В.В. ЦЕГЕЛЬНИК
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрена автономная система двух дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью производных неизвестных функций. Доказано, что указанная система принадлежит к классу систем со свойством Пенлеве.

V.V. TSEGEL'NIK
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

ON SOLUTIONS OF A SYSTEM OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE PAINLEVE' PROPERTY

The autonomous system of two differential equations with quadratic nonlinearity of the derivative of unknown functions is considered. It is proved that this system belongs to the class of systems with the Painleve' property.

Исследованы аналитические свойства решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x &= -y + \alpha + \frac{(y' - a)^2}{b^2(y+\beta)^2}, \\ y &= -x + \alpha + \frac{(x' + a)^2}{b^2(x+\gamma)^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

с произвольными параметрами $a, b (b \neq 0), \alpha, \beta, \gamma$.

Теорема 1. Пусть $x(x' + a \neq 0)$, $y(y' - a \neq 0)$ −произвольные функции, удовлетворяющие системе (1). Тогда при условии $(x' + a)(y + \beta) + (y' - a)(x + \gamma) = 0$, $b \neq 0$ они являются решениями уравнений

$$2vv'' = v'^2 + 2b^2v^3 - b^2(\alpha + \beta + \gamma)v^2 - a^2, \ v = x + \gamma, \qquad (2)$$

$$2uu'' = u'^2 + 2b^2u^3 - b^2(\alpha + \beta + \gamma)u^2 - a^2, \ u = y + \beta \qquad (3)$$

соответственно.

Уравнение (2)((3)) интегрируется в эллиптических функциях.

Теорема 2. Пусть $x(x' + a \neq 0)$, $y(y' - a \neq 0)$ − произвольные функции, удовлетворяющие системе (1). Тогда при условии $(x' + a)(y + \beta) - (y' - a)(x + \gamma) = 0$, $b \neq 0$ они являются решениями уравнений

$$2vv'' = 3v'^2 + 4av' + (\alpha + \beta + \gamma)b^2v^2 + a^2, \ v = x + \gamma, \qquad (4)$$

$$2uu'' = 3u'^2 - 4av' + (\alpha + \beta + \gamma)b^2u^2 + a^2, \ u = y + \beta \qquad (5)$$

соответственно.

Уравнение (4) в случае $a = 0$ заменой $v = v_1^{-2}$ приводится к линейному уравнению $2v''_1 = -(\alpha + \beta + \gamma)v_1$.

С помощью преобразований $v = a \cdot q^{-1} (a \neq 0)$, $q = T' \cdot T^{-1}$и дифференцированием относительно функции T получается линейное уравнение четвертого порядка.

Приведенные выше рассуждения справедливы и по отношению к уравнению (5). Таким образом, имеет место

Теорема 3. Система (1) является системой Пенлеве-типа.

Легко видеть, что формулы (1) определяют взаимно однозначное соответствие (преобразование Беклунда) между решениями уравнений (2),(3).

Сказанное справедливо и по отношению к уравнениям (4), (5), так как уравнение (5) получается из уравнения (4) заменой $v \to u$, $a \to -a$.

Система (1) в случае $a = \alpha = 0$, $b^2 = 1$ получена в [1].

Список литературы

1. Мартынов И.П., Парманчук О.Н., Пецевич В.М. //Проблемы физики, математики и техники. 2011, № 3(8). С. 74-77.