solutions of three-dimensional autonomous conservative systems with one or three quadratic nonlinearities without chaotic behavior]. *Vestnik NIYaU MIFI.* 2020, vol. 9, no. 4. pp. 338–344 (in Russian).
2. Heidel J., Zhang Fu. Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems. II. The conservative case. *Nonlinearity*. 1999. Vol. 12. P. 617–633.
3. Kudryashov N.A. *Analyticheskaya teoriya nelineynykh differentsial'nykh uravnenii* [Analytical theory of nonlinear differential equations] Moskau-Izhevsk, Institute computernykh issledovaniy, 2004. 360 p.
4. Gromak V.I., Gritsuk E.V. K theorii nelineynykh differentsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On the theory nonlinear differential equations with Painleve' property]. *Izvestiya NAN Belarusi. Seria fiz.-mat. Nauk,* 2010, no. 3. Pp. 25–30 (in Russian).
5. Tsegel'nik V.V. Analiticheskie svoistva reshenii autonomnykh system nelineinykh differentsial'nykh uravnenii tret'ego i chetvertogo poryadkov s chaoticheskim povedeniem [Analytical properties of solutions to autonomous systems of nonlinear third and fourth-order differential equations with chaotic behavior*]. Vestnik NIYaU MIFI,* 2015. vol. 4, no. 2. Pp. 101–106 (in Russian).
6. Ince E.L. *Obiknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations] Kharkov. ONTI, 1939. 720 p.
7. Cosgrove C.M. Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. *Stud. Appl. Math.* 2001. Vol. 104, no. 3. Pp. 171–228.
8. Катке Э. *Spravochnik po obiknovennim differentsial'nim uravneniyam* [Handbook of ordinary differentsial equations]. Moscow, Nauka Publ. 1971. 576 p.
9. *Wittich H. Noveishie issledovaniya po odnoznachnym analiticheskim funktsiyam* [The latest research on the unique analytic functions] Moscow, GIFML Publ. 1960. 319 p.
10. *Yablonskii A.I.* Ob odnoi systeme differential'nykh uravnenii bez podvizhnykh kriticheskikh tochek [On one system differential equations without movable critical points] *Differentsial'nye uravneniya*. 1966. vol. 2, no. 6. pp. 752–762 (in Russian).