К ПОСТРОЕНИЮ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Каянович С.С.
доцент, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(Минск, Беларусь)

Доказательству разрешимости *дифференциальной* модели стержневого течения в канале посвящены работы [1] – [3] (в них можно найти встречающиеся ниже обозначения). В этой работе речь идёт о *разностном методе* её решения (точнее о существовании метода, для которого можно доказать его сходимость). Из модели ([3], (1) – (5)) рассмотрим только

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T; \qquad u_1\big|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \quad (s,t)\in \tilde{S}_T. \qquad (1)$$

Рассмотрим также канал, изображённый на рисунке 1.

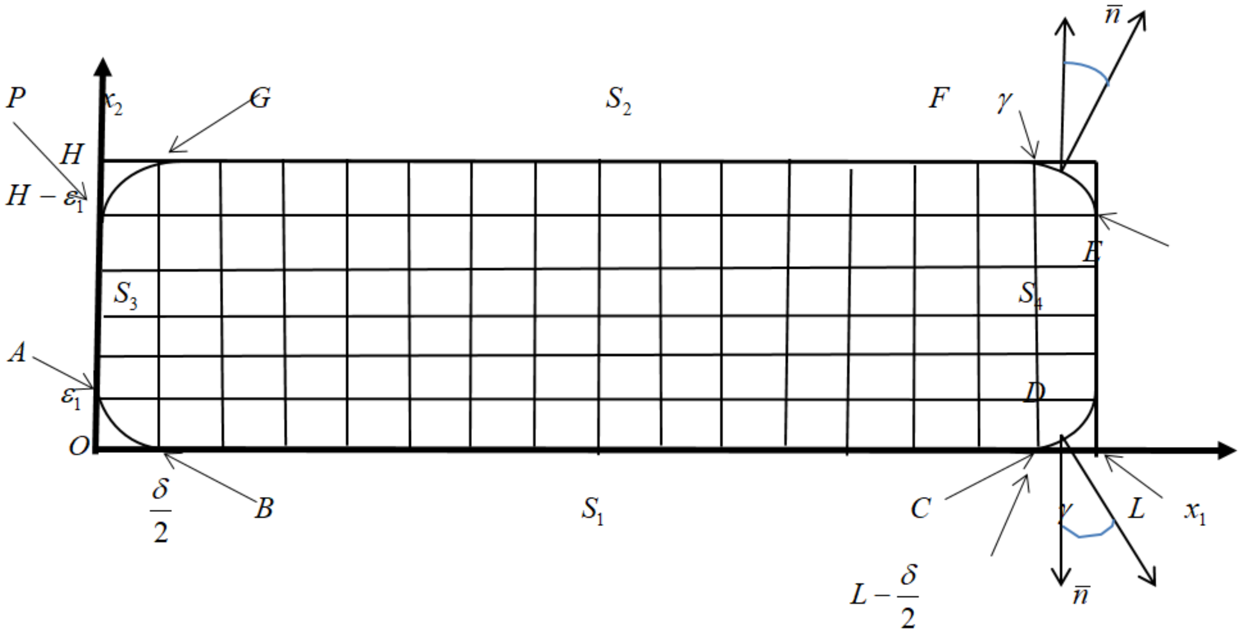

Рис. 1

Разностная схема для системы уравнений Навье – Стокса, которой удовлетворяет решение модели стержневого течения, исследовалась в [4]. Переходом в трубчатое поле система фактически была сведена к одному уравнению (1), в котором отсутствовало последнее слагаемое, причём теорема работы [4] доказывалась в случае, когда $u_1\big|_{S_T} = 0$. Но понятно, что компонента скорости $u_1 = 0$ только на $S_1 \times [0,T]$ и $S_2 \times [0,T]$; она не может равняться нулю на $S_3 \times [0,T]$ и $S_4 \times [0,T]$. Отметим, тем не менее, что наработки, полученные при доказательстве теоремы в [4], могут быть использованы и при рассмотрении разностной схемы для модели стержневого течения, но только в том случае, если мы сумеем свести нашу задачу для u_1 к задаче с нулевым граничным условием . Этим и займёмся в данной работе. Отметим, что указанное сведение важно так же, как и исследование разностной схемы, и что термины и обозначения *теории разностных схем* соответствуют [5].

В области $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$ рассмотрим сетки: $\overline{\omega}_\tau = \{t_m = m\tau,\ m = \overline{0,M},\ M\tau = T\}$ на отрезке $[0,T]$; $\overline{\omega}_h = \left\{\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) \middle| x_1^{(i)} = ih, i = 0,1,\ldots,M_1, M_1 h = L;\ \ x_2^{(j)} = jh, j = 0,1,\ldots,M_2, M_2 h = H\right\}$

на прямоугольнике $\overline{\Omega}=\left[0\le x_1\le L;0\le x_2\le H\right]$ и $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ на $\overline{\Omega}_T$. Решая задачу разностным методом, часто берут сетку $\overline{\omega}_h=\left\{\left(x_1^{(i)},x_2^{(j)}\right)\middle| x_1^{(i)}=ih_1;\ x_2^{(j)}=jh_2\right\}$ с шагами $h_2\ne h_1$, но ради сокращения записей шаги сетки $\overline{\omega}_h$ мы взяли равными $h_1=h_2=h$ и, кроме того, предположили, что $M_1h=L$, $M_2h=H$.

Обозначим символом $\overline{\Omega}_m$ замкнутую область, которая образуется при пересечении $\overline{\Omega}_T$ с плоскостью $t_m=m\tau$. Имеет место включение $\overline{\tilde{\Omega}}_m\subset\overline{\Omega}_m$. Область $\overline{\Omega}_m$, представляющая собой прямоугольник, изображена на рисунке 1, на котором представлена и сетка $\overline{\omega}_h$ ($\overline{\Omega}_m$ – это прямоугольник $\overline{\Omega}$, взятый при значении $t=t_m$) . Возможность вышеуказанного сведения подтверждает нижеследующая *теорема 1* ([6], теорема 16.IV), которую сформулируем для области, лежащей в двумерном пространстве (хотя теорема справедлива и в случае эвклидова пространства большего числа измерений), для чего рассмотрим задачу.

Пусть заданы плоская замкнутая область T класса A_1 и $p+1$ функций $f_0,f_1,...,f_p$, непрерывных на ∂T, где ∂T – граница области T. Требуется построить функцию $f=f(x)$ $\left(x=(x_1,x_2)\right)$, принадлежащую в $T-\partial T$ классу C_∞, т.е. имеющую в $T-\partial T$ производные любого порядка, и удовлетворяющую на ∂T следующим граничным условиям :

$$f=f_0,\quad \frac{\partial^q f}{\partial\overline{n}^q}=f_q\quad (q=1,2,...,p). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $T\in A_{p+1,\alpha}$ *и пусть функции* $f_q\in C_{p-q,\alpha}$, $q=0,1,...,p$. *Тогда существует, по крайней мере, одна такая функция* f, *что* $f\in C_\infty$ *в области* $T-\partial T$, $f\in C_{p,\alpha}(T)$, f *удовлетворяет условиям* (2).

В [1] – [3] доказано, что система уравнений стержневого течения имеет единственное решение при любом $t=t_m=m\tau$, причём $u_1\in C_{l,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}_m\right)$. Пусть $p=l$, $\overline{\tilde{\Omega}}_m\in A_{p+1,\alpha}$. В качестве заданных функций возьмём $f_q\Big|_{\tilde{S}_m}=\dfrac{\partial^q u_1}{\partial\overline{n}^q}\Bigg|_{\tilde{S}_m}$, $q=0,1,...,p$. В силу теоремы 1 существует такая функция f (хотя бы одна), что $f\in C_{l,\alpha}\left(\overline{\tilde{\Omega}}_m\right)$, на границе $\tilde{S}_m$ выполняются равенства $\dfrac{\partial^q f}{\partial\overline{n}^q}=f_q$, и, значит, $\dfrac{\partial^q f}{\partial\overline{n}^q}\Bigg|_{\tilde{S}_m}=\dfrac{\partial^q u_1}{\partial\overline{n}^q}\Bigg|_{\tilde{S}_m}$.

Зная о существовании f, поставим для неё разностную задачу (по возможности наиболее простую) и покажем, что задача имеет решение, удовлетворяющее необходимым граничным условиям. Только после этого можно будет вернуться к разностному решению задачи для стержневого течения и прибегнуть к наработкам, полученным в [4].

Для функции f в области $\tilde{\Omega}_m$ рассмотрим уравнение $\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}=0$ и граничное условие

$$f\Big|_{\tilde{S}_m}=\tilde{\psi}_1(s,t_m),\qquad (s,t_m)\in\tilde{S}_m, \tag{3}$$

т.е. задачу Дирихле. Существование решения этой задачи доказано (напр., [7], гл. III, § 31). Нас же интересует то её решение, которое помимо условия (3), удовлетворяет и условию $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{n}}\Bigg|_{\tilde{S}_m}=g\Big|_{\tilde{S}_m}$, причём это последнее должно быть естественным для реального течения в канале. Условие для нормальной производной функции f переопределяет задачу Дирихле.

Значит, оно должно быть таким, которое выполняется в реальном течении, и его выполнения на сетке можно добиться грамотным построением разностной схемы . Оно приводится в [8] (см. равенства (6) и (14)). По поводу условия $\int_0^H u_1^i dx_2 = Q$ (оно из равенств (6) в [8]), где $u_1^0 = u_1(t_m, 0, x_2)$, $u_1^1 = u_1(t_m, L, x_2)$, $i = 0,1$, заметим: при выполнении уравнения неразрывности оно справедливо для функции u_1 не только на входе и выходе канала, а на всей его длине, т.е. при $0 \le x_1 \le L$ ([9], гл. IV, § 7, стр. 118). Отсюда следует, что в реальном течении

$$\int_0^H \frac{\partial u_1(t_m, x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_2 = 0\,. \qquad (4)$$

Вернёмся к задаче Дирихле с граничным условием (3). Рассмотрим интеграл от функции $g = \frac{\partial f}{\partial \overline{n}}$ по кривой $\widetilde{S}_m$, разбив его на интегралы по отдельным частям этой кривой (рисунок 1). При этом будем считать, что выполнены: для криволинейных участков границы условия симметричности, для функции $\widetilde{\psi}_1(s, t_m)$ условие чётности, указанные в [1]. Получим

$$\int_{AB} \frac{\partial f(x_1, \theta_1(x_1))}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{BC} \frac{\partial f(x_1, 0)}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{CD} \frac{\partial f(x_1, \varphi_1(x_1))}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{DE} \frac{\partial f(L, x_2)}{\partial \overline{n}} dx_2 +$$

$$+ \int_{EF} \frac{\partial f(x_1, \varphi_2(x_1))}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{FG} \frac{\partial f(x_1, H)}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{GP} \frac{\partial f(x_1, \theta_2(x_1))}{\partial \overline{n}} dx_1 + \int_{PA} \frac{\partial f(0, x_2)}{\partial \overline{n}} dx_2 = \left(\int_{AB} + \int_{GP} \right) +$$

$$+ \left(\int_{BC} + \int_{FG} \right) + \left(\int_{CD} + \int_{EF} \right) + \left(\int_{DE} + \int_{PA} \right).$$ Интегралы в скобках – это перегруппированные вышестоящие интегралы. Сумма интегралов, стоящих в третьих скобках, равна

$$\int_{L-\frac{\delta}{2}}^{L} \left(\frac{\partial f(x_1, \varphi_1(x_1))}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_1, \varphi_1)}{\partial x_2} \cos\beta \right) dx_1 - \int_{L-\frac{\delta}{2}}^{L} \left(\frac{\partial f(x_1, \varphi_2(x_1))}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_1, \varphi_2)}{\partial x_2} \cos\beta \right) dx_1 =$$

$$= \int_{L-\frac{\delta}{2}}^{L} \left(\frac{\partial f(x_1, \varphi_1)}{\partial x_1} \cos\xi - \frac{\partial f(x_1, \varphi_2)}{\partial x_1} \cos\xi \right) dx_1 + \int_{L-\frac{\delta}{2}}^{L} \left(\frac{\partial f(x_1, \varphi_1)}{\partial x_2} \cos(\pi - \gamma) - \frac{\partial f(x_1, \varphi_2)}{\partial x_2} \cos\gamma \right) dx_1 = 0\,,$$

где $\xi = \frac{\pi}{2} - \gamma$, т.к. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ – функция чётная, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ – нечётная [1], угол γ на рис. 1. Суммы в первых и вторых скобках тоже равны 0. При рассмотрении четвёртых потребуется равенство вида (4). Итак, возможно решение, которое помимо условия (3), удовлетворяет и условию для нормальной производной. Проблемы, правда, могут быть на входе и выходе канала, где может пригодиться срезающая функция [1].

Список литературы:

1. Каянович С.С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения /Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук.-2015.-№ 1. - С. 52-59.
2. Каянович С.С. Краевая задача для стержневого течения в канале/ Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук.-2016.-№ 4.-С. 55-66.
3. Каянович С.С. О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения // Тезисы докладов XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2017). Минск, 16 – 20 мая 2017 г. –Ч.2 – Мн.: МО РБ, ИМ НАН Беларуси, 2017. С. 10-11.
4. Каянович С.С. Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье – Стокса / Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.-1981.-№ 2. -С. 36-40.

5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
6. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
8. Каянович С.С. Стержневое течение вязкой жидкости /Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэх. навук.-2013.-№ 3. - С. 32-35.
9. Каянович С.С. Кандидатская диссертация. Мн., 1988.