Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ

В трех частях

Часть 3

Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, З. Н. Примичева

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей I ступени высшего образования, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2022

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73
М34

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра высшей математики
Белорусского национального технического университета
(протокол №10 от 21.05.2021);

доцент кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
кандидат физико-математических наук, доцент А. В. Конюх

М34 **Математика.** Сборник тематических заданий с образцами решений. В 3 ч. Ч. 3 : Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Числовые и функциональные ряды. Элементы теории функции комплексной переменной : пособие / Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, З. Н. Примичева. – Минск : БГУИР, 2022. – 262 с. : ил.
ISBN 978-985-543-641-7 (ч. 3).

Содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, числовые и функциональные ряды, элементы теории функции комплексной переменной и образцы решений для самостоятельной контролируемой работы студентов.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов и преподавателей высшей математики.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2018 году (авторы: Ж. А. Черняк, О. Н. Малышева, З. Н. Примичева, О. А. Мокеева, Л. И. Василюк).

Часть 2-я издана в БГУИР в 2020 году (авторы: Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, З. Н. Примичева, Л. И. Василюк).

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-543-641-7 (ч. 3)
ISBN 978-985-543-395-9

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является третьей, заключительной частью учебно-методического комплекса «Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений» в трех частях.

В пособии содержатся варианты индивидуальных заданий по следующим разделам высшей математики, изучаемым во втором и третьем семестрах в техническом университете: «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», «Числовые и функциональные ряды», «Элементы теории функции комплексной переменной», а также образцы решений задач из типовых вариантов.

Предлагаемые наборы тематических заданий включают в себя наряду со стандартными задачами много заданий с оригинальными авторскими формулировками. Большинство задач данного пособия имеет средний уровень сложности, соответствующий требованиям учебной программы. Для студентов с высоким уровнем знаний предлагаются более сложные задачи. В приведенных решениях заданий из типовых вариантов содержатся все вычислительные выкладки, сопровождающиеся словесными пояснениями, что дает возможность студенту детально разобраться в решениях задач каждого раздела.

По мнению авторов, данные индивидуальные тематические наборы задач можно успешно использовать для самостоятельной контролируемой работы студентов, а также для проведения практических занятий, самостоятельных и контрольных работ, зачетов и экзаменов.

1. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Задания по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»

Задание 1

Преобразуйте двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в повторный двумя возможными способами. Выберите наиболее простой из полученных повторных интегралов для вычисления двойного интеграла. (Область D в задаче а) задана системой неравенств, в задачах б) и в) – уравнениями ограничивающих ее линий, в задаче г) – является трапецией $A_1A_2A_3A_4$).

Варианты

1) а) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$, $D\colon\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=2x+y+1$, $D\colon\ y=x^2+1,\ y=5,\ x=0$;

в) $f(x,y)=x^2y$, $D\colon\ y=\dfrac{1}{x},\ y=x,\ y=0,\ x=2$;

г) $f(x,y)=1$, $D\colon\ A_1(1;1),\ A_2(1;3),\ A_3(3;5),\ A_4(4;4)$.

2) а) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y+1)^2}$, $D\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=\dfrac{y}{(2-x)^2}$, $D\colon\ y=4-x^2,\ x=0,\ y=1$;

в) $f(x,y)=3-x-y$, $D\colon\ y=\dfrac{2}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=3$;

г) $f(x,y)=1$, $D\colon\ A_1(-1;-1),\ A_2(1;-3),\ A_3(3;-3),\ A_4\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

3) а) $f(x,y)=\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=2x-y$, D: $y=-x^2$, $y=0$, $x=2$;

в) $f(x,y)=2xy$, D: $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$;

г) $f(x,y)=1$, D: $A_1(1;-2)$, $A_2(2;0)$ $A_3(7;-5)$, $A_4(4;-5)$.

4) а) $f(x,y)=\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=1-x$, D: $y=e^x$, $y=e$, $x=0$;

в) $f(x,y)=x^2+y$, D: $y=\dfrac{2}{x}$, $y=2x$, $y=0$, $x=2$;

г) $f(x,y)=1$, D: $A_1(2;-1)$, $A_2(5;-1)$, $A_3\left(\dfrac{5}{2};4\right)$, $A_4(1;1)$.

5) а) $f(x,y)=x\cos(x+y)$, D: $0\le x\le \pi$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$;

б) $f(x,y)=ye^x$, D: $y=\dfrac{x}{2}$, $x=2$, $y=0$;

в) $f(x,y)=xy$, D: $y=x^2$, $y=-x$, $y=1$;

г) $A_1(-2;-1)$, $A_2(-2;2)$, $A_3(0;3)$, $A_4\left(3;1\dfrac{1}{2}\right)$.

6) а) $f(x,y)=y\sin(x-y)$, D: $0\le x\le \pi$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$;

б) $f(x,y)=y2^x$, D: $y=\dfrac{1}{2}x+2$, $y=3$, $x=0$;

в) $f(x,y)=-2y-x$, D: $y=x^2-1$, $y=-3x+3$, $x=0$;

г) $A_1(-1;-2)$, $A_2(2;0)$, $A_3(2;3)$, $A_4\left(0;1\dfrac{2}{3}\right)$.

7) а) $f(x,y)=x^2y\cos(xy^2)$, $D:\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=x+y$, $D:\ y=\ln x,\ y=0,\ x=e$;

в) $f(x,y)=2x+3y$, $D:\ y=\sqrt{x},\ y=2-x,\ y=0,\ x=4$;

г) $A_1(1;2),\ A_2\left(2;4\frac{1}{3}\right),\ A_3(4;5),\ A_4(4;3)$.

8) а) $f(x,y)=\frac{x}{(x+y)^3}$, $D:\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=y^2\sin x$, $D:\ y=1+\cos x,\ y=0,\ x=0$;

в) $f(x,y)=x^2+2y$, $D:\ y=3x,\ y=\frac{3}{x},\ y=0,\ x=2$;

г) $A_1(1;1),\ A_2\left(3;1\frac{2}{3}\right),\ A_3(4;1),\ A_4(4;-1)$.

9) а) $f(x,y)=x^2y^2\sin xy^3$, $D:\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=2x-y$, $D:\ y=e^x,\ y=3,\ x=0$;

в) $f(x,y)=x^3+y$, $D:\ x=y^2,\ x=3,\ y=0,\ y=1$;

г) $A_1(1;-1),\ A_2(1;4),\ A_3(4;1),\ A_4(3;-3)$.

10) а) $f(x,y)=\frac{y^2}{(x+y^3)^2}$, $D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=y^2\cos x$, $D:\ y=\sin x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{2}$;

в) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{y}}$, $D:\ x=y^2,\ y=1,\ y=2,\ x=0$;

г) $A_1(-4;3),\ A_2(-1;3),\ A_3(0;1),\ A_4\left(-3\frac{1}{2};2\right)$.

11) а) $f(x,y)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}$, $D:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=1-x, \quad D:\ y=x^x+1,\ y=5,\ x=0;$

в) $f(x,y)=y\sqrt{x}, \quad D:\ x=y^2,\ y=x,\ x=1;$

г) $A_1(-4;4),\ A_2(-3;5),\ A_3(-1;3),\ A_4(-1;1)$.

12) а) $f(x,y)=y\cos(2x+y), \quad D:\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\le y\le\pi;$

б) $f(x,y)=x^2+y, \quad D:\ x=y^2,\ y=1,\ x=0;$

в) $f(x,y)=xy, \quad D:\ y=\ln x+1,\ y=0,\ x=0,\ x=1;$

г) $A_1(1;2),\ A_2(2;0),\ A_3(7;5),\ A_4(4;5)$.

13) а) $f(x,y)=x^2\sin(y-x), \quad D:\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi;$

б) $f(x,y)=x+y, \quad D:\ y=\frac{1}{x-2},\ y=3,\ x=4;$

в) $f(x,y)=\frac{x}{y}, \quad D:\ y=2x,\ y=\frac{x}{3},\ y=2;$

г) $A_1(2;1),\ A_2(5;1),\ A_3\left(2\frac{1}{2};-4\right),\ A_4(1;-1)$.

14) а) $f(x,y)=\frac{y^4}{(x^2+y^5)^2}, \quad D:\ 1\le x\le\sqrt{3},\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=y\cos x, \quad D:\ y=1+\cos x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{2};$

в) $f(x,y)=\frac{x}{y}, \quad D:\ y=x^2,\ y=2-x,\ y=4;$

г) $A_1(1;-2),\ A_2\left(2;-4\frac{1}{3}\right),\ A_3(4;-5),\ A_4(4;-3)$.

15) а) $f(x,y)=y\cos(x-y), \quad D:\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=\sqrt{xy}, \quad D:\ x=y^2,\ y=0,\ x=4;$

в) $f(x,y)=y(x-1),\quad D:\ \ y=\dfrac{1}{x-1},\ \ y=0,\ \ x=2,\ \ x=3;$

г) $A_1(-1;3),\ A_2(1;5),\ A_3(2;4),\ A_4(-1;1)$.

16) а) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{(x^3+y)^2},\quad D:\ 1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+2y,\quad D:\ y=-x,\ \ y=-\dfrac{1}{2}x+1,\ \ x=0;$

в) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2},\quad D:\ y=2x^2+1,\ \ y=1-2x,\ \ y=3;$

г) $A_1(-1;0),\ A_2(2;-2),\ A_3(2;0),\ A_4\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$.

17) а) $f(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^3},\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2},\quad D:\ y=x,\ \ y=\dfrac{1}{x},\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=x^2,\quad D:\ y=2^x,\ \ y=1-x,\ \ y=0,\ \ x=-1;$

г) $A_1(-1;4),\ A_2(2;4),\ A_3(3;2),\ A_4\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$.

18) а) $f(x,y)=x\sin(2x+y),\quad D:\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\ \ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};$

б) $f(x,y)=yx^3,\quad D:\ y=x^2-2,\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ x\ge 0;$

в) $f(x,y)=x,\quad D:\ x=-y^2,\ \ y=2-x,\ \ y=0,\ \ x=-1;$

г) $A_1\left(0;\dfrac{1}{2}\right),\ A_2\left(3;\dfrac{1}{2}\right),\ A_3\left(\dfrac{1}{2};5\dfrac{1}{2}\right),\ A_4\left(-1;2\dfrac{1}{2}\right)$.

19) а) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y+1)^3}},\quad D:\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x-y,\quad D:\ y=e^x,\ \ y=1,\ \ x=2;$

в) $f(x,y)=x+2,\quad D\colon\ y=x^2+1,\ y=-x+1,\ y=0,\ x=2;$

г) $A_1\left(-4;-2\frac{1}{2}\right), A_2\left(-4;\frac{1}{2}\right), A_3\left(-2;1\frac{1}{2}\right), A_4(1;0).$

20) а) $f(x,y)=x^2e^{xy},\quad D\colon\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=y\sin x,\quad D\colon\ y=1-\sin x,\ y=0,\ x=0;$

в) $f(x,y)=xy,\quad D\colon\ y=\frac{1}{x-1},\ y=x-1,\ y=0,\ x=3;$

г) $A_1(0;-1), A_2\left(1;2\frac{2}{3}\right), A_3(3;4), A_4(3;1).$

21) а) $f(x,y)=xy^2e^{x^2y},\quad D\colon\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=3x+2y,\quad D\colon\ y=x+1,\ y=0,\ x=2;$

в) $f(x,y)=x+1,\quad D\colon\ y=x^2+1,\ y=x+1,\ y=3-x,\ y=0;$

г) $A_1(-2;-1), A_2(-1;1), A_3(4;-4), A_4(1;-4).$

22) а) $f(x,y)=x2^{xy},\quad D\colon\ 2\le x\le 3,\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+2y,\quad D\colon\ y=-x-1,\ x=0,\ y=2;$

в) $f(x,y)=\frac{x}{y},\quad D\colon\ x=-y^2,\ y=x+6,\ y=4,\ x=0;$

г) $A_1(-5;-3), A_2\left(-4\frac{1}{2};-2\right), A_3(-1;-1), A_4(-2;-3).$

23) а) $f(x,y)=x(x+y)^5,\quad D\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;$

б) $f(x,y)=x+y,\quad D\colon\ y=x^2-2,\ y=x;$

в) $f(x,y)=2x,\quad D\colon\ y=e^x,\ y=1-x,\ y=0,\ x=2;$

г) $A_1(2;-3), A_2\left(2\frac{1}{2};-1\frac{1}{2}\right), A_3(6;-5), A_4(4;-5).$

24) а) $f(x,y)=x^2y^2e^{x^3y},\quad D\colon\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2;$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, D: $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$;

в) $f(x,y)=x+1$, D: $y=2-x$, $y=\dfrac{1}{3}x+2$, $y=0$, $x=3$;

г) $A_1(-1;1)$, $A_2(2;-1)$, $A_3(2;-4)$, $A_4\left(0;-2\dfrac{2}{3}\right)$.

25) а) $f(x,y)=x^2 3^{xy}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=y\sin x$, D: $y=1-\sin x$, $y=0$, $x=0$;

в) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, D: $y=-x^2$, $y=x$, $x=1$;

г) $A_1(-2;0)$, $A_2(0;2)$, $A_3(2;2)$, $A_4\left(-1\dfrac{1}{2};-1\dfrac{1}{2}\right)$.

26) а) $f(x,y)=x^3y^2e^{x^4y}$, D: $0\le x\le 1$, $1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=3x+y$, D: $y=x^2$, $y=0$, $x=2$;

в) $f(x,y)=\dfrac{y}{x+1}$, D: $y=1+x$, $y=9-3x$, $y=0$, $x=0$;

г) $A_1(-4;-3)$, $A_2(-4;-1)$, $A_3\left(-3;-\dfrac{1}{3}\right)$, $A_4(-1;-1)$.

27) а) $f(x,y)=y\sqrt{x+y^2}$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+y^2$, D: $y=\dfrac{2}{x}$, $y=1$, $x=1$;

в) $f(x,y)=xy$, D: $y=e^x$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$, $y=0$, $x=-1$;

г) $A_1(-4;1)$, $A_2(-4;3)$, $A_3\left(-2;2\dfrac{1}{3}\right)$, $A_4(-1;0)$.

28) а) $f(x,y)=y(x+y)^5$, D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+2y$, D: $y=\dfrac{2}{x}$, $y=3$, $x=2$;

в) $f(x,y)=x+1, \quad D:\ y=(x-1)^2,\ y=x+1,\ y=1-x$;

г) $A_1(0;-3),\ A_2(-1;-1),\ A_3\left(2\frac{1}{2};-2\right),\ A_4(3;-3)$.

29) а) $f(x,y)=xe^{xy}, \quad D:\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2$;

б) $f(x,y)=x^3+2y, \quad D:\ y=2-x,\ y=x,\ x=0$;

в) $f(x,y)=xy, \quad D:\ y=x-1,\ y=-x-1,\ y=0,\ x=2$;

г) $A_1(-1;-3),\ A_2(-2;1),\ A_3(1;4),\ A_4(1;-1)$.

30) а) $f(x,y)=x^2y^2e^{xy^3}, \quad D:\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$;

б) $f(x,y)=x^2+y, \quad D:\ y=2+2x,\ y=2,\ x=-1$;

в) $f(x,y)=x+y, \quad D:\ y=-\frac{1}{x},\ y=2,\ y=0,\ x=-1,\ x=0$;

г) $A_1(-4;5),\ A_2(-1;5),\ A_3(2;2),\ A_4(1;0)$.

Задание 2

Дана сумма повторных интегралов по области D.

1. Изобразите область интегрирования D и измените порядок интегрирования в повторных интегралах.

2. Найдите площадь области D двумя способами:

– непосредственно по рисунку;

– с помощью двойного интеграла.

3. Зная плотность $\rho(x,y)$ распределения массы по области D, вычислите:

– массу пластинки D;

– среднее значение плотности пластинки.

4. Найдите периметр области D двумя способами:

– непосредственно по рисунку как длину замкнутой ломаной;

– с помощью криволинейного интеграла первого рода.

5. Вычислите массу дуги L, где L – контур области D, если $\rho(x, y)$ – плотность распределения массы вдоль этой дуги.

6. Вычислите работу A силы $\overline{F} = (2x + y)\bar{i} - 6x^2 y \cdot \overline{j}$ вдоль положительно ориентированного контура L (границы области D) двумя способами:

– с помощью криволинейного интеграла второго рода;

– применяя формулу Грина.

Варианты

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1} f(x, y)dy; \quad \rho = x + y.$

2) $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-y-4}^{0} f(x, y)dy + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y-4}^{0} f(x, y)dx; \quad \rho = 2 - x.$

3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\frac{y}{2}}^{0} f(x, y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{y-3}^{0} f(x, y)dx; \quad \rho = 3 - 2x.$

4) $\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{2} f(x, y)dy + \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2} f(x, y)dy; \quad \rho = 3x^2 + 4y.$

5) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y} f(x, y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x, y)dx; \quad \rho = 4x + 1.$

6) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y}^{2} f(x, y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^{2} f(x, y)dx; \quad \rho = 3x + 2y.$

7) $\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{-y}^{3} f(x, y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{3y}^{3} f(x, y)dx; \quad \rho = 5x + y + 1.$

8) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-2}^{x} f(x, y)dy + \int\limits_0^4 dx \int\limits_{-2}^{-\frac{x}{2}} f(x, y)dy; \quad \rho = 8 - 2x - y.$

9) $\int\limits_{-4}^{-3} dy \int\limits_{-4-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{0} f(x,y)dx;\quad \rho = -2x - 2y.$

10) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{-2x}^{-1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-2}^{-x} f(x,y)dy;\quad \rho = 4 - y.$

11) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx;\quad \rho = \frac{x}{2} + 2y.$

12) $\int\limits_{-5}^{-3} dy \int\limits_{-5-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{y+1}^{0} f(x,y)dx;\quad \rho = 2 - x.$

13) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2x}^{2} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2} f(x,y)dy;\quad \rho = 2y + 1.$

14) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} dy \int\limits_{-2y}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{2y}^{1} f(x,y)dx;\quad \rho = x + y + 3.$

15) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{1}^{x+4} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1}^{-2x+1} f(x,y)dy;\quad \rho = y + 1.$

16) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{2}^{x+2} f(x,y)dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{2}^{14-3x} f(x,y)dy;\quad \rho = 3y + 3.$

17) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-y}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{2} f(x,y)dx;\quad \rho = 4x + 2y + 1.$

18) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y}{3}-3}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{\frac{y}{3}-3}^{1-y} f(x,y)dx;\quad \rho = 3y + 6.$

19) $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-3}^{x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{3x+3}^{x+1} f(x,y)dy;\quad \rho = 1 - y.$

20) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{2}^{8-2y} f(x,y)dx;\quad \rho = x + 2y.$

21) $\int\limits_{-3}^{-1,5}dx\int\limits_{-x}^{3}f(x,y)dy+\int\limits_{-1,5}^{0}dx\int\limits_{-x}^{-2x}f(x,y)dy;\quad \rho=y-2x.$

22) $\int\limits_{-1,5}^{0,5}dy\int\limits_{1}^{y+0,5}f(x,y)dx+\int\limits_{0,5}^{1}dy\int\limits_{-1}^{3-4y}f(x,y)dx;\quad \rho=2-x.$

23) $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{2-3y}^{-1}f(x,y)dx+\int\limits_{2}^{3}dy\int\limits_{3y-10}^{-1}f(x,y)dx;\quad \rho=-3x.$

24) $\int\limits_{-3}^{-1}dx\int\limits_{-x-3}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{2x}^{0}f(x,y)dy;\quad \rho=-2x-2y.$

25) $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{0}^{2y+4}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{0}^{1-y}f(x,y)dx;\quad \rho=4x+1.$

26) $\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{-2}^{x}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-2}^{-x}f(x,y)dy;\quad \rho=4-x-y.$

27) $\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-\frac{y}{2}}^{1}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1}f(x,y)dx;\quad \rho=4x+2.$

28) $\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{0}^{\frac{x}{3}}f(x,y)dy+\int\limits_{3}^{4}dx\int\limits_{0}^{4-x}f(x,y)dy;\quad \rho=2x+y.$

29) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-x-1}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2x-4}^{0}f(x,y)dy;\quad \rho=1-2y.$

30) $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-3x}^{2-x}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{2-x}f(x,y)dy;\quad \rho=3+4y.$

Задание 3

1. Сделайте рисунок фигуры, площадь которой вычисляется с помощью данных повторных интегралов, записанных в задаче **а)** – в прямоугольной декартовой, в задаче **б*)** – в полярной системах координат.

2. Вычислите площади фигур, полученных при решении задач **1а** и **1б***.

3. Найдите массу кривой L, которая является границей фигуры из задачи **а)**, если $\rho(x,y)$ – ее плотность.

Варианты

1) а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{2x+2} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy$, $\rho(x,y) = x^2 + 2y$;

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\,dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\,dr$.

2) а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{0} dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2+2x}}^{0} dy$, $\rho(x,y) = 2x + 1$;

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\,dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r\,dr$.

3) а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1} dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x-1}^{1} dy$, $\rho(x,y) = x + y$;

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r\,dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\,dr$.

4) а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-1+\sqrt{1-y^2}} dx$, $\rho(x,y) = y^2 + 2y$;

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr.$

5) а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1-x}^{2+\sqrt{1-x^2}} dy,\ \rho(x,y) = 3 - x;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr.$

6) а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{-1+\sqrt{1-x^2}} dy,\ \rho(x,y) = 2x - y;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{3\cos\varphi} r dr.$

7) а) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{3-\sqrt{2y-y^2}}^{3+\sqrt{2y-y^2}} dx,\ \rho(x,y) = 1 + x + y^2;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{3\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r dr.$

8) а) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y+4} dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx,\ \rho(x,y) = x + y + 5;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{3\cos\varphi} r dr.$

9) а) $\int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{-x^2+4x-3}} dy,\ \rho(x,y) = 2y + 2;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r dr .$

10) а) $\int\limits_{-3}^{-2} dy \int\limits_{0}^{3+y} dx + \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y^2-4y-3}} dx, \;\; \rho(x, y) = 1 + x - y;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{3\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r dr .$

11) а) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{-x-4}^{-1+\sqrt{-x^2-2x+3}} dy, \;\; \rho(x, y) = -2 - 2x - y;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr .$

12) а) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{2}^{1+\sqrt{4-x^2}} dy, \;\; \rho(x, y) = y + 3;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr .$

13) а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y+1}^{\sqrt{-y^2+2y+3}} dx, \;\; \rho(x, y) = x + 1;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr .$

14) а) $\int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{2}^{x} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{2}^{2+\sqrt{-x^2+6x-8}} dy, \;\; \rho(x, y) = 2(x + y);$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r\,dr$.

15) а) $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{3-\sqrt{4y-y^2}}^{7-y} dx$, $\rho(x,y) = y+1$;

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r\,dr$.

16) а) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{2-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{2+\sqrt{-x^2+2x+3}} dy$, $\rho(x,y) = 3x+2y+1$;

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r\,dr$.

17) а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{0} dy$, $\rho(x,y) = y^2+1$;

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r\,dr$.

18) а) $\int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-x^2+4x-3}} dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{0}^{4-x} dy$, $\rho(x,y) = xy+1$;

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r\,dr$.

19) а) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-2+\sqrt{-y^2+4y}}^{0} dx$, $\rho(x,y) = 1-x+y$;

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr .$

20) а) $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-x^2-6x-8}} dy + \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{-\frac{x}{2}} dy, \;\; \rho(x, y) = 2y - x;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr .$

21) а) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{\frac{y}{2}} dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{-y^2+6y-8}} dx, \;\; \rho(x, y) = 4x + y + 1;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr .$

22) а) $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+3}{2}} dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{1-\sqrt{1-x^2}} dy, \;\; \rho(x, y) = y - 2x;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr .$

23) а) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{1+\sqrt{-x^2-2x}}^{3+x} dy, \;\; \rho(x, y) = 2 - x;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr .$

24) а) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y-3}^{-1-\sqrt{-y^2-2y}} dx, \;\; \rho(x, y) = -x - y;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr.$

25) а) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{-x^2+6x-5}} dy + \int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{0}^{5-x} dy, \ \rho(x, y) = x + y^2;$

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} r dr.$

26) а) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{3-\sqrt{-y^2+4y}}^{3+y} dx, \ \rho(x, y) = 3x + 2y;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr.$

27) а) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-x-2}^{0} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy, \ \rho(x, y) = 2 - y;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr.$

28) а) $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-2-\sqrt{9-y^2}}^{1-y} dx, \ \rho(x, y) = y - 2x;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr.$

29) а) $\int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{3-\sqrt{-y^2+6y-8}}^{3} dx + \int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{y-1}^{3} dx, \ \rho(x, y) = x^2 + y;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{4\cos\varphi} r dr.$

30) а) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} dx, \;\; \rho(x,y) = 4x - y + 1;$

б*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{3\cos\varphi} r dr + \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r dr.$

Задание 4

Для двойного интеграла $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ изобразите область интегрирования D, перейдите к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$ и вычислите полученный интеграл.

Варианты

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, $\quad D\colon\; 9 \le x^2 + y^2 \le 25.$

2) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $\quad D\colon\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\; x \ge 0,\; y \ge 0.$

3) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, $\quad D\colon\; 9 \le x^2 + y^2 \le 16,\; x \le 0,\; y \ge 0.$

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad D\colon\; 1 \le x^2 + y^2 \le 16,\; x \le 0,\; y \le 0.$

5) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $\quad D\colon\; 4 \le x^2 + y^2 \le 36,\; y \ge 0.$

6) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$, $\quad D\colon\; \dfrac{\pi}{3} \le x^2 + y^2 \le \dfrac{\pi}{2},\; x \ge 0,\; y \le 0.$

7) $f(x,y) = x^2 y$, $\quad D\colon\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\; x \ge 0,\; y \le 0.$

8) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, $\quad D\colon\; 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\; y \ge 0.$

9) $f(x,y)=x^2-y^2$, D: $4\le x^2+y^2\le 9,\ 0\le x\le y$.

10) $f(x,y)=x^2\sqrt{x^2+y^2}$, D: $1\le x^2+y^2\le 9,\ y\le 0$.

11) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2$, D: $1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le 0$.

12) $f(x,y)=\dfrac{y^2\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}$, D: $1\le x^2+y^2\le 25,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

13) $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$, D: $1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\le y$.

14) $f(x,y)=x\sin\sqrt{x^2+y^2}$, D: $4\pi^2\le x^2+y^2\le 9\pi^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

15) $f(x,y)=y\cos\sqrt{x^2+y^2}$, D: $\dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le \pi^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

16) $f(x,y)=x\cos\sqrt{(x^2+y^2)^3}$, D: $4\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\le 0$.

17) $f(x,y)=y\sin\sqrt{x^2+y^2}$, D: $\pi^2\le x^2+y^2\le \dfrac{9\pi^2}{4},\ y\ge 0$.

18) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, D: $1\le x^2+y^2\le 9,\ 0\le y\le x$.

19) $f(x,y)=\dfrac{y\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, D: $\dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le \pi^2,\ y\ge 0$.

20) $f(x,y)=\dfrac{x\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, D: $4\pi^2\le x^2+y^2\le \dfrac{25\pi^2}{4},\ x\le 0$.

21) $f(x,y)=\dfrac{xe^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$, D: $1\le x^2+y^2\le 9,\ y\le x\le 0$.

22) $f(x,y)=\dfrac{ye^{-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $4\le x^2+y^2\le 9,\ y\le 0$.

23) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, D: $4\le x^2+y^2\le 16,\ -x\le y\le x,\ x\ge 0$.

24) $f(x,y)=\dfrac{1}{e^{x^2+y^2}}$, D: $1\le x^2+y^2\le 25,\ y=-x,\ y=0,\ x\le 0$.

25) $f(x,y)=\dfrac{x\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $1\le x^2+y^2\le \pi^2,\ x\le 0,\ y\ge 0$.

26) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, D: $4\le x^2+y^2\le 9,\ 0\le y\le x$.

27) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $\dfrac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1,\ 0\le -x\le y$.

28) $f(x,y)=xy$, D: $1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le 0,\ y\le 0$.

29) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$, D: $16\le x^2+y^2\le 25,\ y\le 0$.

30) $f(x,y)=x^4+y^4$, D: $1\le x^2+y^2\le 4$.

Задание 5

Дан трехкратный интеграл по пространственной области T.

1. Вычислите этот интеграл.

2. Изобразите область T, объем которой равен значению интеграла, и повторно найдите этот объем, используя подходящую формулу из элементарной геометрии.

3. Найдите массу области T по известной плотности $\rho(x,y,z)$ распределения массы.

4. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz$ по области P, являющейся параллелепипедом.

Варианты

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{5}-\frac{x}{5}-\frac{2y}{5}} dz,\quad \rho(x,y,z)=4x+3y+1;$

$$\iiint\limits_P (2x-y-z)\,dxdydz,\ P:\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 1,\ -2\le z\le 1.$$

2) $$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}} dy \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}+\frac{x}{4}-\frac{y}{2}} dz,\quad \rho(x,y,z)=-3x+2y;$$

$$\iiint\limits_P \left(x+y^2-2z\right)dxdydz,\ P:\ -1\le x\le 0,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 3.$$

3) $$\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}} dy \int\limits_{0}^{\frac{3}{5}-\frac{x}{5}+\frac{2y}{5}} dz,\quad \rho(x,y,z)=x-4y;$$

$$\iiint\limits_P \left(x+y+z^2\right)dxdydz,\ P:\ 1\le x\le 2,\ -2\le y\le 3,\ 0\le z\le 1.$$

4) $$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}-\frac{x}{8}} dy \int\limits_{-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{4}{3}y}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=2x+y;$$

$$\iiint\limits_P \left(x+y^2-z^2\right)dxdydz,\ P:\ -2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 5.$$

5) $$\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{0}^{1+\frac{x}{3}} dy \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}+\frac{x}{9}-\frac{y}{3}} dz,\quad \rho(x,y,z)=2-x+y;$$

$$\iiint\limits_P (x+yz)\,dxdydz,\ P:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 4,\ 0\le z\le 2.$$

6) $$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{-\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}}^{0} dy \int\limits_{-2+4x-6y}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=2x-y;$$

$$\iiint\limits_P \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz,\ P:\ 2\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4.$$

7) $$\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-2-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{-4-x-2y}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=-3x-y;$$

$$\iiint\limits_P \left(x+y+4z^2\right)dxdydz,\ P:\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 1.$$

8) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\frac{5}{2}+\frac{5x}{2}} dy \int\limits_{-5-5x+2y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = -x + 2y;$

$\iiint\limits_{P} x^2 yz\, dxdydz, \ P:\ -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 2 \le z \le 3.$

9) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{0}^{3x+6y+3} dz, \quad \rho(x,y,z) = -2x - 2y;$

$\iiint\limits_{P} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz, \ P:\ 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1.$

10) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2+x}^{0} dy \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}} dz, \quad \rho(x,y,z) = 3x - 2y;$

$\iiint\limits_{P} x^2 y^2 z\, dxdydz, \ P:\ -1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ -2 \le z \le -1.$

11) $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{-4+x}^{0} dy \int\limits_{-8+2x-2y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 2x - 3y;$

$\iiint\limits_{P} (2x + 4y + z)\, dxdydz, \ P:\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 2.$

12) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} dy \int\limits_{0}^{2-\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}} dz, \quad \rho(x,y,z) = x + y + 2;$

$\iiint\limits_{P} \left(2x - 3y^2 - z\right) dxdydz, \ P:\ 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 0.$

13) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_{-2+\frac{2x}{3}+y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = x + y + 3;$

$\iiint\limits_{P} 12xy^2 z\, dxdydz, \ P:\ 0 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 2.$

14) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+2} dy \int\limits_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = -x + 4y;$

$$\iiint\limits_P 6xyz^2\,dxdydz,\ P:\ -1\le x\le 0,\ 2\le y\le 3,\ 1\le z\le 2.$$

15) $$\int\limits_{-6}^{0} dx \int\limits_{-3-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{-3-\frac{x}{2}-y}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=1-x-2y;$$

$$\iiint\limits_P 3xyz^2\,dxdydz,\ P:\ 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 0,\ 0\le z\le 4.$$

16) $$\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{12}-\frac{1}{3}}^{0} dy \int\limits_{0}^{1-\frac{x}{4}+3y} dz,\quad \rho(x,y,z)=2x-y;$$

$$\iiint\limits_P 6xy^2z\,dxdydz,\ P:\ -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3.$$

17) $$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2-2x} dy \int\limits_{-1+x+\frac{y}{2}}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=2x+y+3;$$

$$\iiint\limits_P x^3yz\,dxdydz,\ P:\ -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3,\ 0\le z\le 1.$$

18) $$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{2-2x+y} dz,\quad \rho(x,y,z)=x-3y;$$

$$\iiint\limits_P \left(xy-z^3\right)dxdydz,\ P:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2.$$

19) $$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz,\quad \rho(x,y,z)=1+x+y;$$

$$\iiint\limits_P \left(3x^2+2y+z\right)dxdydz,\ P:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ -1\le z\le 3.$$

20) $$\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{0}^{1+\frac{x}{3}} dy \int\limits_{0}^{3+x-3y} dz,\quad \rho(x,y,z)=y-2x;$$

$$\iiint\limits_P \left(x+2y+3z^2\right)dxdydz,\ P:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le 2.$$

21) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3x-3}^{0} dy \int\limits_0^{3-3x+y} dz, \quad \rho(x,y,z) = x - y;$

$\iiint\limits_P (x + y - z)dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3,\ -1 \le z \le 2.$

22) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{-1+\frac{x}{3}}^{0} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{3}-y}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = x - 2y;$

$\iiint\limits_P x^2 yz\,dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 0.$

23) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{3-3x} dy \int\limits_{-1+x+\frac{y}{3}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 5 + x + 2y;$

$\iiint\limits_P \left(2x^2 + y - 4z^3\right)dxdydz,\ P:\ -2 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2.$

24) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_0^{4+2x} dy \int\limits_{-1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 2y - 3x;$

$\iiint\limits_P \left(x^2 + 2y^2 - z\right)dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ -1 \le z \le 2.$

25) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-1-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_0^{4+2x+4y} dz, \quad \rho(x,y,z) = -2x - 2y;$

$\iiint\limits_P (x + 2yz)dxdydz,\ P:\ -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2.$

26) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz, \quad \rho(x,y,z) = 3 + x + y;$

$\iiint\limits_P \left(x^3 + y^2 - z\right)dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ 0 \le z \le 1.$

27) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x,y,z) = 1 + 2x + y;$

$$\iiint\limits_P \left(4x^3 - 2yz\right)dxdydz,\ P:\ -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$$

28) $$\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-1-\frac{x}{2}}^{0} dy \int\limits_{-2-x-2y}^{0} dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 - x - 3y;$$

$$\iiint\limits_P \left(xy - 3z^2\right)dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 3.$$

29) $$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{4x-4}^{0} dy \int\limits_{-4+4x-y}^{0} dz, \quad \rho(x, y, z) = x - 3y;$$

$$\iiint\limits_P \left(xy + 4z\right)dxdydz,\ P:\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2.$$

30) $$\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_{-1+\frac{x}{3}+\frac{y}{2}}^{0} dz, \quad \rho(x, y, z) = 2 + x + 2y;$$

$$\iiint\limits_P \left(2x - yz^2\right)dxdydz,\ P:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 0.$$

Задание 6

Для данной функции $f(x, y, z)$ вычислите:

1) $\iint\limits_S f(x, y, z)ds$ – поверхностный интеграл первого рода (ПОВИ-1);

2) указанный поверхностный интеграл второго рода (ПОВИ-2) по поверхности S треугольника, отсеченного от плоскости P координатными плоскостями. Сторону поверхности S выберите в соответствии со знаком косинуса угла, образованного нормалью $\bar{n}$ к поверхности S с соответствующей координатной осью (α, β, γ – углы, образованные нормалью $\bar{n}$ с осями Ox, Oy, Oz).

Варианты

1) $f(x, y, z) = 2x + 5y + z$, $\qquad P: x + y + 2z = 2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, $\cos\alpha<0$.

2) $f(x,y,z)=4x-4y-z$, $P: x+2y+2z=4$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, $\cos\alpha>0$.

3) $f(x,y,z)=6x-y+8z$, $P: x+y+4z=1$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$, $\cos\beta<0$.

4) $f(x,y,z)=4x-y+z$, $P: x-y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$, $\cos\beta>0$.

5) $f(x,y,z)=2x+y+z$, $P: 2x+3y+z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$, $\cos\gamma<0$.

6) $f(x,y,z)=7x+y+2z$, $P: 3x-2y+2z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$, $\cos\gamma>0$.

7) $f(x,y,z)=2x+3y+z$, $P: 2x+2y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, $\cos\alpha<0$.

8) $f(x,y,z)=3x+10y-z$, $P: x+3y+2z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, $\cos\alpha>0$.

9) $f(x,y,z)=3x-y+2z$, $P: x+2y+2z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$, $\cos\beta<0$.

10) $f(x,y,z)=2x+5y-z$, $P: 2x+y+3z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$, $\cos\beta>0$.

11) $f(x,y,z)=4x-y+2z$, $P: x+2y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma<0$.

12) $f(x,y,z)=2x-y+4z$, $\quad P: 2x+2y+z=4$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma>0$.

13) $f(x,y,z)=4x+y-z$, $\quad P: 3x+2y+z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha<0$.

14) $f(x,y,z)=x+3y+2z$, $\quad P: 2x+y+2z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha>0$.

15) $f(x,y,z)=2x-3y+z$, $\quad P: x+2y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta<0$.

16) $f(x,y,z)=3x-2y-2z$, $\quad P: 2x-y-2z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta>0$.

17) $f(x,y,z)=3y-x-z$, $\quad P: x-y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma<0$.

18) $f(x,y,z)=4x-3y+z$, $\quad P: 2x-3y+z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma>0$.

19) $f(x,y,z)=2x+3y-z$, $\quad P: x+2y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha<0$.

20) $f(x,y,z)=2x-y+4z$, $\quad P: 2x+y+2z=1$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha>0$.

21) $f(x,y,z)=x+2y+3z$, $\quad P: x+y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta<0$.

22) $f(x,y,z)=2x+y-2z$, $P: 3x+3y+z=3$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta>0$.

23) $f(x,y,z)=2+y-x+4z$, $P: 2x-y-2z=-4$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma<0$.

24) $f(x,y,z)=2x+3y+2z$, $P: x+3y+z=3$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma>0$.

25) $f(x,y,z)=3x-2y-z$, $P: x-2y-2z=1$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha<0$.

26) $f(x,y,z)=3x-2y+2z$, $P: 3x+2y-2z=6$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz,\ \cos\alpha>0$.

27) $f(x,y,z)=2x+4y-z$, $P: 2x+y+z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta<0$.

28) $f(x,y,z)=4x-2y+z$, $P: 2x+y-z=1$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \cos\beta>0$.

29) $f(x,y,z)=x+2y-z$, $P: x+4y+2z=8$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma<0$.

30) $f(x,y,z)=4y-x-z$, $P: x-2y+2z=2$,

ПОВИ-2: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy,\ \cos\gamma>0$.

Задание 7*

В трехмерном пространстве заданы:

– векторное поле $\vec{a} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k} = (P;Q;R)$;

– тело T, ограниченное замкнутой поверхностью S;

– контур L, являющийся линией пересечения двух известных поверхностей;

– точки A и B.

Требуется:

1) найти объем тела T;

2) вычислить поток векторного поля $\bar{a}$ через поверхность S (в направлении внешней нормали);

3) определить значение циркуляции поля $\bar{a}$ вдоль контура L (по направлению, соответствующему убыванию параметра *t*);

4) подсчитать работу векторного поля $\bar{a}$ по перемещению материальной точки из положения A в положение B.

Варианты

1) векторное поле $\bar{a} = (2x;\ 3y; -z)$;

$$T: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 3z^2 \text{ (внутри конуса);} \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 3z^2, \\ z = 2; \end{cases}$$

точки $A(0;0;0)$ и $B(-2;4;5)$.

2) векторное поле $\bar{a} = (3x; -5y; +2z)$;

$$T: \begin{cases} z = 10(x^2 + y^2) + 1, \\ 20y + z = 1; \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1, \\ z = 1 - 20y; \end{cases}$$

точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$.

3) векторное поле $\bar{a} = (9x;\ 2y; -6z)$;

$$T: \begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \\ z = 1,\ \ x^2 + y^2 = 21 \text{ (внутри цилиндра);} \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 21, \\ z = 2; \end{cases}$$

точки $A(0;0;0)$ и $B(2;1;-1)$.

4) векторное поле $\bar{a}=(5x;\ 4y;\ -3z)$;

$T:\begin{cases} x^2+y^2=3z, \\ x^2+y^2=1,\ \ z=0; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x^2+y^2=3z, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

точки $A(0;1;\ 0)$ и $B(1;2;2\ )$.

5) векторное поле $\bar{a}=(-3x;\ 6y;\ z)$;

$T:\begin{cases} z=28(x^2+y^2)+3, \\ 56y-z+3=0; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x^2+(y+1)^2=1, \\ z=56y+3; \end{cases}$

точки $A(-1;0;\ 1)$ и $B(0;3;\ 2)$.

6) векторное поле $\bar{a}=(4x;\ 2y;\ -3z)$;

$T:\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \\ 12z=x^2+y^2; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} z=4, \\ 12z=x^2+y^2; \end{cases}$

точки $A(-2;\ 1;\ -1)$ и $B(-1;3;\ 2)$.

7) векторное поле $\bar{a}=(12x;\ -10y;\ 3z)$;

$T:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2+y^2=z^2; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=-2; \end{cases}$

точки $A(1;1;\ 3)$ и $B(-1;\ 2;\ 0)$.

8) векторное поле $\bar{a}=(x;\ -5y;\ 7z)$;

$T:\begin{cases} z=22(x^2+y^2)+3, \\ 44y+z=3; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x+(y+1)^2=1, \\ z=3-44y; \end{cases}$

точки $A(-1;-2;\ -3)$ и $B(\ 0;\ 1;-1)$.

9) векторное поле $\bar{a}=(-4x;\ -3y;\ 10z)$;

$T:\begin{cases} z=\sqrt{\dfrac{4}{9}-x^2-y^2}, \\ z=x^2+y^2; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} z=\dfrac{1}{3}, \\ z=x^2+y^2; \end{cases}$

точки $A(-3;\ -1;\ 2)$ и $B(-1;\ 2;\ 3)$.

10) векторное поле $\bar{a} = (6x;\ -3y;\ 7z)$;

$T: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{внутри цилиндра}); \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = -\sqrt{3}; \end{cases}$

точки $A(3;\ 3;\ 2)$ и $B(2;\ 4;-1)$.

11) векторное поле $\bar{a} = (-5x;\ 9y;\ 4z)$;

$T: \begin{cases} z = 30(x^2 + y^2) + 1, \\ 60y - z + 1 = 0; \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1, \\ z = 60y + 1; \end{cases}$

точки $A(2;4;\ 1)$ и $B(4;\ 3;\ 0)$.

12) векторное поле $\bar{a} = (-2x;\ 9y;\ -z)$;

$T: \begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ \frac{9}{2} z = x^2 + y^2; \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} z = \frac{3}{2}, \\ \frac{9}{2} z = x^2 + y^2; \end{cases}$

точки $A(-3;2;-1)$ и $B(1;0;\ 1)$.

13) векторное поле $\bar{a} = (x;\ -4y;\ 6z)$;

$T: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10, \\ x^2 + y^2 = 9z^2 \quad (\text{внутри конуса}); \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10, \\ z = -1; \end{cases}$

точки $A(2;\ 3;\ 0)$ и $B(-2;1;\ -1)$.

14) векторное поле $\bar{a} = (6x;\ -5y;\ 4z)$;

$T: \begin{cases} z = 26(x^2 + y^2) - 2, \\ 52x + z + 2 = 0; \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} z = -2 - 52x, \\ (x+1)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

точки $A(1;\ -2;\ -2)$ и $B(0;\ 3;\ 1)$.

15) векторное поле $\bar{a} = (-3x;\ 4y;\ 5z)$;

$T: \begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2},\ \ z = 1, \\ x^2 + y^2 = 60 \quad (\text{внутри цилиндра}); \end{cases}$ контур $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 60, \\ z = 2; \end{cases}$

точки $A(-2;\,-2;\,0)$ и $B(1;\,2;\,2)$.

16) векторное поле $\bar{a}=(10x;\,-2y;\,-3z)$;

$T:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2=2z, \quad z=0;\end{cases}$ контур $L:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2=2z;\end{cases}$

точки $A(-1;\,-1;\,-2)$ и $B(2;-2;\,0)$.

17) векторное поле $\bar{a}=(-2x;\,-y;\,7z)$;

$T:\begin{cases}z=24(x^2+y^2)+1,\\ 48x-z+1=0;\end{cases}$ контур $L:\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1,\\ z=1+48x;\end{cases}$

точки $A(0;2;\,-2)$ и $B(1;3;\,1)$.

18) векторное поле $\bar{a}=(x;\,2y;\,4z)$;

$T:\begin{cases}z=\sqrt{1-x^2-y^2},\\ \frac{3}{2}z=x^2+y^2;\end{cases}$ контур $L:\begin{cases}\frac{3}{2}z=x^2+y^2,\\ z=\frac{1}{2};\end{cases}$

точки $A(4;\,-4;\,1)$ и $B(3;\,0;-1)$.

19) векторное поле $\bar{a}=(2x;\,-7y;\,8z)$;

$T:\begin{cases}x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2,\\ x^2+y^2=\frac{2}{5}z;\end{cases}$ контур $L:\begin{cases}x^2+y^2=\frac{2}{5}z,\\ z=\frac{5}{2};\end{cases}$

точки $A(1;\,-1;\,4)$ и $B(0;\,2;\,3)$.

20) векторное поле $\bar{a}=(8x;\,-y;\,-5z)$;

$T:\begin{cases}z=2-4(x^2+y^2),\\ 8x-z+2=0;\end{cases}$ контур $L:\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1,\\ z=8x+2;\end{cases}$

точки $A(3;\,-3;\,5)$ и $B(2;0;3)$.

21) векторное поле $\bar{a}=(x;\,2y;\,3z)$;

$$T:\begin{cases} z=\sqrt{16-x^2-y^2}, \\ 6z=x^2+y^2; \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} 6z=x^2+y^2, \\ z=2; \end{cases}$$

точки $A(0;5;0)$ и $B(1;4;-1)$.

22) векторное поле $\bar{a}=(-3x;\ 4y;\ z)$;

$$T:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2=4 \quad (\text{внутри цилиндра}); \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=-2\sqrt{3}; \end{cases}$$

точки $A(6;2;4)$ и $B(5;\ 0;5)$.

23) векторное поле $\bar{a}=(5x;\ -3y;\ 2z)$;

$$T:\begin{cases} z=32(x^2+y^2)+3, \\ 64x+z=3; \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} (x+1)^2+y^2=1, \\ z=3-64x; \end{cases}$$

точки $A(-2;\ -1;-4)$ и $B(1;\ 2;\ 0)$.

24) векторное поле $\bar{a}=(2x;\ 4y;\ -5z)$;

$$T:\begin{cases} z=\sqrt{81-x^2-y^2},\ \ z=5, \\ x^2+y^2=45 \quad (\text{внутри цилиндра}); \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2+y^2=45, \\ z=6; \end{cases}$$

точки $A(1;\ -1;\ 1)$ и $B(2;2;3)$.

25) векторное поле $\bar{a}=(-2x;\ 10y;\ -7z)$;

$$T:\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{z^2}{25}, \\ x^2+y^2=\dfrac{z}{5}; \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{z}{5}, \\ z=5; \end{cases}$$

точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;2;5)$.

26) векторное поле $\bar{a}=(5x;\ 4y;\ -z)$;

$$T:\begin{cases} z=8(x^2+y^2)+3, \\ 16x-z+3=0; \end{cases} \qquad \text{контур } L: \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1, \\ z=16x+3; \end{cases}$$

точки $A(4;0;\ 5)$ и $B(3;\ 1;4)$.

27) векторное поле $\overline{a}=(10x;\ -5y;\ -2z)$;

$T:\begin{cases} z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ \ z=2, \\ x^2+y^2=27 \quad \text{(внутри цилиндра)}; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x^2+y^2=27, \\ z=3; \end{cases}$

точки $A(-5;-2;-1)$ и $B(-4;-1;2)$.

28) векторное поле $\overline{a}=(x;\ 6y;\ -4z)$;

$T:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=z^2 \quad \text{(внутри конуса)}; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=\sqrt{2}; \end{cases}$

точки $A(-3;4;0)$ и $B(-2;\ 6;\ 2)$.

29) векторное поле $\overline{a}=(4x;\ -2y;\ z)$;

$T:\begin{cases} z=2-12(x^2+y^2), \\ 24x-z+2=0; \end{cases}$ контур $L:\ \begin{cases} (x+1)^2+y^2=1, \\ z=24x+2; \end{cases}$

точки $A(1;\ 5;-2)$ и $B(0;7;-1)$.

30) векторное поле $\overline{a}=(6x;\ y;-3z)$;

$T:\begin{cases} z=\sqrt{49-x^2-y^2},\ \ z=3, \\ x^2+y^2=33 \ \text{(внутри цилиндра)}; \end{cases}$ контур $L:\begin{cases} x^2+y^2=33, \\ z=4; \end{cases}$

точки $A(-2;0;5)$ и $B(-1;\ 1;3)$.

1.2. Образцы решений заданий по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»

Задание 1

Преобразуйте двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в повторный двумя возможными способами. Выберите наиболее простой из полученных повторных интегралов для вычисления двойного интеграла.

а) $f(x,y)=\dfrac{y}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}$,

область D задана системой неравенств: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

б) $f(x,y)=x+y$, область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=0,\ x=2$.

в) $f(x,y)=xy$, область D ограничена линиями: $y=\ln x,\ y=0,\ y=1,\ x=0$.

г) $f(x,y)=1$, область D – трапеция $A_1A_2A_3A_4$ с вершинами в точках $A_1(2;4),\ A_2(4;5),\ A_3(6;3),\ A_4(2;1)$.

Решение

а) Очевидно, что область интегрирования D (рис. 1) является прямоугольником. Поэтому не составляет труда записать оба повторных интеграла, соответствующих данному двойному интегралу.

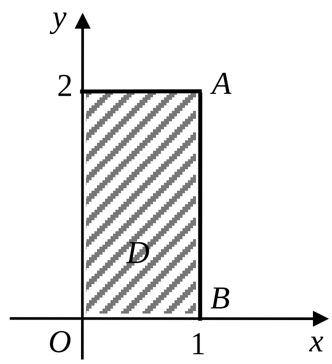


Рис. 1

$$\iint\limits_D \frac{ydxdy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 \frac{ydy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ и}$$

$$\iint\limits_D \frac{ydxdy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^2 ydy\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для вычисления предпочтительнее первый из них, поскольку его внутренний интеграл находится проще, чем во втором случае.

$$\iint\limits_D \frac{ydxdy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{ydy}{(y^2+x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{d(y^2+x^2+1)}{(y^2+x^2+1)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2+1}} \Bigg|_0^2 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx =$$

$$= \left(\ln\left| x+\sqrt{1+x^2} \right| - \ln\left| x+\sqrt{5+x^2} \right| \right)\Bigg|_0^1 = \ln\frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{6}}.$$

б) Изобразим область интегрирования D (рис. 2), которая ограничена параболой $y=x^2$ и двумя прямыми $y=0$ (ось Ox) и $x=2$.

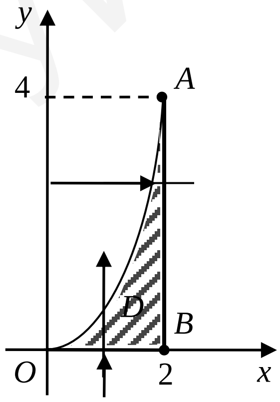


Рис. 2

Запишем двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x. Очевидно, что в области D $0 \le x \le 2$. Это и будут внешние пределы интегрирования. С другой стороны, если $x \in [0;\,2]$, то в направлении оси Oy область D ограничена осью Ox (снизу) и параболой $y=x^2$ (сверху), т. е. $0 \le y \le x^2$. Отсюда получаем

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x+y)dy.$$

Пусть теперь внешнее интегрирование выполняется по y. Очевидно, что в области D переменная $y \in [0;\, y_A]$, где y_A – ордината точки A пересечения параболы $y=x^2$ с прямой $x=2$. Найдем $y_A = 2^2 = 4$. Тогда $0 \le y \le 4$ в области D. Поскольку в направлении оси Ox область D ограничена: слева параболой $y=x^2 \left(\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\right)$, справа – прямой $x=2$, то переменная x в области D удовлетворяет неравенству $\sqrt{y} \le x \le 2$. Таким образом,

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^2 (x+y)dx.$$

Вычислим первый из полученных выше повторных интегралов.

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x+y)dy = \int\limits_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int\limits_0^2 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 = 7\frac{1}{5}.$$

в) Изобразим область интегрирования D (рис. 3), границами которой являются три прямые $x = 0,\ y = 0,\ y = 1$ и логарифмическая кривая $y = \ln x$.

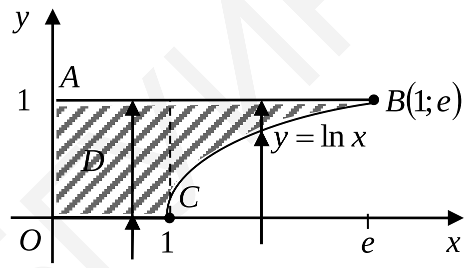


Рис. 3

Пусть сначала внешнее интегрирование выполняется по x. Найдем абсциссу точки B, в которой пересекаются прямые $y = 1$ и кривая $y = \ln x$: $1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$. Таким образом, в области D $0 \le x \le e$. Заметим, что при изменении x от 0 до 1 переменная y тоже изменяется от 0 до 1, однако при изменении x от 1 до e переменная y изменяется уже не от 0 до 1, а от $\ln x$ до 1. Это означает, что двойной интеграл будет записан в виде суммы двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^1 ydy + \int\limits_1^e xdx \int\limits_{\ln x}^1 ydy.$$

Пусть теперь внешнее интегрирование выполняется по y. Как видно из рис. 3, $0 \le y \le 1$ в области D, при этом x изменяется от прямой $x = 0$ до логарифмической кривой, из уравнения $y = \ln x$ которой можно выразить $x = e^y$, т. е. $0 \le x \le e^y$. Таким образом, запишем еще один повторный интеграл, который и будем использовать для вычисления двойного:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 ydy \int\limits_0^{e^y} xdx = \int\limits_0^1 y \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{e^y} \right) dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2} ye^{2y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} ye^{2y} \Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2y} dy \right) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^{2y}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}(e^2 + 1).$$

г) Изобразим область интегрирования D, являющуюся по условию задачи трапецией $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 4).

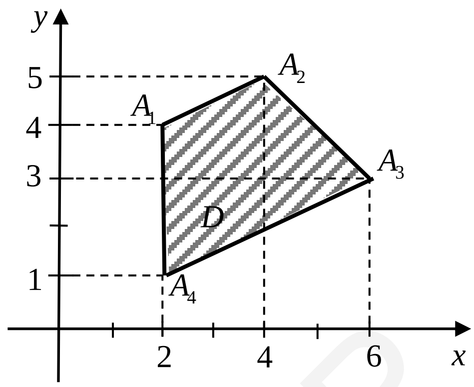


Рис. 4

Составим уравнения прямых, на которых лежат стороны трапеции $A_1A_2A_3A_4$.

Очевидно, что прямая $x = 2$ содержит сторону A_1A_4. Сторона A_4A_3 лежит на прямой, имеющей уравнение

$$\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_4 - y_3},$$

где $A_3(x_3; y_3) = A_3(6;3)$, $A_4(x_4; y_4) = A_4(2;1)$.

Отсюда (после подстановки числовых значений) получаем

$\dfrac{x-6}{x-6} = \dfrac{y-3}{1-3} \Leftrightarrow\ y = \dfrac{x}{2}$ – уравнение прямой, содержащей сторону A_4A_3.

Как видно из рис. 4, сторона A_1A_2 лежит на прямой, полученной параллельным переносом прямой $y = \dfrac{x}{2}$ на три единицы вверх, т. е. на прямой $y = 3 + \dfrac{x}{2}$.

И наконец, снова используя уравнение прямой, проходящей через две известные точки $\big($на этот раз точки $A_2(4;5)$ и $A_3(6;3)\big)$, получаем $y = 9 - x$ – уравнение прямой, содержащей сторону A_2A_3.

Анализируя расположение трапеции $A_1A_2A_3A_4$ в системе координат xOy, можно прийти к выводу, что при любом способе перехода к повторным интегралам их будет несколько. Выбирая внешнее интегрирование по y, получим (рис. 4а)

$$\iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy + \iint\limits_{D_3} dxdy,$$

где области D_i можно задать системами неравенств, $i=1,2,3$:

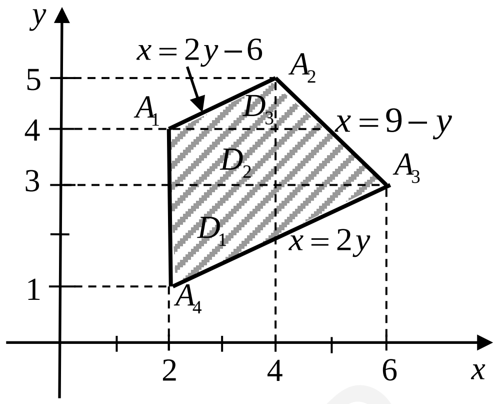


Рис. 4а

$$D_1:\ 1\le y\le 3,\ 2\le x\le 2y$$

(пояснение: $x=2y$ – уравнение прямой A_4A_3);

$$D_2:\ 3\le y\le 4,\ 2\le x\le 9-y$$

(пояснение: $x=9-y$ – уравнение прямой A_2A_3);

$D_3:\ 4\le y\le 5,\ 2y-6\le x\le 9-y$ (пояснение: $x=2y-6y$ – уравнение прямой A_1A_2).

Окончательно получаем

$$\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^3 dy\int\limits_2^{2y} dx+\int\limits_3^4 dy\int\limits_2^{9-y} dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_{2y-6}^{9-y} dx.$$

Заметим, что если в двойном интеграле подынтегральная функция $f(x,y)=1$ для любой точки $(x;y)\in D$, то интеграл $\iint\limits_D dxdy$ вычисляет площадь области D.

Запишем теперь $\iint\limits_D dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x (рис. 4б). Тогда

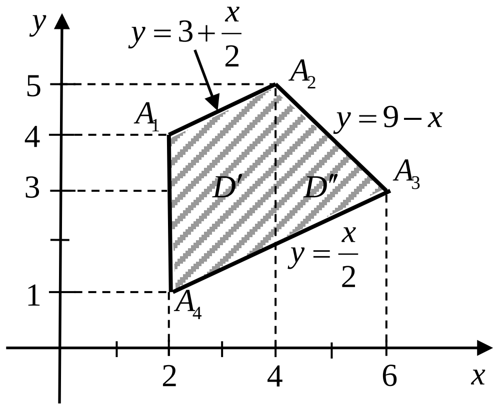


Рис. 4б

$$\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'} dxdy+\iint\limits_{D''} dxdy,$$

при этом области D' и D'' можно задать системами неравенств:

$$D':\ 2\le x\le 4,\ \frac{x}{2}\le y\le 3+\frac{x}{2};$$

$$D'':\ 4\le x\le 6,\ \frac{x}{2}\le y\le 9-x.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{3+\frac{x}{2}} dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{9-x} dy = S_{A_1A_2A_3A_4} \text{ – площадь трапеции } A_1A_2A_3A_4.$$

Найдем эту площадь, вычислив сумму повторных интегралов:

$$S_{A_1A_2A_3A_4} = \int\limits_2^4 dx \cdot y\Big|_{\frac{x}{2}}^{3+\frac{x}{2}} + \int\limits_4^6 dx \cdot y\Big|_{\frac{x}{2}}^{9-x} = \int\limits_2^4 \left(3 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)dx + \int\limits_4^6 \left(9 - x - \frac{x}{2}\right)dx = 9.$$

Задание 2

Дана сумма повторных интегралов по области D:

$$\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)dy.$$

1. Изобразите область интегрирования D и измените порядок интегрирования в повторных интегралах.

2. Найдите площадь области D двумя способами:

– непосредственно по рисунку;

– с помощью двойного интеграла.

3. Зная плотность распределения массы $\rho(x,y) = 2x^2 + y$ по области D, вычислите:

– массу пластинки , имеющей форму области D;

– среднее значение плотности пластинки.

4. Найдите периметр области D двумя способами:

– как длину замкнутой ломаной L непосредственно по рисунку;

– с помощью криволинейного интеграла первого рода.

5. Вычислите массу дуги L, где L – контур области D, если $\rho(x,y) = 2x^2 + y$ – плотность распределения массы вдоль этой дуги.

6. Вычислите работу A силы $\overline{F} = \left(3x^2 - 2y\right) \cdot \bar{i} + 9xy^2 \cdot \overline{j}$ вдоль положительно ориентированного контура L (границы области D) двумя способами:

– с помощью криволинейного интеграла второго рода;

– применяя формулу Грина.

Решение

1. Область интегрирования $D = D_1 \cup D_2$, где $D_i,\ i = 1,2$ – область интегрирования i-го интеграла. Зададим $D_i\ (i = 1,2)$ системой неравенств и изобразим на плоскости. Для области $D_1:\ -3 \le x \le 0,\ -x \le y \le 3.$ Таким образом, область D_1 ограничена прямыми: $x = -3,\ x = 0,\ y = -x,\ y = 3$ (рис. 5).

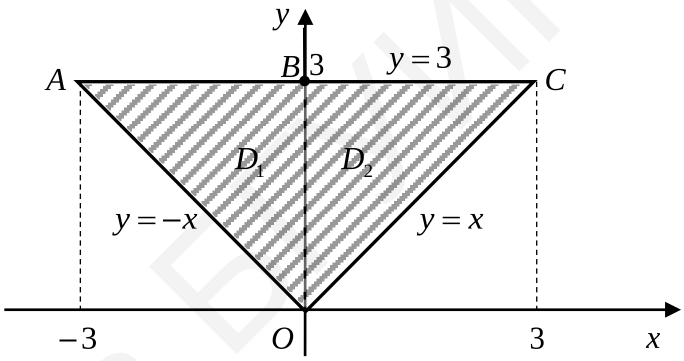


Рис. 5

Для области $D_2:\ 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3$, таким образом, область D_2 ограничена прямыми: $x = 0,\ x = 3,\ y = x,\ y = 3$ (рис. 5).

Изменим теперь порядок интегрирования в повторном интеграле по области $D = D_1 \cup D_2$. Для этого зададим всю область D системой неравенств: $0 \le y \le 3,\ -y \le x \le y$, откуда следует искомое представление двойного интеграла по D в виде повторного с внешним интегрированием по y:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x.y)dx.$$

2. Найдем площадь области D двумя способами. Сначала вычислим ее как площадь равнобедренного ΔAOC с основанием $AC = 6$ и высотой $BO = 3$ (см. рис. 5):

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BO=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9.$$

Эту же площадь вычислим через двойной интеграл $S=\iint\limits_D dxdy$, который запишем в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по y, используя результат задачи **1**:

$$S=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-y}^{y}dx=\int\limits_0^3 dy\cdot x\Big|_{-y}^{y}=\int\limits_0^3 2ydy=y^2\Big|_0^3=9.$$

3. Массу пластинки, имеющей форму области D, вычислим по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy,$$

где $\rho(x,y)=2x^2+y$ – известная плотность распределения массы по области D. Для вычисления двойного интеграла используем повторный интеграл с внешним интегрированием по y, полученный в задаче **1**.

$$m=\iint\limits_D\left(2x^2+y\right)dxdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-y}^{y}\left(2x^2+y\right)dx=\int\limits_0^3 dy\left(\frac{2}{3}x^3+xy\right)\Bigg|_{-y}^{y}=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{4}{3}y^3+2y^2\right)dy=\frac{4}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^3+\frac{2}{3}y^3\Bigg|_0^3=\frac{3^4}{3}+\frac{2}{3}\cdot 3^3=45.$$

Среднее значение плотности области D вычисляется по формуле

$$\rho_{\text{ср}}=\frac{m}{S}=\frac{1}{S}\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy,$$

где S – площадь области D, m – масса этой области. В нашем случае $m=45$, $S=9$, значит, среднее значение плотности будет равно $\rho_{\text{ср}}=\frac{1}{9}\cdot 45=5$.

4. Найдем периметр области D двумя способами. Сначала – как периметр ΔAOC.

$AO = OC = 3\sqrt{2}$ (AO и OC – гипотенузы равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длиной 3), $AC = 6$. Тогда $\mathrm{P} = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 6 = 6\sqrt{2} + 6 = 6\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Теперь найдем тот же периметр через криволинейные интегралы первого рода, используя формулу длины дуги $\overset{\cup}{MN} : L_{\overset{\cup}{\mathrm{MN}}} = \int\limits_{\overset{\cup}{MN}} dl$.

$$\mathrm{P} = \int\limits_{\overset{\cup}{AO}} dl + \int\limits_{\overset{\cup}{OC}} dl + \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} dl .$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AO}} dl = \left| \begin{array}{l} AO:\ y = -x,\ x \in [-3; 0], \\ dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \left((-x)'\right)^2}\, dx = \sqrt{2} dx \end{array} \right| = \int\limits_{-3}^{0} \sqrt{2} dx = \sqrt{2} \cdot x \Big|_{-3}^{0} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2};$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{OC}} dl = \left| \begin{array}{l} OC:\ y = x,\ x \in [0; 3], \\ dl = \sqrt{1 + \left((x)'\right)^2}\, dx = \sqrt{2} dx \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{3} \sqrt{2} dx = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2};$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AC}} dl = \left| \begin{array}{l} AC:\ y = 3,\ x \in [-3; 3], \\ dl = \sqrt{1 + \left((3)'\right)^2}\, dx = dx \end{array} \right| = \int\limits_{-3}^{3} dx = 6 .$$

$$\mathrm{P} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6 = 6\sqrt{2} + 6 = 6\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

5. Массу контура L области D с плотностью $\rho(x, y) = 2x^2 + y$ найдем по формуле

$$m_L = \int\limits_{L} \rho(x, y) dl = \int\limits_{L} \left(2x^2 + y\right) dl = \int\limits_{\overset{\cup}{AO}} \left(2x^2 + y\right) dl + \int\limits_{\overset{\cup}{OC}} \left(2x^2 + y\right) dl +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} \left(2x^2 + y\right) dl = m_1 + m_2 + m_3 .$$

$$m_1=\int\limits_{\overset{\smile}{AO}}\left(2x^2+y\right)dl=\left|\begin{array}{l}AO:\ y=-x,\ x\in[-3;0],\\ dl=\sqrt{2}dx\ (\text{см. выше задачу 4})\\ 2x^2+y\Big|_{y=-x}=2x^2-x\end{array}\right|=\int\limits_{-3}^{0}\left(2x^2-x\right)\sqrt{2}dx=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_{-3}^{0}\left(2x^2-x\right)dx=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=-\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}(-3)^3-\frac{(-3)^2}{2}\right)=\frac{45}{2}\sqrt{2}.$$

$$m_2=\int\limits_{\overset{\smile}{OC}}\left(2x^2+y\right)dl=\left|\begin{array}{l}OC:\ y=x,\ x\in[0;3],\\ dl=\sqrt{2}dx,\\ 2x^2+y\Big|_{y=x}=2x^2+x\end{array}\right|=\int\limits_{0}^{3}\left(2x^2+x\right)\sqrt{2}dx=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3}=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 3^3+\frac{3^2}{2}\right)=\frac{45}{2}\sqrt{2}.$$

$$m_3=\int\limits_{\overset{\smile}{AC}}\left(2x^2+y\right)dl=\left|\begin{array}{l}AC:\ y=3,\ x\in[-3;3],\\ dl=dx,\\ 2x^2+y\Big|_{y=3}=2x^2+3\end{array}\right|=\int\limits_{-3}^{3}\left(2x^2+3\right)dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{3}\left(2x^2+3\right)dx=2\left(\frac{2}{3}x^3+3x\right)\Bigg|_{0}^{3}=2\left(\frac{2}{3}\cdot 3^3+3^2\right)=54.$$

В итоге найдена масса дуги L:

$$m_L=\frac{45}{2}\sqrt{2}+\frac{45}{2}\sqrt{2}+54=45\sqrt{2}+54=9\left(5\sqrt{2}+6\right).$$

6. а) Сначала вычислим работу по контуру L (см. рис. 5), ориентированному положительно $AO\to OC\to CA$, используя криволинейные интегралы второго рода и формулу для вычисления работы силы $\overline{F}$ вдоль контура L^+.

$$A=\oint\limits_{L^+}\overline{F}\cdot\overline{dr}=\oint\limits_{L^+}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy=\oint\limits_{AO}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy+$$

$$+\oint\limits_{OC}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy+\oint\limits_{CA}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy=A_1+A_2+A_3$$ (по свойству аддитивности интеграла).

$$A_1=\oint\limits_{AO}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy=\left|\begin{array}{c}AO:\ y=-x,\ x\in[-3;0],\\ dy=-dx\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{-3}^{0}\left(3x^2-2(-x)+9x(-x)^2(-1)\right)dx=\int\limits_{-3}^{0}\left(3x^2+2x-9x^3\right)dx=\left(x^3+x^2-\frac{9}{4}x^4\right)\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=0-\left(-27+9-\frac{9}{4}\cdot 9^2\right)=\frac{9}{4}\cdot 89.$$

$$A_2=\oint\limits_{OC}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy=\left|\begin{array}{c}OC:\ y=x,\ x\in[0;3],\\ dy=dx\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{0}^{3}\left(3x^2-2x+9x^3\right)dx=\left(x^3-x^2+\frac{9}{4}x^4\right)\Bigg|_{0}^{3}=27-9+\frac{9}{4}\cdot 81==\frac{9}{4}\cdot 89.$$

$$A_3=\oint\limits_{CA}\left(3x^2-2y\right)dx+9xy^2dy=\left|\begin{array}{c}CA:\ y=3,\ x\in[3;-3],\\ dy=0\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{3}^{-3}\left(3x^2-2\cdot 3\right)dx=-\int\limits_{-3}^{3}\left(3x^2-6\right)dx=-2\int\limits_{0}^{3}\left(3x^2-6\right)dx=-2\left(x^3-6x\right)\Big|_{0}^{3}=-18.$$

В итоге получаем значение работы A по контуру L^+.

$$A=A_1+A_2+A_3=2\cdot\frac{9}{4}\cdot 89-18=\frac{9}{2}(89-4)=\frac{465}{2}=382{,}5.$$

б) Теперь вычислим ту же работу другим способом, используя для этого формулу Грина, позволяющую преобразовать КРИ-2 по замкнутому контуру L в двойной интеграл по односвязной области D, ограниченной этим контуром:

$$A=\oint\limits_{L^+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

В нашем случае

$\overline{F} = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j} = \left(3x^2 - 2y\right)\cdot\vec{i} + 9xy^2\cdot\vec{j}$, откуда

$$P(x,y) = 3x^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2,$$

$$Q(x,y) = 9xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 9y^2.$$

В результате применения формулы Грина получаем двойной интеграл по области D (см. рис. 5):

$$A = \oint_{L^+}\overline{F}\cdot\overline{dr} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D\left(9y^2 + 2\right)dxdy = \int_0^3 dy\int_{-y}^{y}\left(9y^2 + 2\right)dx =$$

$$= \int_0^3\left(9y^2 + 2\right)dy\cdot\left(x\Big|_{-y}^{y}\right) = \int_0^3\left(9y^2 + 2\right)\cdot 2ydy = 2\int_0^3\left(9y^3 + 2y\right)dy = 2\left(\frac{9}{4}\cdot y^4 + y^2\right) =$$

$$= 2\left(\frac{9}{4}\cdot 3^4 + 3^2\right) = \frac{765}{2} = 382{,}5.$$

Задание 3

1. Сделайте рисунок фигуры, площадь которой вычисляется с помощью данных повторных интегралов:

а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}dx$ (в прямоугольной декартовой системе координат);

б*) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}rdr + \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int\limits_0^{\sin\varphi}rdr$ (в полярной системе координат).

2. Вычислите площадь фигуры, заданной повторными интегралами **а)** и **б*)**.

3. Найдите массу кривой L, являющейся контуром фигуры из задачи **а)**, если $\rho(x,y) = x^2 - 2xy$ – ее плотность.

Решение

Обратимся сначала к области D_1, площадь которой вычисляется с помощью повторного интеграла а), для которой и решим три поставленные задачи.

1а) Исходя из пределов интегрирования повторного интеграла зададим область интегрирования D_1 системой неравенств: $0 \le y \le 1$, $-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$. Таким образом, фигура D_1 заключена между прямыми $y=0$ и $y=1$ в направлении оси Oy и линиями $x=-\sqrt{1-y^2}$ и $x=1-y$ вдоль оси Ox. Графиком уравнения $x=-\sqrt{1-y^2}$ является левая полуокружность $(x \le 0)$ окружности $x^2+y^2=1$. Линейное уравнение $x=1-y \Leftrightarrow y=1-x$ определяет прямую. Искомая фигура D_1 изображена на рис. 6.

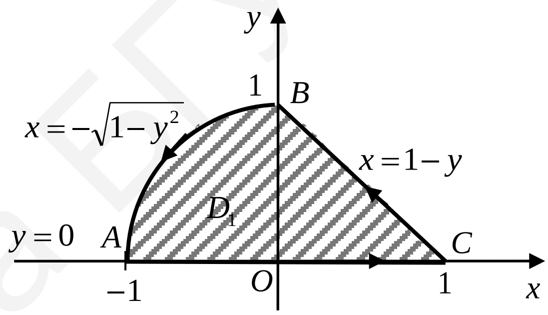


Рис. 6

2а) Найдем площадь D_1 исходя из элементарных геометрических соображений: S_1 равна сумме $\frac{1}{4}$ площади круга радиусом 1 и площади прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом, равным 1.

В итоге получим: $S_1 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

3. Поскольку контур L фигуры D_1 состоит из трех частей $L = AB \cup BC \cup AC$, имеющих различные уравнения, то для вычисления массы кривой L мы будем использовать формулу

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \rho(x,y)\,dl + \int\limits_{\overset{\cup}{BC}} \rho(x,y)\,dl + \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} \rho(x,y)\,dl,$$

где $\rho(x,y) = x^2 - 2xy$.

Вычислим сначала m_1 – массу дуги $\overset{\cup}{AB}$:

$$m_1 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left(x^2 - 2xy\right) dl =$$

$$= \left| \begin{array}{l} AB: x^2 + y^2 = 1,\ -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t, & \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi, \\ y = \sin t, & \end{cases} \\ dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt = dt, \\ \left(x^2 - 2xy\right)\Big|_{x = \cos t,\ y = \sin t} = \cos^2 t - 2\cos t \cdot \sin t \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\cos^2 t - 2\sin t \cdot \cos t\right) dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \sin 2t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2t\, d(2t)\right)^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t\, d(2t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + 2\right) = \frac{\pi}{4} + 1.$$

Вычислим теперь массу m_2 дуги $\overset{\cup}{BC}$:

$$m_2 = \int\limits_{\overset{\cup}{BC}} \left(x^2 - 2xy\right) dl = \left| \begin{array}{l} BC: y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1, \\ dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2} dx, \\ \left(x^2 - 2xy\right)\Big|_{y = 1 - x} = x^2 - 2x(1 - x) = 3x^2 - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x^2 - 2x\right)\sqrt{2} dx = \sqrt{2}\left(x^3 - x^2\right)\Big|_0^1 = 0.$$

Осталось найти массу m_3 дуги $\overset{\cup}{AC}$.

$$m_3 = \int\limits_{\overset{\smile}{AC}} \left(x^2 - 2xy\right) dl = \left| \begin{array}{l} AC: \; y = 0, \; -1 \le x \le 1, \\ dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1+0}\, dx = dx, \\ \left(x^2 - 2xy\right)\Big|_{y=0} = x^2 \end{array} \right| = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int\limits_{0}^{1} x^2 dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

В результате получили массу m контура L:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3}.$$

1б[*]) С помощью суммы повторных интегралов, заданных в полярной системе координат:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sin\varphi} r dr,$$

можно вычислить площадь области $D_2 = D_2^1 \cup D_2^2$.

Опишем области D_2^1 и D_2^2 системами неравенств.

$$D_2^1: \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}, \; \sin\varphi \le r \le 2\sin\varphi.$$

Первое двойное неравенство означает, что область D_2^1 заключена между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Из второго неравенства следует, что область D_2^1 ограничена к тому же дугами окружностей $r = \sin\varphi$ и $r = 2\sin\varphi$.

Область D_2^2 можно описать системой двойных неравенств:

$$D_2^2: \frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}, \; 0 \le r \le \sin\varphi,$$

т. е. область D_2^2 ограничена лучами $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ и окружностью $r = \sin\varphi$.

Искомая фигура $D_2 = D_2^1 \cup D_2^2$ изображена на рис. 7.

2б*) Вычислим площадь S фигуры D_2 как сумму двух данных повторных интегралов.

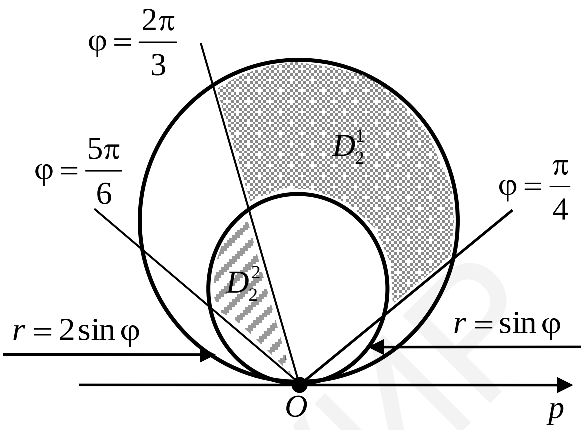


Рис. 7

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} r dr + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{0}^{\sin\varphi} r dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(4\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\right) d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} 3\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi + \frac{1}{4}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{17}{12}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{48}\left(17\pi + 9\sqrt{3} + 18\right).$$

Задание 4

Изобразите область интегрирования двойного интеграла $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, перейдите в нем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и вычислите полученный интеграл.

Решение

Область интегрирования D, заданная двойным неравенством $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, является кольцом, ограниченным двумя концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ радиусами $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ и общим центром в начале координат (рис. 8).

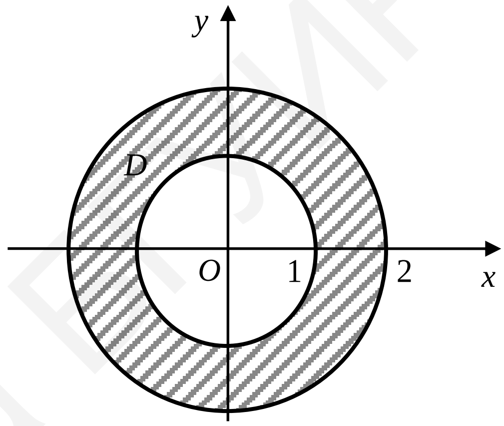


Рис. 8

Перейдем от прямоугольной декартовой системы координат xOy к полярной системе Op, совместив центры этих систем и направив ось Op вдоль оси Ox.

Применим формулы перехода от прямоугольной декартовой системы к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

В полярной системе координат подынтегральная функция примет вид

$$\sin\sqrt{x^2+y^2} = \sin\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sin\sqrt{r^2} = \sin r;$$

$$dxdy = rdrd\varphi.$$

Границы кольца D будут иметь следующие полярные уравнения:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1;$$

$$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4 \Leftrightarrow r^2=4 \Leftrightarrow r=2.$$

Само кольцо D в полярной системе координат можно задать теперь системой неравенств: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le r \le 2$.

В результате этих преобразований исходный интеграл примет следующий вид:

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \sin r \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r\cdot \sin r dr.$$

Внутренний интеграл вычисляется по частям:

$$\int\limits_1^2 r\cdot\sin r dr = \begin{vmatrix} u=r,\ du=dr, \\ dv=\sin r dr,\ v=-\cos r \end{vmatrix} = -r\cos r\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \cos r dr =$$

$$= -2\cos 2 + \cos 1 + \sin r\Big|_1^2 = -2\cos 2 + \cos 1 + \sin 2 - \sin 1.$$

Вычислив внешний интеграл по переменной φ, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi(-2\cos 2 + \cos 1 + \sin 2 - \sin 1) = 2\pi\cdot(-2\cos 2 + \cos 1 + \sin 2 - \sin 1).$$

Задание 5

В пространственной области T задан трехкратный интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} dy \int\limits_{3x-2y-6}^{0} dz$.

1. Вычислите этот интеграл.

2. Постройте область T, объем которой равен значению данного интеграла, а затем повторно найдите этот объем, используя подходящую формулу элементарной геометрии.

3. Найдите массу тела, имеющего форму области T, если известна плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = x - 2y$.

4. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_P \left(x^2+4yz+3\right)dxdydz$ по параллелепипеду $P: -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ -2\le z\le 0$.

Решение

1. Трехкратный интеграл будем вычислять последовательно, начиная с внутреннего и продвигаясь к внешнему:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} dy \int\limits_{3x-2y-6}^{0} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} dy \left(z \Big|_{3x-2y-6}^{0} \right) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} -(3x-2y-6)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (-3xy+y^2+6y)\Bigg|_{\frac{3}{2}x-3}^{0} dx = \int\limits_0^2 -\left(-3x\left(\frac{3}{2}x-3\right) + \left(\frac{3}{2}x-3\right)^2 + 6\left(\frac{3}{2}x-3\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{3}{2}x-3\right)\left(3x-\left(\frac{3}{2}x-3\right)-6\right)dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{3}{2}x-3\right)^2 dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x-3\right)^3\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{9}(0-(-3)^3) = 6.$$

2. Как известно, по формуле $\iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz$ вычисляется объем пространственной области T, которая задана системой неравенств: $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$, $\psi_1(x,y)\le z\le \psi_2(x,y)$. Таким образом, вычисленный в задаче **1** трехкратный интеграл численно равен объему области T, которую можно задать неравенствами:

$$0\le x\le 2,\ \frac{3}{2}x-3\le y\le 0,\ 3x-2y-6\le z\le 0.$$

Последнее неравенство означает, что в направлении оси Oz тело T ограничено поверхностями $z=0$ и $z=3x-2y-6$.

$z=0$ – это координатная плоскость xOy, которая ограничивает область T сверху. Плоскость P с уравнением $z=3x-2y-6$, ограничивающую T

снизу, приведем к виду «в отрезках», чтобы найти ее точки пересечения с осями координат.

$$P: z = 3x - 2y - 6 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 6 \Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{2y}{6} - \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-6} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что плоскость P пересекает ось Ox в точке – $A(2;0;0)$, ось Oy – в точке $B(0;-3;0)$, ось Oz – в точке $C(0;0;-6)$ (рис. 9).

Проекцией тела T на плоскость xOy является треугольник AOB, ограниченный прямыми $x = 0,\ y = 0,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1.$

Таким образом, тело T является треугольной пирамидой $CAOB$, объем которой вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot AO \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6.$$

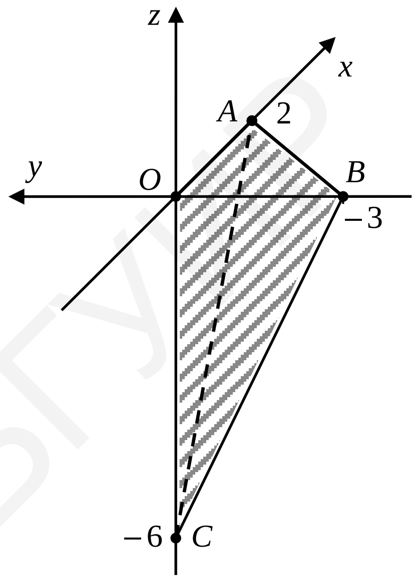


Рис. 9

Этот же результат для объема тела T был получен выше при решении задачи **1**.

3. Вычислим массу m тела, имеющего форму области T, с плотностью распределения массы $\rho(x, y, z) = x - 2y$. В соответствии с известной формулой

$$m = \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_T (x - 2y)\, dxdydz.$$

Для вычисления тройного интеграла используем приведенную в условии задачи расстановку пределов интегрирования в трехкратном интеграле по области T:

$$m=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3}{2}x-3}^{0} dy\int\limits_{3x-2y-6}^{0}(x-2y)dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3x}{2}-3}^{0} dy(x-2y)\cdot z\Big|_{3x-2y-6}^{0}=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3x}{2}-3}^{0}(x-2y)(-3x+2y+6)dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{3x}{2}-3}^{0}(-3x^2+6x+8xy-4y^2-12y)dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\left((-3x^2+6x)y+4xy^2-\frac{4}{3}y^3-6y^2\right)\Bigg|_{\frac{3x}{2}-3}^{0}=$$

$$=-\int\limits_0^2\left(-3x(x-2)\frac{3(x-2)}{2}+4x\cdot\frac{3^2}{2^2}(x-2)^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2^2}(x-2)^3-\frac{6}{2^2}\cdot 3^2(x-2)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(-\frac{9}{2}x(x-2)^2+\frac{9}{2}(x-2)^3+\frac{27}{2}(x-2)^2\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_0^2(x-2)^2(-x+x-2+3)\,dx=\frac{9}{2}\int\limits_0^2(x-2)^2\,dx=\frac{9}{2}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot(0-(-2)^3)=12\,.$$

4. Переход от тройного интеграла $\iiint\limits_P\left(x^2+4yz+3\right)dxdydz$ к трехкратному по параллелепипеду $P:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ -2\le z\le 0$ выполняется очевидным образом:

$$\iiint\limits_P\left(x^2+4yz+3\right)dxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2+4yz+3\right)dz=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-2}^{0}\left(\left(x^2+3\right)\cdot z+2yz^2\right)\Big|_{-2}^{0}=-\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_0^3 dy\left(-2\left(x^2+3\right)+8y\right)=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{1}dx\left(-2y\left(x^2+3\right)+4y^2\right)\Big|_0^3=-\int\limits_{-1}^{1}\left(-6\left(x^2+3\right)+36\right)dx=6\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+3-6\right)dx=$$

$$=12\int\limits_0^1\left(x^2-3\right)dx=12\left(\frac{x^3}{3}-3x\right)\Bigg|_0^1=4-36=-32\,.$$

Задание 6

Дана функция $f(x,y,z)=5-x+3y+2z$. Вычислите:

1) поверхностный интеграл $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$ первого рода;

2) поверхностный интеграл $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz$ второго рода по поверхности S треугольника, отсеченного координатными плоскостями от плоскости $P: x-2y+2z=4$. Сторону поверхности S выберите в соответствии с условием $\cos\beta<0$, где β – угол, образованный нормалью $\bar{n}$ к поверхности S с осью Oy.

Решение

1. Для вычисления поверхностного интеграла первого рода преобразуем его к двойному интегралу по области D_{xy}, являющейся проекцией поверхности S на плоскость xOy (рис. 10). Для этого из уравнения плоскости P выразим $z=2-\frac{x}{2}+y$, вычислим $z'_x=-\frac{1}{2}$, $z'_y=1$.

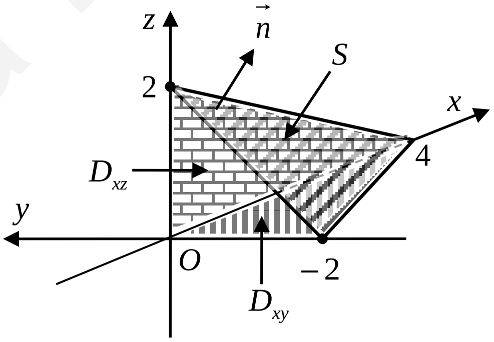


Рис. 10

Найдем $ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}dxdy=\frac{3}{2}dxdy$. Используем полученные параметры для перехода к двойному интегралу.

$$\iint\limits_S(5-x+3y+2z)ds=\iint\limits_{D_{xy}}\left(5-x+3y+2\left(2-\frac{x}{2}+y\right)\right)\cdot\frac{3}{2}dxdy=$$

$$=\frac{3}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(9-2x+5y)dxdy=\left|\begin{array}{c}D_{xy}:\\ -2\le y\le 0,\\ 0\le x\le 2y+4\end{array}\right|=\frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{2y+4}(9-2x+5y)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\left((9+5y)x-x^2\right)\Bigg|_{0}^{2y+4}=\frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\left((9+5y)(2y+4)-(2y+4)^2\right)=$$

$$=3\int\limits_{-2}^{0}\left((9+5y)(y+2)-2(y+2)^2\right)dy=3\int\limits_{-2}^{0}\left(3y^2+11y+10\right)dy=$$

$$=3\left(y^3+\frac{11}{2}y^2+10y\right)\Bigg|_{-2}^{0}=(-3)(-8+22-20)=18.$$

2. Отметим, что из условия $\cos\beta<0$ следует (см. рис. 10), что выбрана верхняя сторона поверхности S. Для вычисления поверхностного интеграла второго рода преобразуем его к двойному интегралу по области D_{xz} (см. рис. 10), являющейся проекцией поверхности S на плоскость xOz.

Для этого из уравнения $x+2y+2z=4$ плоскости P выразим переменную y: $y=\dfrac{x}{2}+z-2$ и подставим в подынтегральную функцию:

$$f(x,y,z)\Big|_{y=\frac{x}{2}+z-2}=5-x+3\left(\frac{x}{2}+z-2\right)+2z=\frac{x}{2}+5z-1.$$

Далее получим двойной интеграл по области D_{xz}, взятый со знаком минус с учетом направления нормали.

$$\iint\limits_{S}(5-x+3y+2z)dxdz=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{x}{2}+5z-1\right)dxdz=\begin{vmatrix} D_{xz}: \\ 0\le z\le 2, \\ 0\le x\le 4-2z\end{vmatrix}=$$

$$=-\int\limits_{0}^{2}dz\int\limits_{0}^{4-2z}\left(\frac{x}{2}+5z-1\right)dx=-\int\limits_{0}^{2}dz\left(\frac{x^2}{4}+(5z-1)x\right)\Bigg|_{0}^{4-2z}=$$

$$=-\int\limits_{0}^{2}dz\left(\frac{2^2(2-z)^2}{4}+(5z-1)(4-2z)\right)=-\int\limits_{0}^{2}\left(4-4z+z^2-10z^2+22z-4\right)dz=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}\left(9z^2-18z\right)dz=\left(3z^3-9z^2\right)\Big|_{0}^{2}=-12.$$

Задание 7*

В трехмерном пространстве заданы:

– векторное поле $\overline{a} = (5x+1)\cdot\vec{i} + (3-2y)\cdot\vec{j} + (3z-8)\cdot\vec{k}$;

– тело T, ограниченное замкнутой поверхностью $S: \begin{cases} z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}}; \end{cases}$

– контур L, являющийся линией пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 15z^2$ и $z = 1$;

– две точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$.

Требуется:

1) найти объем тела T;

2) вычислить поток векторного поля $\overline{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали;

3) определить значение циркуляции поля $\overline{a}$ вдоль контура L в направлении убывания параметра t;

4) подсчитать работу векторного поля $\overline{a}$ по перемещению материальной точки из положения A в положение B.

Решение

1. Изобразим тело T (рис. 11), которое ограничено сверху полусферой S_1 с уравнением $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, а снизу – конической поверхностью S_2 с уравнением $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}}$.

Для вычисления объема этого тела применим формулу

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\sqrt{16 - x^2 - y^2} - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \right) dxdy,$$

где D_{xy} – проекция пространственной области T на плоскость xOy. Границей области D_{xy} является проекция на плоскость xOy линии пересечения полусферы S_1 с конусом S_2. Получим ее уравнение:

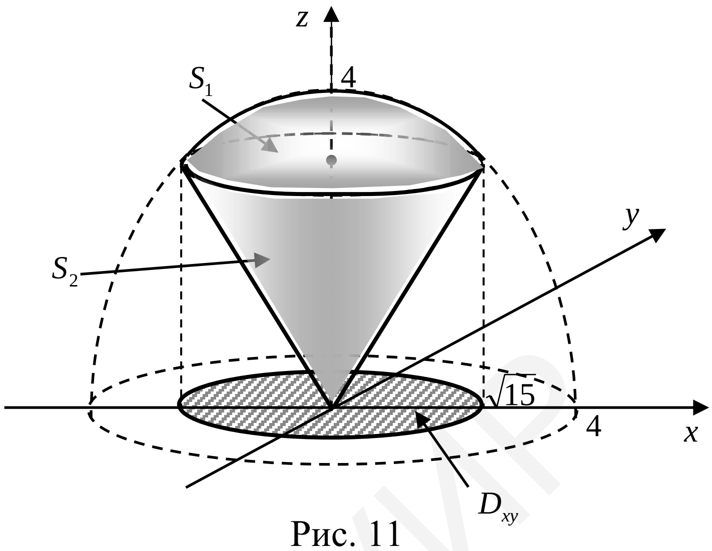


Рис. 11

$$\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16-\left(x^2+y^2\right)=\frac{x^2+y^2}{15}\Leftrightarrow\ 16\cdot 15-15(x^2+y^2)=x^2+y^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot 15=16(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2=15.$$

Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{15}$, расположенной на плоскости xOy. Значит, область D_{xy} – круг.

Чтобы вычислить двойной интеграл по кругу D_{xy}, удобно перейти к полярным координатам на плоскости xOy:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases} dxdy=rdrd\varphi,\ \sqrt{16-x^2-y^2}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}=\sqrt{16-r^2}-\frac{r}{\sqrt{15}};$$

$$D_{xy}:\ 0\le r\le\sqrt{15},\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Тогда двойной интеграл по области D_{xy} примет следующий вид:

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\sqrt{16-x^2-y^2}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}\right)dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{15}}\left(\sqrt{16-r^2}-\frac{r}{\sqrt{15}}\right)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\left(\int_0^{\sqrt{15}}\sqrt{16-r^2}\cdot rdr-\int_0^{\sqrt{15}}\frac{r^2}{\sqrt{15}}dr\right)=$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{15}}\sqrt{16-r^2}\,d\left(16-r^2\right)-\frac{r^3}{3\sqrt{15}}\Bigg|_0^{\sqrt{15}}\right)=$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{15}}-\frac{15\sqrt{15}}{3\sqrt{15}}\right)=-2\pi\left(\frac{1}{3}(1-64)+5\right)=\left(-2\pi\right)\cdot\left(-16\right)=32\pi.$$

2. Используем формулу Остроградского – Гаусса, чтобы с помощью тройного интеграла вычислить поток Π векторного поля $\bar{a}=\left(P;Q;R\right)$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали:

$$\Pi=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

где T – пространственная область, ограниченная поверхностью S.

Так как по условию $\bar{a}=(5x+1)\bar{i}+(3-2y)\,\bar{j}+(3z-8)\bar{k}$, то

$P=5x+1$, $Q=3-2y$, $R=3z-8$,

$\frac{\partial P}{\partial x}=5$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=-2$, $\frac{\partial R}{\partial z}=3$, а значит,

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6$, следовательно, поток Π равен

$$\Pi=\iiint\limits_T 6dxdydz=6\iiint\limits_T dxdydz=6\cdot V=6\cdot 32\pi=192\pi,$$

с учетом вычисленного в **1** объема $V=32\pi$ тела T.

3. Для вычисления циркуляции векторного поля $\bar{a}=(P;Q;R)$ вдоль контура L применим формулу

$$C=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_L(5x+1)dx+(3-2y)dy+(3z-8)dz.$$

Контур L в нашем случае является окружностью, лежащей в плоскости $z=1$ и являющейся линией пересечения этой плоскости с конусом $x^2+y^2=15z^2$ (рис. 12).

Получим параметрические уравнения окружности L:

$$\begin{cases} x^2+y^2=15z^2, \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=15, \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{15}\cos t, \\ y=\sqrt{15}\sin t, \\ z=1,\ t\in[0;2\pi]. \end{cases}$$

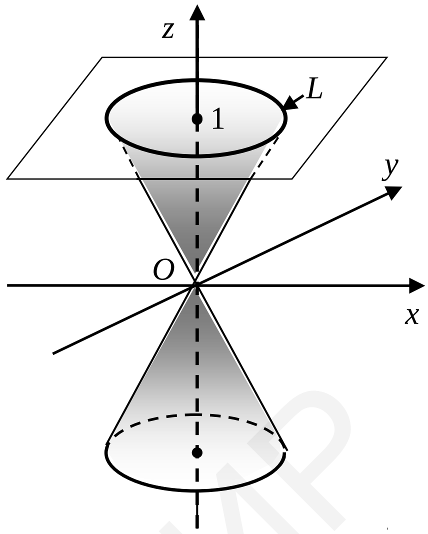


Рис. 12

Найдем отсюда $\begin{cases} dx=-\sqrt{15}\sin t dt, \\ dy=\sqrt{15}\cos t dt, \\ dz=0. \end{cases}$

Вычислим теперь циркуляцию C как определенный интеграл по переменной t, учитывая при этом, что по условию обход контура выполняется в направлении убывания параметра t. Тогда

$$C=\int_{2\pi}^{0}((5\cdot\sqrt{15}\cos t+1)(-\sqrt{15}\sin t)+(3-2\sqrt{15}\sin t)\cdot\sqrt{15}\cos t+(3\cdot 1-8)\cdot 0)dt=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(-75\cos t\cdot\sin t-\sqrt{15}\sin t+3\sqrt{15}\cos t-30\sin t\cos t)dt=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(-105\sin t\cdot\cos t-\sqrt{15}\sin t+3\sqrt{15}\cos t)dt=0,$$

как интеграл по отрезку длиной 2π, который вычисляется от суммы функций с периодом 2π.

4. Для нахождения работы поля $\bar{a}=(P;Q;R)$ по перемещению материальной точки из положения A в положение B будем использовать формулу

$$A=\int_{AB}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_{AB}(P;Q;R)(dx;dy;dz)=\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_{AB}(5x+1)dx+(3-2y)dy+(3z-8)dz.$$

Чтобы вычислить этот криволинейный интеграл второго рода, нужно преобразовать его к определенному интегралу, опираясь на параметрические уравнения отрезка AB с концами $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t, \\ y = y_A + (x_B - x_A)t, \\ z = x_A + (z_B - z_A)t, \end{cases} \quad t \in [0;1] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases} \quad t \in [0;1] \quad \Rightarrow \begin{cases} dx = d\,t, \\ dy = 2d\,t, \\ dz = 3d\,t. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в криволинейный интеграл получим определенный интеграл, значение которого равно искомой работе:

$$A = \int_0^1 \left(5(1+t) + 1 + (3 - 2(1+2t)) \cdot 2 + (3(1+3t) - 8) \cdot 3\right) dt =$$

$$= \int_0^1 (6 + 5t + 2 - 8t + 27t - 15)\,dt = \int_0^1 (24t - 7)\,dt = \left(12t^2 - 7t\right)\Big|_0^1 = 5.$$

2. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Задания по теме «Числовые и функциональные ряды»

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) или докажите расходимость этого ряда.

Варианты

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+10n-24}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{tg}\frac{2}{\sqrt{n}}}-1\right)\cdot\frac{n+3}{\sqrt{4n+7}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n+1\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!\cdot(n+4)}$.

2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-9n-40}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n\cdot\arccos\frac{1}{4^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right)$.

3) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+14n-48}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n^2+3\right)\cdot\left(e^{\sin\frac{1}{n}}-1\right)^2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{3}{2^{n+1}}\cdot\sin\frac{6}{2^{n+1}}$.

4) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n-1)(n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot\left(e^{\operatorname{tg}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}-1\right)^2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-5^{n+2}}{3^{n+1}+4\cdot 5^{n-1}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+3}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)$.

5) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{8^{n-1}+5}{2^n+4}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot(n-1)!+3\cdot(n-2)!}{n!+2\cdot(n-1)!}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1-\sqrt{n\cdot(n+2)}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$.

6) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{81n^2+36n-77}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2+4\right)\cdot\log_{5^n} \dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n+2\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)!\cdot(n+3)}$.

7) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+4n-15}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{3}{n}\right)^{2n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{8}{9^{n+1}}\cdot\cos\dfrac{10}{9^{n+1}}$.

8) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{64n^2+16n-63}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n+4}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+2}-2^{n+3}}{3^{n-4}+5\cdot 2^{n+1}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{n-2}{2n\cdot(n+1)}\right)$.

9) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+12}{n(n+3)(n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3n^2+4\right)\cdot\left(\ln\left(n^2+2\right)-2\ln n\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!+(n+2)!}{3(n+2)!+2n(n+1)!}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+3n+2}}$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^2+16n-60}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3n]{2n^2+3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3n+5}-2\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}\right)$.

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{36n^2+48n-20}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\cdot\dfrac{n^3+2n+1}{7n+8}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{5}{2^{n+1}}\cdot\sin\dfrac{15}{2^{n+1}}$.

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n-5}{3n^2+n+1}\right)^{n-1} \cdot \arccos\frac{1}{7^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n+2-\sqrt{n^2+n}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+2n-1}{(2n+1)!}$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2-84n-13}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{n+2}{4n^2+5} \cdot \frac{2n^2+1}{n+3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{3}{7^{n+1}} \cdot \cos\frac{4}{7^{n+1}}$.

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2-20n-21}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2+\frac{2}{n}}}{\left(n+\frac{6}{n}\right)^{n^2}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!+2(n+4)!}{(n+2)!+3n(n+3)!}$; г)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n^2-n}\right)$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{64n^2+48n-55}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}{\ln\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 2^{n-1}+5^{n+1}}{4\cdot 5^{n-1}+6\cdot 2^n}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+4}-2\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)$.

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln\left(2n^2+3n+5\right)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n+2}-n\right)\cdot\sqrt[2n]{3n^2+4}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}}$.

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{81n^2+18n-80}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2+1\right)\cdot\log_{3^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{4}}{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)\cdot\sqrt[3]{n}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2}{3^{n+1}} \cdot \sin\frac{4}{3^{n+1}}$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{81n^2+54n-72}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(5n^2+8\right)\cdot \ln\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+2}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\dfrac{3}{3n^2+4n+1}\right)$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{25n^2+30n-16}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{4n^4+5n}\cdot\left(e^{\ln\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}}-1\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+4}\cdot\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{4}{5^{n+1}}\cdot\cos\dfrac{6}{5^{n+1}}$.

20) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{49n^2+42n-40}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2+3}{n+5}\cdot\left(e^{\sin\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)}-1\right)^2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt{4n^2+n+5}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$.

21) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3-n}{n(n+1)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+6}{n+2}\cdot\log_{2^{\sqrt{n}}}\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6^{n-1}+4\cdot 5^{n+2}}{6^{n+2}+2\cdot 3^{n-2}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+3}-2\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)$.

22) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9n^2-3n-20}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{2n+5}{\sqrt{9n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{n^6+2n^2+3}-\sqrt[3]{n^6+n^2+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{2}{5^{n+1}}\cdot\sin\dfrac{3}{5^{n+1}}$.

23) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{36n^2-12n-35}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{6n+1}{6n-2}\right)^{2n}\cdot\arccos\dfrac{1}{8^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n^2}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\dfrac{n^2-4}{n^2-1}$.

24) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{n(n+2)(n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+4}{2n+1}\cdot\arcsin\dfrac{5}{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{5\cdot 3^{n-1}}\right)\cdot\sqrt[4n]{9+7n^2}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

25) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2-24n-32}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4n}{3n-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 6^{n-1}+7^{n+2}}{4\cdot 7^{n}+5\cdot 3^{n+1}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}n-\sqrt{2n^2-2}}{\sqrt{n^2+n}}$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+72n+45}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4n]{2n^2+3n+6}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+2}-n\right)$; г)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2+n-2}\right)$.

27) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+1)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(5n^2+4\right)\cdot\ln\frac{1}{\cos\frac{2}{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot(n+1)!+5\cdot n!}{(n+2)!-4\cdot(n+1)!}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4}{5^{n+1}}\cdot\sin\frac{6}{5^{n+1}}$.

28) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-24n-27}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)^2\cdot\frac{3n^2+7}{6n+5}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2n^2+3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4}{9^{n+1}}\cdot\cos\frac{5}{9^{n+1}}$.

29) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-12n-7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3n]{\ln(n+2)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!\cdot(n+5)}$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-15n-14}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n+1}+7^{n-1}}{7^{n+1}+5^{n}}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+5}-2\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)$.

Задание 2

Из множества данных рядов выберите сходящиеся и расходящиеся. Обоснуйте свой выбор ссылками на соответствующие классы эталонных рядов и известные свойства рядов.

Варианты

1) а) $\sum\limits_{n=12}^{\infty} \dfrac{5}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}-10^n}{5^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{9\sqrt[5]{n}}{n^2}$; д*) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \left(\cos\left(2\arcsin\dfrac{4}{5}\right)\right)^n$.

2) а) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{-10}{\sqrt[6]{n^{11}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-3)^{n-2}+8^{n+1}}{24^n}$;

г) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{2n\sqrt[5]{n}}{n^2}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arccos(\cos 3))^n$.

3) а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{3}{\sqrt[7]{n^9}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} 1)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{4^n-5\cdot 12^{n+1}}{6^{n-2}}$;

г) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{-2n\sqrt[3]{n}}{n^3}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sqrt{20}+\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{8-\sqrt{60}}\right)^n$.

4) а) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{-7}{\sqrt[5]{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arcctg} 0)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{3\cdot 2^{n-1}+4\cdot 7^n}{14^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-2n}{\sqrt{n\sqrt{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3\cdot\log_3 8\right)\right)^n$.

5) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-6}{\sqrt[11]{n^{17}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}+21^{n-1}}{4\cdot 7^n}$;

г) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{-9n\sqrt[4]{n}}{n^3}$; д*) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(3^{\log_9\left(\sqrt{3}-2\right)^2}\right)^n$.

6) а) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n^2\sqrt{n}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arccos 0)^n$; в) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{(-4)^{n+2} - 3\cdot 5^{n-1}}{20^n}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{-5\sqrt[7]{n}}{n\cdot\sqrt{n}}$; д*) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \left(\cos\left(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\right)\right)^n$.

7) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{-3}{\sqrt[8]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{2\cdot 4^{n+1} + 5\cdot 36^n}{9^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{n\cdot\sqrt[4]{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^n$.

8) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{-9}{\sqrt[8]{n^{11}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 30^n - 4\cdot 5^{n-1}}{6^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=14}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[3]{n\sqrt{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{6}+2}\right)^n$.

9) а) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[10]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\arcsin 1)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{n-1} + 2\cdot(-7)^n}{21^{n-2}}$;

г) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{-4}{\sqrt{n^2\sqrt{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{\log_{30} 10} + 2\sqrt{\lg 3}}\right)^n$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt[9]{n^{16}}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{4\cdot 3^{n+1} + 30^n}{10^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{9}{\sqrt[5]{n\cdot\sqrt[6]{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{25}\right)^n$.

11) а) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{-4}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{2\cdot 5^{n-1} + (-45)^n}{9^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}}$; д*) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \left(9^{\log_{81}\left(\sqrt{3}-2\right)^2}\right)^n$.

12) а) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[9]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\operatorname{arcctg}(-1)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{2\cdot 5^n + 3\cdot 6^{n+1}}{30^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{-5}{n\cdot\sqrt[4]{n^3}}$; д*) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} (\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6))^n$.

13) а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 7^{n+1}+3\cdot(-5)^{n-1}}{35^n}$;

г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{-8}{\sqrt{n^2\cdot\sqrt[3]{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \left(\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(5-2\sqrt{6}\right)\right)^n$.

14) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{4}{\sqrt[6]{n^{13}}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\arcsin\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{7\cdot 24^n+5\cdot 8^{n+1}}{16^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{-3\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{12}{5}}}$; д*) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\sqrt[6]{12-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\right)^n$.

15) а) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{-8}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \left(\arcsin\left(\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5^n+(-20)^{n+1}}{15^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{2n\sqrt[5]{n}}{n^{\frac{17}{3}}}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{8-2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right)^n$.

16) а) $\sum\limits_{n=13}^{\infty} \dfrac{7}{\sqrt[5]{n^6}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\arccos\left(\sin\dfrac{13\pi}{4}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6^{n+1}+4\cdot 24^n}{18^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{-2\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$; д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(2021\cdot\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)^n$.

17) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-6}{\sqrt[8]{n^{11}}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{15\pi}{4}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{3\cdot 14^{n-1}+2\cdot 7^{n+1}}{21^n}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2\sqrt{n^3}}{n^3\cdot\sqrt[4]{n}}$; д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} (\arcsin(\sin 4))^n$.

18) а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{-7}{\sqrt[9]{n^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(2001 \cdot \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3 \cdot 5^n + 4 \cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3n^2 \sqrt[5]{n}}{n^{\frac{20}{7}}}$; д*) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5 + \sqrt{13 - \sqrt{48}}}}\right)^n$.

19) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{11}{\sqrt[3]{n^{10}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg}\left(123 \cdot \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 12^n + 3 \cdot (-9)^{n+1}}{36^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{-2\sqrt[7]{n}}{\sqrt[4]{n^2 \cdot \sqrt{n}}}$;

д*) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{10 - 2\sqrt{21}}\right)^n$.

20) а) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{-8}{\sqrt[8]{n^9}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(245 \cdot \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{25^n + 3 \cdot 5^n}{15^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2n \cdot \sqrt[6]{n}}{n^{\frac{17}{4}}}$; д*) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} (\cos(2 \operatorname{arctg} 3))^n$.

21) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-10}{\sqrt[11]{n^6}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (\operatorname{ctg}(129 \cdot \operatorname{arctg}(-1)))^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 15^{n+1} + 4 \cdot 3^{n-1}}{20^n}$;

г) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{8n\sqrt[5]{n}}{n^{\frac{9}{2}}}$; д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\sqrt{\log_2 3 + 9\log_3 2 - 6}\right)^n$.

22) а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{5}{\sqrt[17]{n^8}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(2023 \cdot \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{42^n + 5 \cdot (-6)^n}{7^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{-4n^2 \cdot \sqrt[5]{n}}{n^{\frac{21}{3}}}$; д*) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{9}\right)\right)^n$.

23) а) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{-8}{\sqrt[6]{n^7}}$; б) $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(237 \cdot \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 24^{n}-5\cdot 8^{n+1}}{48^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{-5n^{2}}{\sqrt[3]{n\cdot\sqrt[4]{n}}}$; д*) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\,3\right)\right)^{n}$.

24) а) $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\dfrac{-12}{\sqrt[7]{n^{3}}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{2\cdot 9^{n+1}+4\cdot 6^{n-1}}{27^{n}}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{2n^{2}\sqrt[4]{n}}{n^{\frac{18}{7}}}$; д*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\arcsin\left(\cos 2\right)\right)^{n}$.

25) а) $\sum\limits_{n=8}^{\infty}\dfrac{5}{\sqrt[10]{n^{9}}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\arcsin\left(\mathrm{tg}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{3\cdot 2^{n+1}+5\cdot 36^{n}}{2\cdot 18^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{-3n\cdot\sqrt[3]{n^{2}}}{n^{\frac{13}{4}}}$; д*) $\sum\limits_{n=9}^{\infty}\left(\arccos\left(\sin 4\right)\right)^{n}$.

26) а) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{-4}{\sqrt[5]{n^{7}}}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\sin 24\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot(-3)^{n+1}+6\cdot 5^{n}}{15^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{3n\cdot\sqrt[7]{n^{5}}}{n^{\frac{21}{8}}}$; д*) $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\left(\mathrm{arctg}\,\mathrm{ctg}\,5\right)^{n}$.

27) а) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{-9}{\sqrt[4]{n^{5}}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{arcctg}\left(\mathrm{tg}\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)\right)\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3\cdot(-5)^{n}-4\cdot 10^{n}}{20^{n}}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{2n^{4}\cdot\sqrt{n}}{n^{\frac{31}{4}}}$; д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\left(\sqrt{\lg 30-2\sqrt{\lg 3}}\right)^{n}$.

28) а) $\sum\limits_{n=11}^{\infty}\dfrac{-7}{\sqrt[8]{n^{3}}}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\arccos\left(\mathrm{ctg}\left(\dfrac{26\pi}{3}\right)\right)\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{2\cdot(-8)^{n}+3\cdot 24^{n-1}}{16^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{2n\cdot\sqrt[5]{n^{3}}}{n^{\frac{14}{3}}}$;

д*) $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\left(\log_{2}\log_{4}\log_{9}81\right)^{n}$.

29) а) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{-5}{\sqrt[8]{n^{11}}}$; б) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \left(\arccos\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{5\cdot(-9)^{n+1}+4\cdot 27^n}{81^{n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n^3\cdot\sqrt[5]{n}}{n^{\frac{19}{3}}}$;

д*) $\sum\limits_{n=15}^{\infty} \left(\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}\right)^n$.

30) а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{-6}{\sqrt[7]{n^{6}}}$; б) $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \left(\sin\left(27\cdot\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{5\cdot(-32)^{n+1}+6\cdot 4^{n-1}}{16^n}$; г) $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{2n\cdot\sqrt[6]{n^5}}{n^{\frac{17}{3}}}$;

д*) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\left(6\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{14-8\sqrt{3}}\right)^n$.

Задание 3

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ укажите такой эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для которого $a_n \sim C\cdot b_n$ при $n\to\infty$ $\left(a_n, b_n \in \mathbb{R}, C>0\right)$, и сделайте вывод о сходимости исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Варианты

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4\cdot 7^n+8\cdot 9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2+\sqrt{n^2+6}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2\cdot\sqrt{n^2+6}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8n+5}+\sqrt[5]{n^4}+2\sin n}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$;

д*) $5,\ \frac{6}{5},\ \frac{19}{21},\ \frac{13}{18},\ldots$.

2) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot(n-1)!+3n!}{4\cdot(n+1)!+(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-7}{n^3+\sqrt{n^6+2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-7}{n^3\cdot\sqrt{n^6+2}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{16n^3+5}-3\sqrt{n^3}+4}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$;

д*) $\frac{4}{3},\ \frac{7}{16},\ \frac{2}{9},\ \frac{13}{96},\ldots$.

3) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-5)^n}{4\cdot 2^n+7\cdot 10^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+4}}{5n^2+\sqrt{2n^2-1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+4}}{5n^2\cdot\sqrt{2n^2-1}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{5}+1+5+\ldots+5^{n-1}}{3\cdot 10^n+4\cdot(-8)^n}$;

д*) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{44},\ldots$.

4) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cdot 2^n+3\cdot 4^n}{3\cdot(-16)^n+5\cdot 8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{\sqrt{n^3}+\sqrt{4n^3+5}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{4n^3+5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2n]{n^2+3n+4}+3\cdot 2^n}{\frac{1}{4}+1+4+\ldots+4^{n+1}}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{arctg} n+5\sqrt{n}}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

5) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^n}{2\cdot 6^n+7\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+9}{n^4+\sqrt{9n^8+n^3}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+9}{n^4\cdot\sqrt{9n^8+n^3}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt[3]{n^2}+3\cdot\sin\sqrt{n}}{4+9+\ldots+(5n-6)}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{arctg}\sqrt{n}+2\cdot\sqrt[3]{n}}{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}$.

6) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cdot 4^n}{3\cdot 5^n+7\cdot(-20)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4n^2+5n+10}{2n^3+\sqrt{25n^6+n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4n^2+5n+10}{2n^3\cdot\sqrt{25n^6+n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-2)^n+7}{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+1-4+\ldots+(-1)^n\cdot 4^n}$;

д*) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{21}{20}, \ldots$.

7) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n+3\cdot(-4)^n}{8+64+\ldots+8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+4n+10}{3n^4+\sqrt{n^8+n^5}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+4n+10}{3n^4\cdot\sqrt{n^8+n^5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{n^5}+4\sqrt{n^3}+4\cos(5n)}{-1+4+9+\ldots+(5n+4)}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt[3]{n^4}+2\cos\frac{n}{5}}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$.

8) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}}{\sqrt[3n]{4n^2+3n+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+10}{3n^2+\sqrt[3]{n+7}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+10}{3n^2\cdot\sqrt[3]{n+7}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot(n-2)!+n!\cdot\cos(2n)}{3\cdot(n+1)!+4(n-1)!}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5}+3n^2+\operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}$.

9) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+4+\ldots+2^{n-2}}{3\cdot 6+\arccos\frac{n}{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5n+1}{\sqrt[6]{3n+4}+n^2+7}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5n+1}{\sqrt[6]{3n+4}\cdot(n^2+7)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7+15+\ldots+(8n-9)}{3\sqrt{n}+\arcsin\frac{n^2+1}{2n^2}}$;

д*) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots .$

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)! - 3! \cdot (n+1)!}{(n+4)! + 5n \cdot (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt{n} + n^2}{n^3 + \sqrt[5]{32n+4}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt{n} + n^2}{n^3 \cdot \sqrt[5]{32n+4}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot \sqrt[7]{n} + 3n^2 + \cos(4n)}{1+7+13+\ldots+(6n-5)}$;

д*) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots .$

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-3+9-\ldots+(-3)^n}{6^n + 5n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{n} + 4}{n + \sqrt{n^2+4}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{n} + 4}{n \cdot \sqrt{n^2+4}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[5n]{3+n+4n^2}}{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2}$;

д*) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{13}{72}, \frac{5}{44}, \ldots .$

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3+\arcsin\frac{1+n}{2n}}{1+6+11+\ldots+(5n-4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n} + \arccos\frac{2}{n}}{n + \sqrt{4n^2+5n+7}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n} \cdot \arccos\frac{2}{n}}{n \cdot \sqrt{4n^2+5n+7}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}{5 - 25 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 5^n}$;

д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n + \sqrt[3]{n}}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n+1)}$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n\sqrt{n} + \operatorname{arcctg}\frac{3}{n}}{1+2+3+\ldots+n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot \sqrt[7]{n} - 3n}{\sqrt[7]{n^2+n+3} + n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot \sqrt[7]{n} - 3n}{\sqrt[7]{n^2+n+3} \cdot n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arccos\frac{1-2n}{4n+5} + n}{1 - 4 + 4^2 + \ldots + (-1)^n \cdot 4^n}$;

д*) $-\frac{3}{2}, 10, \frac{21}{4}, \frac{36}{7}, \ldots .$

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8\cdot 7^n-3\cdot 14^n}{21^n+\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[4]{n}}{n^3+\sqrt[5]{n+4}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[4]{n}}{n^3\cdot\sqrt[5]{n+4}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!+2\cdot(n+2)!}{(n+4)!+n\cdot(n+2)!}$;

д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+\sqrt[6]{n}}{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4\cdot 5^n+\arccos\dfrac{1}{3^n}}{2+20+200+\ldots+2\cdot 10^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3\cdot\sqrt{n}+3n^2}{n^4+\sqrt{4n^2+9}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3\cdot\sqrt{n}+3n^2}{n^4\cdot\sqrt{4n^2+9}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt[9]{n}+\sqrt{n^3}+\cos\dfrac{1}{n}}{-2+2+8++\ldots+(4n-6)}$;

д*) $\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{5},\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{4},\ldots.$

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}}{7+7^2+\ldots+7^{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[4]{n}+\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}}{n^3+\sqrt[3]{8n^3+4n+7}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[4]{n}+\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}}{n^3\cdot\sqrt[3]{8n^3+4n+7}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+3n+\sqrt[6]{n^3+4n}}{-6+3+12+\ldots+(9n-6)}$;

д*) $\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{17}{12},\dfrac{6}{5},\ldots.$

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10\cdot n+3^n}{15^n+8\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n}}{n^3+\sqrt{n^4+5n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n}}{n^3\cdot\sqrt{n^4+5n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{n\pi}{4n+3}+n\cdot\sqrt[4]{n}}{-2+3+8+\ldots+(5n-7)}$;

д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+n^2\cdot\sqrt{n}}{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)(n+2)}$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5\cdot 2^n + 3\sqrt{n}}{1+3+3^2+\ldots+3^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+n^2\cdot\sqrt[5]{n+4}}{n^3+\sqrt{n^3+2n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+n^2\cdot\sqrt[5]{n+4}}{n^3\cdot\sqrt{n^3+2n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n-6+\sqrt{n+3}}{8+16+24+\ldots+8n}$;

д*) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{23}{40}, \ldots$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 9^{n-1}+5\cdot 3^{n+1}}{4\cdot 18^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot\sqrt[6]{n^3+5n^2+7}+4\sqrt{n^3}}{5n^2+\sqrt[3]{n^2+6n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot\sqrt[6]{n^3+5n^2+7}+4\sqrt{n^3}}{5n^2\cdot\sqrt[3]{n^2+6n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{3\pi n}{6n+4}+2n\cdot\sqrt[8]{n}}{-4+5+14+\ldots+(9n-4)}$;

д*) $\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{19}, \dfrac{2}{13}, \ldots$.

20) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot(n-1)!+4\cdot n!}{(n+3)!+3\cdot(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+\sqrt[8]{n}}{\sqrt{n^3}+\sqrt[3]{n^2+4}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+\sqrt[8]{n}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt[3]{n^2+4}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+7n}+\sin\dfrac{4}{n}}{16+12+18+\ldots+6n}$;

д*) $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots$.

21) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2\cdot(n-2)!+n\cdot(n-1)!}{n!+4\cdot(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+4+\sqrt[3]{n+1}}{n^2+\sqrt[4]{16n+11}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+4+\sqrt[3]{n+1}}{n^2\cdot\sqrt[4]{16n+11}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[2n]{3n^2+9n+6}}{-8+1+10+\ldots+(9n-8)}$;

д*) $1, \dfrac{5}{4}, 1, \dfrac{13}{16}, \ldots$.

22) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+5)!+n\cdot(n+3)!}{(n+4)!+(n+6)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4n+n\cdot\sqrt[5]{n}}{n^2\cdot\sqrt[4]{n}+\sqrt[8]{n^7+3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4n+n\cdot\sqrt[5]{n}}{n^2\cdot\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[8]{n^7+3}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}}{2+4+6+\ldots+2n}$;

д*) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{16}{11}, \ldots$.

23) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!+n^2\cdot(n-1)!}{(n+1)!+(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt[6]{n+5}}{n^2+\sqrt[3]{n+8}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt[6]{n+5}}{n^2\cdot\sqrt[3]{n+8}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{5}{n^2}+\sqrt{n^3+4}}{-3+4+\ldots+(7n-10)}$;

д*) $8, \dfrac{13}{8}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{23}{64}, \ldots$.

24) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[2n]{n^2+2n+9}}{6+12+18+\ldots+6n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[8]{n+1}+n}{\sqrt[3]{n^2+4n}+\sqrt{n^2+9}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[8]{n+1}+n}{\sqrt[3]{n^2+4n}\cdot\sqrt{n^2+9}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\cdot 3^n+5\cdot 2^n}{\frac{1}{7}+1+7+\ldots+7^n}$;

д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5n+6}{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}$.

25) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n+4\cdot 3^n}{\cos n+21^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt[5]{n+1}}{n^2+\sqrt[4]{16n+9}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt[5]{n+1}}{n^2\cdot\sqrt[4]{16n+9}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+4n}+\cos\frac{3n+1}{n^2+8}}{-8+2+12+\ldots+(10n-8)}$;

д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^7+n^3+5}+\operatorname{arctg}\frac{2}{n+4}}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot(n-6)!+(n-4)!}{(n-4)!+(n-3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+\sqrt[4]{n+5}}{n^4+\sqrt[6]{3n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\sqrt[4]{n+5}}{n^4\cdot\sqrt[6]{3n+1}}$;   г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6n]{n^3+4n+1}+\arcsin\frac{7}{n}}{-5+4+13+\ldots+(9n-5)}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}+\arccos\frac{6n+1}{4-12n}}{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}$.

27) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot\sqrt[5]{n}+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n}}{7+14+21+\ldots+7n}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{9n^2+6}}{n^3+\sqrt[3]{n+7}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{9n^2+6}}{n^3\cdot\sqrt[3]{n+7}}$;   г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+6\cdot 7^n}{1+9+81+\ldots+9^n}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot\sqrt[3]{8n+7}+\sin\frac{1}{2n}}{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}$.

28) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot(n+1)!+n\cdot(n+2)!}{n\cdot(n+2)!+(n+4)!}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+9}+n}{n^2+\sqrt[4]{16n+7}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+9}+n}{n^2\cdot\sqrt[4]{16n+7}}$;   г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-5\cdot 3^n}{\frac{1}{4}+1+4+4^2+\ldots+4^n}$;

д*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot\sqrt[9]{n}+\sqrt{n^3+4}}{1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2}$.

29) а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{9^n}}{1+9+81+\ldots+9^n}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+8}+3n}{n^3+\sqrt[5]{32n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+8}+3n}{n^3\cdot\sqrt[5]{32n+1}}$;   г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2n]{n+n^2+3}}{-7+1+9+\ldots+(8n-7)}$;

д*) $-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{17}{20}, \ldots$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{49}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{7^n}}{\sqrt[4n]{5+2n+n^3}+4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+8}+5n}{n^2+\sqrt[12]{n^{11}+8}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+8}+5n}{n^2\cdot\sqrt[12]{n^{11}+8}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{4}{n}+\sqrt{n^2+7}}{-4+2+8+\ldots+(6n-4)}$;

д*) $2, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{23}{16}, \ldots$.

Задание 4

Исследуйте сходимость знакоположительного ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

Варианты

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(2-3\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{n^3}}{\sqrt[8]{n^9+5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}\cdot\left(\dfrac{2n+3}{2n+4}\right)^{-2n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!\cdot\sqrt{n^2+4}}{(2n+1)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+5)\cdot\ln^2(4n+6)}$.

2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(3+(-1)^n\right)\cdot\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}+\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n^2}}{(2n)!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+2)!}{(2n)!!\cdot\sqrt{n+5}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(7n-2)\cdot\sqrt{\ln(4n+1)}}$.

3) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+4}\cdot\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+5n}\cdot\left(\arccos\left(\dfrac{3}{n}\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{(2n-1)!!\cdot 4^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(5n^2+3\right)\cdot e^{-n^3}$.

4) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2+2}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+8n-10n^2}{3+9n-10n^2}\right)^{5n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!\cdot 3^n}{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$.

5) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(5+4\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)\cdot\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt{n^3+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n+3}\right)^{\sqrt{n^2+2n+7}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)!}{(n!)^3\cdot 64^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\ln(3n)\cdot\ln(\ln(4n))}$.

6) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}{5n+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n+4}{6^n}\cdot\left(\dfrac{8n+3}{8n+1}\right)^{2n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{((2n+2)!!)^2}{(2n+1)!\cdot n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4n^2+9\right)\cdot e^{-2n^3}$.

7) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{3}{\sqrt{n}}}-1\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{2}{n+3}\right)}\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+5)!\cdot 4^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$.

8) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^3}}\cdot\arcsin\left(\dfrac{n+1}{4n^2+5}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)^3\cdot\arcsin^{2n}\left(\dfrac{1}{n+5}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots\cdot(4n)}{4\cdot 10\cdot 16\cdot\ldots\cdot(6n-2)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+4}{\left(n^2+9\right)\cdot\ln(2n+5)}$.

9) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+n\pi\right)\right)\cdot\sqrt{n+3}}{\sqrt[10]{n^{17}+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+4}\cdot\left(1-\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)^{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 9\cdot 16\cdot\ldots\cdot(7n-5)}{5\cdot 10\cdot 15\cdot\ldots\cdot(5n)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+5}\cdot\sqrt[3]{\ln(n+6)}}$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n+8}{n\cdot 3^n+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(e^{\operatorname{tg}\frac{3}{n}}-1\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)!\cdot 3^n}{3\cdot 12\cdot 21\cdot\ldots\cdot(9n-6)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\cdot\ln(2n)\cdot\sqrt{\ln(\ln(4n))}}$.

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_{3^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{n^2+5n+4}}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\cdot\left(\frac{5n^2+n+3}{5n^2+2n+1}\right)^{10n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n^2+3)\cdot 5^{n+1}}{(n+4)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+5)\cdot e^{-n^2}$.

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+5}{n+1}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2n}{2n+5}\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3\cdot 4^n}{5n^3+4n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+5}{4n+10}\cdot e^{-n^2}$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\sin\left(\frac{9\pi}{2}-n\pi\right)\right)\cdot\sqrt[3]{n+7}}{\sqrt[12]{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n\cdot\left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{3n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(n+4)!}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n+4)\cdot\ln^2(4n+1)}$.

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{6n}\cdot\sqrt{n}}{2^n+n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot\sqrt{n+1}}{(2n)!!\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-\sqrt{n}}$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)}{n+\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\log_4\left(\frac{8n^2+5}{n^2+n+1}\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n^n\cdot\sqrt{4n+3}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n+2)\cdot\ln^3(\ln(n+3))}$.

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n}\cdot\ln\left(\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{5n+n^2}{2n^2+n+3}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(4n+7)\cdot\sqrt[3]{\ln(6n+1)}}$.

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7+4}\cdot\left(\cos^2 n+3\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\log_{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\cdot\left(n^2+1\right)}{(n+2)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{\left(n^2+3\right)\cdot\sqrt[4]{\ln(n+2)}}$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}}\cdot\sin\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{\ln^n(2n+3)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!\cdot(5n+2)}{7^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n}}$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3-2\cdot(-1)^n\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^{13}+n+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\mathrm{tg}^{2n}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 5^n}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(3n-2)\cdot\sqrt[4]{\ln(3n+2)}}$.

20) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\cdot n}{2^n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sin\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n}\right)}-1\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{28^n\cdot\left((n+1)!\right)^3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\cdot\ln(2n)\cdot\sqrt{\ln(\ln(n+2))}}$.

21) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n+8}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\left(\cos^2 n+3\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(n+1)!}\cdot\arcsin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln(6n)\cdot\sqrt{\ln(\ln(3n))}}$.

22) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt{n}+2}}-1\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n^2+n}-n}-1\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(n!)^2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$.

23) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{16n^3+7}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n^2+4n+3}{5n^2+6n+7}\right)^{5n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n+1)}{10^n\cdot(n+3)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln(7n)\cdot\ln^3(\ln(8n))}$.

24) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+6}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot\left(1-\cos\dfrac{4}{n+1}\right)}{3^{2n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{(2n-1)!!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-2)\cdot e^{-n^2}$.

25) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)\cdot\sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt[6]{n^{11}+n^2+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{arctg}^{4n}\left(\dfrac{n+4}{n^2+1}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n\cdot 2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+9}{\left(6n^2+7\right)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+5)}}$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}-1}{4n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n\cdot\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+4}\right)^{-n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!\cdot 5^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+7}{\left(\sqrt{n^3+2}\right)\cdot\ln^3(3n+4)}$.

27) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{1-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}-1}{5n+13}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\dfrac{5n^2+7n+3}{5n^2+6n+1}\right)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(n+3)!}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{7^n}\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{\left(n^3+4\right)\cdot\ln(2n+9)}$.

28) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3}+\sqrt[3]{n^4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\arcsin^{6n}\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 9\cdot 16\cdot\ldots\cdot(7n-5)}{(n+1)!\cdot 6^n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{\left(n^2+1\right)\cdot\ln(3n+4)}$.

29) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(n^2+n\right)}{2^n+6n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+3n+4}\right)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{5^n\cdot n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(2n+5)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+5)}}$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}\left(\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+3}\right)}-1\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln(8n+1)\cdot\sqrt{\ln(\ln(n+2))}}$.

Задание 5

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда. Для сходящегося ряда укажите характер сходимости. Оцените абсолютную величину n-го остатка ряда и найдите сумму этого ряда с точностью 0,01 в случае его абсолютной сходимости.

Варианты

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{2n+1}{4n+7}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{3n+7}{n\cdot(4n+5)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n\cdot(n+1)!}$.

2) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n+3}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

3) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot n\cdot\ln\left(\frac{7n+5}{7n+2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+2}}$;

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^4 n}$.

4) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\sqrt{\ln(2n)}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{(n+2)!}$.

5) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\frac{6n+3}{4n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(e^{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}-1\right)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n)!!}{(2n+1)!}$.

6)) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n+5}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{\sqrt{n^2+5n+6}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot(2n+1)\cdot e^{-n^2}$.

7) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(n-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n+4}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{3^n+n}{9^n+n^3}$.

8) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} - 1\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{\sqrt{n} \cdot 6^n}$.

9) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\dfrac{6n+5}{6n+2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{3+2\cdot(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{n+4}$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \arccos\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+4}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \ln\left(\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{4}{n+3}\right)}\right)$.

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi+n\pi)}{\ln(n+2)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot (3n^2-2) \cdot e^{-2n^3}$.

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sqrt[3]{n} \cdot \left(e^{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}} - 1\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(2n)}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sqrt{n+1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2+7n}{n^3+6}\right)$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\dfrac{7n^2+3n}{7n^2+2n+6}\right)^{-7n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{n}{n^2+3}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{(2n)!!\cdot n!}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{n\cdot(3n-2)}{n^3+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(4n+3)\cdot\ln^3(2n+1)}$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot n\cdot\ln\left(\dfrac{5n-3}{5n-4}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{n+3}{4n^2+n+2}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot n}{(n^2+1)^3}$.

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot\cos n}{n\cdot\ln(2n)\cdot\ln^3(3n+4)}$.

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot(2n+1)!}{((n+3)!)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\dfrac{5^n+n^2}{10^n+3n}$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot 2^n}{(2n)!!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(1-\cos\dfrac{2}{n+1}\right)$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot n^2\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{3n+5}{n^3+7}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{2n+5}{n^2+4}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+4)\cdot\ln^3(2n+5)}$.

20) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n^2+3n+5}{4n+10}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\ln(2n)\cdot\sqrt{\ln(\ln(n+3))}}$.

21) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\cdot9\cdot16\cdot\ldots\cdot(7n-5)}{(3n+8)\cdot4^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(5n^2-3)\cdot e^{-n^3}$.

22) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n\cdot(n+1)!}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\sqrt{n^3+n+2}-\sqrt{n^3+4}\right)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+4)}{5^n\cdot(n+1)!}$.

23) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot\ln\left(\frac{n^2+7}{n^2+3n+4}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{2}{n}\right)}{4n+5}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n+1)}{3^n\cdot\ln(n+3)}$.

24) а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{8n^2+5n+10}{8n^2+3n+2}\right)^{-\frac{n}{2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(8n+3)\cdot\ln(2n+7)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{4}{\sqrt{n+1}}\right)}{(n+1)!}$.

25) а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)}{\ln(n^2+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(6n-5)\cdot\sqrt{\ln(4n+3)}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(9n+8)\cdot6^n}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2\cdot\arccos\left(\dfrac{n+2}{n^2+5}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\arcsin\left(\dfrac{4}{\sqrt{n+2}}\right)}{\sqrt[4]{16n+5}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(2n+2)!!}{((n+1)!)^2}$.

27) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}\cdot 4^n}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n+3)}{(n^2+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(4n)}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n^{n+1}}{(n+1)!\cdot 3^n}$.

28) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n^2+3)\cdot\ln\left(\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(4n+7)\cdot\ln(n+2)}{(5n^2+8)\cdot 6^n}$.

29) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{n^2}\cdot\ln(n+2)}{4n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\ln(n+1)\cdot\sqrt{\ln(\ln(2n+5))}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^3\cdot\operatorname{arctg}^{5n}\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{n+6}}\right)$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4+n\cdot 3^n}{2^n+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(e^{\operatorname{tg}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}-1\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot e^{-\sqrt{n}}$.

Задание 6

1. Для каждого из данных функциональных рядов найдите область его сходимости.

2. Докажите по определению равномерную сходимость ряда **б)** на множестве X. Начиная с какого натурального значения n модуль n-го остатка $r_n(x)$ не превосходит $\varepsilon = 10^{-3}$ для всех $x \in X$ одновременно?

3. Докажите равномерную сходимость ряда **в)** на отрезке $[a;b]$, используя признак Вейерштрасса. Составьте числовую мажоранту для ряда на этом отрезке и обоснуйте ее сходимость. Покажите, что данный ряд допускает почленное интегрирование на $[a;b]$ и напишите полученный при этом ряд.

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5+n} \cdot \left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2+3n}$, $X = [0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n \cdot \ln^2(n+1)}$, $[-4;2]$.

2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt[4]{7n}} \cdot x^{2n} \cdot \sin(x - n\pi)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right)$, $X = [-1;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2nx}}$, $[0;1]$.

3) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[5]{n}} \cdot \operatorname{tg} 2x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, $X = [0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$, $[-3;3]$.

4) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 3^{-\frac{n^2}{x}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n)\cdot(x+2n+2)}$, $X = [0;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{8n-5}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+x)^3}$, $[0;1]$.

6) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{25^n}\cdot x^{2n}\cdot\cos(2x-n\pi)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right)$, $X=R$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2+x)^{2n}}$, $[1;2]$.

7) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3^{\frac{n}{2}}}\cdot \operatorname{tg}4x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{x^2+n^2}$, $X=[-1;1]$.

8) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 2^{-\frac{n^3}{x}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n\sqrt[3]{n}}$, $X=R$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n^2\cdot 4^n}$, $[-4;4]$.

9) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-2}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n^3}}$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^3+x^6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{4^n\cdot\sqrt{n+x^2}}$, $X=[0;2]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{3^{n+1}}$, $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}\cdot(x^2-6x+13)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n^3+2}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x \cdot e^{-nx}$, $[0;1]$.

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(4n-1)} \cdot \sin^{3n} x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{9n+2}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \cos(2n)}{6^{n+1}}$, $[0;1]$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n \cdot \sin 2x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}}$, $X=[-3;-1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+6}$, $[0;\pi]$.

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{3nx}}$, $[0;2]$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{n^2 \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-3}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3nx)}{\sqrt{n^3+4}}$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cdot 5^{\frac{n}{x+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{5^n \cdot \sqrt{n^2+x^4}}$, $X=[0;2]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(x+5)^{2n}}$, $[-1;1]$.

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+2}} \cdot \mathrm{tg}^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n} - \frac{\cos(n+1)x}{n+1} \right)$, $X=R$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n^3+2} \cdot (x+4)^n$, $[-5;-3]$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{n}+1\right)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{4n^2-1}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot e^{n\sqrt{x}}}$, $[1;2]$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n+|x|^{-n}}{3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-6}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n^2x}}$, $[0;1]$.

20) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+3)\cdot \arcsin 2^{nx}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{2n-1}-\frac{x^n}{2n+1}\right)$, $X=[-1;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(x+3)^{4n}}$, $[-1;2]$.

21) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5+n}\cdot\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{27n^3-5}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\cdot \arcsin\frac{n}{5^n}$, $[-2;2]$.

22) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^3}\cdot \sin^{3n} x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-1}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{5n+2}$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

23) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^{3x+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot \ln^2(3n+2)}$, $[-1;1]$.

24) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n+e^{-2x}\right)\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3+5}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\cdot\sin\left(nx^2\right)}{n\sqrt{n}}$, $[0;1]$.

25) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}+1\right)\cdot\operatorname{arctg}3^{-nx}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{12n-9}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-5)^n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{7^n}$, $[6;8]$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3^{\frac{n}{2}}}\cdot\operatorname{tg}^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{9n-3}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\cdot e^{-nx}$, $[0;1]$.

27) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln|x+2|}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^3+8}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\operatorname{arctg}\frac{n^2}{3^n}$, $[-1;1]$.

28) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{5x-x^2-6}}\cdot\operatorname{tg}^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n+2}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{4^n}$, $[-8;-6]$.

29) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\ln\left(4-x^2\right)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n^2+2n+3}}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x\cdot e^{-\sqrt{nx}}$, $[0;1]$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\cdot\operatorname{tg}^n x$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1}$, $X=[0;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(x-3)^n}$, $[4;7]$.

Задание 7

1. Для каждого из данных степенных рядов найдите интервал и область сходимости.

2. Укажите наименьшее и наибольшее целые x из области сходимости рядов **а)–б)**.

3. Найдите сумму степенного ряда **б)**, используя для этого операции почленного интегрирования и дифференцирования.

1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)x^{n-1}$.

2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n\cdot n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(n+\frac{2}{n^2}\right)x^{n-1}$.

3) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2+2n-5\right)\cdot x^n$.

4) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+2n-5\right)\cdot x^{2n}}{2^n}$.

5) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{n\cdot\ln(2n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)x^{2n-1}$.

6) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(x+3)^{2n-1}}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x-2)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$.

7) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot(x+5)^{2n-1}}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{(n+2)\cdot 9^n}$.

8) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{n\cdot\ln^2(3n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2-2n+1\right)\cdot x^{3n}}{8^n}$.

9) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^{4n}$.

10) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2-2n+2\right)x^{3n}$.

11) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}\cdot(x-2)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3n^2-n+2\right)x^{3n}$.

12) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^3+6}\cdot(x+2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n^2+n+1\right)\cdot x^n}{4^n}$.

13) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(9n+8)\cdot 6^n\cdot(x+5)^n}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(2n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

14) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n+3)\cdot(x+1)^n}{\left(n^2+1\right)\cdot\sqrt[3]{\ln(4n)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x-2)^n}{(n+1)\cdot(n+2)}$.

15) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot e^{-\sqrt{n}}\cdot(x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x-1)^n}{(n+2)\cdot n}$.

16) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4+n\cdot 3^n}{2^n+n^2}\cdot(x+2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n^2+3n-4\right)\cdot x^{2n}}{9^n}$.

17) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^n}{(6n-5)\cdot\sqrt{\ln(4n+3)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)x^n$.

18) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{4}{\sqrt{n+1}}\right)}{(n+1)!}\cdot(x-2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2-3n+1\right)\cdot x^{2n}$.

19) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{8n^2+5n+10}{8n^2+3n+2}\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot(x+2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(2n^2-n+3\right)\cdot x^n}{3^n}$.

20) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot\ln\left(\dfrac{n^2+7}{n^2+3n+4}\right)\cdot(x+2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n^2-5n+4}$.

21) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(n+4)}{5^n\cdot(n+1)!}\cdot(x-2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n^2-1}$.

22) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{2}{n}\right)}{4n+5}\cdot(x-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x-2)^n}{(n-3n+2)\cdot 9^n}$.

23) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2^n\cdot(n+1)!}{(n+1)^n}\cdot(x+4)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-6n+8}$.

24) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(5n^2-3\right)\cdot e^{-n^3}\cdot(x+3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n^2-2n+6\right)\cdot x^{2n}}{4^n}$.

25) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2\cdot 9\cdot 16\cdot\ldots\cdot(7n-5)}{(3n+8)\cdot 4^n}\cdot(x+7)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+n-1\right)x^{3n}$.

26) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2n^2+3n+5}{4n+10}\cdot(x-5)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^n}{n^2-7n+10}$.

27) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n}\cdot 2^n}{(2n)!!}(x-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(n^2+n-2\right)x^{2n}}{4^n}$.

28) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\cos\dfrac{2}{n+1}\right)\cdot(x+4)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(n^2-2n+3\right)\cdot x^{3n}}{27^n}$.

29) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n}\cdot 2^n}{(2n)!!}\cdot(x-8)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n-1}}{4n^2-1}$.

30) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{5^n+n^2}{10^n+3n}\cdot(x+1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)\cdot(2n+1)}$.

Задание 8

Даны функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$.

1. Разложите функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ в ряд Маклорена.

2. Разложите функции $f_3(x)$, $f_4(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точек x_1, x_2 соответственно, укажите область сходимости полученных рядов.

3. Используя полученные в п. **1** разложения:

1) представьте значение A в виде суммы сходящегося числового ряда и найдите приближенное значение этого числа с точностью 10^{-2};

2) вычислите интеграл I с указанной точностью;

3) найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} f_5(x)$, если он существует.

Варианты

1)–6) $f(x)=x^2$, $g(x)=e^{-x}$, $h(x)=\sin x$, $k(x)=\text{ch}x$.

1) $f_1(x)=k(f(x))$, $f_2(x)=f(g(x))$, $f_3(x)=f(h(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{1-k(x)+h(f(x))}{g(f(x))-1+f(2x)}$, $x_1=\dfrac{3\pi}{2}$, $x_2=1$, $A=k(1)$, $I=\int\limits_0^{0,2} g(f(x))dx$.

2) $f_1(x)=g(f(x))$, $f_2(x)=h(f(x))$, $f_3(x)=g(x+1)$, $f_4(x)=f(h(x))$,

$f_5(x)=\dfrac{x\cdot h(x)-k(x)+1}{x\cdot g(x)-x-f(x)}$, $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{\pi}{2}$, $A=g(-1)$,

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{k(f(x))}{f(x)}dx$.

3) $f_1(x)=f(h(x))$, $f_2(x)=f(g(2x))$, $f_3(x)=g(f(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x-1)}$,

$f_5(x)=\dfrac{1-k(f(x))+h(f(x))-f(x)}{g(f(x))-1+f(x)}$, $x_1=1$, $x_2=0$, $A=h(1)$,

$I=\int\limits_0^{0,2} \dfrac{g(f(x))-1}{f(x)}dx$.

4) $f_1(x)=g(f(2x))$, $f_2(x)=f(k(x))$, $f_3(x)=f(h(3x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{x\cdot h(2x)-k(2x)+1}{f(x)\cdot g(f(x))-f(x)}$, $x_1=\dfrac{\pi}{3}$, $x_2=2$, $A=g(1)$,

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{k(f(2x))}{f(2x)}dx$.

5) $f_1(x)=f(h(2x))$, $f_2(x)=f(g(3x))$, $f_3(x)=h(3x)$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{k(x)-1}{k(6x)-1-h(f(3x))}$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=-2$, $A=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

$$I=\int_0^{0,5} k(f(x))dx.$$

6) $f_1(x)=f(k(2x)),\ f_2(x)=\dfrac{1}{f(x+2)},\ f_3(x)=f(h(2x)),\ f_4(x)=f(g(2x)),$

$$f_5(x)=\frac{2g(x)-2+2x}{k(2x)-1},\ x_1=-\frac{\pi}{4},\ x_2=-1,\ A=g(2),\ I=\int_0^1 h(f(2x))dx.$$

7)–12) $f(x)=x^2,\ g(x)=\cos x,\ h(x)=\mathrm{sh}x,\ k(x)=\sqrt[3]{1+x}.$

7) $f_1(x)=g(f(x)),\ f_2(x)=k(f(x)),\ f_3(x)=f(g(x)),\ f_4(x)=k(x),$

$$f_5(x)=\frac{g(x)-1+2f(x)}{f(2x)-h(f(x))},\ x_1=-\frac{\pi}{4},\ x_2=7,\ A=h(1),\ I=\int_0^1 \frac{1}{k(f(x))}dx.$$

8) $f_1(x)=f(h(x)),\ f_2(x)=f(k(x)),\ f_3(x)=f(g(x)),\ f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)},$

$$f_5(x)=\frac{h(f(x))-g(f(x))+1}{k(f(x))-1},\ x_1=\pi,\ x_2=3,\ A=g(1),\ I=\int_0^1 h(f(x))dx.$$

9) $f_1(x)=h(f(2x)),\ f_2(x)=k(f(2x)),\ f_3(x)=g(3x),\ f_4(x)=\dfrac{1}{f(x+1)},$

$$f_5(x)=\frac{h(f(x))-g(f(x))+1}{k(f(x))-1},\ x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=-3,\ A=k\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$I=\int_0^{0,1} \frac{1}{k(f(2x))}dx.$$

10) $f_1(x)=k(f(x)),\ f_2(x)=f(h(x)),\ f_3(x)=f(g(x)),\ f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)},$

$$f_5(x)=\frac{g(x)-1+2f(x)}{3f(x)-4h(f(x))},\ x_1=-\frac{3\pi}{4},\ x_2=4,\ A=h(2),\ I=\int_0^1 g(f(x))dx.$$

11) $f_1(x)=f(g(2x)),\ f_2(x)=k(f(3x)),\ f_3(x)=f(h(2x)),\ f_4(x)=f(f(g(x))),$

$$f_5(x)=\frac{1-g(f(x))}{k(f(f(x)))-1},\ x_1=0,\ x_2=\frac{\pi}{2},\ A=g(2),\ I=\int_0^1 \frac{1-g(f(x))}{f(x)}dx.$$

12) $f_1(x) = f(f(g(x)))$, $f_2(x) = h(f(2x))$, $f_3(x) = f(g(x))$,

$$f_4(x) = \frac{1}{f(x+2)},$$

$$f_5(x) = \frac{1-k(f(x))}{g(x)-1},\ x_1 = -\frac{5\pi}{4},\ x_2 = -1,\ A = k\left(\frac{1}{3}\right),\ I = \int_0^{0,25} \frac{h(f(x))}{f(x)}\,dx.$$

13)–18) $f(x) = e^x,\ g(x) = \ln(1+x),\ h(x) = x^3,\ k(x) = \arcsin x.$

13) $f_1(x) = g(f(x))$, $f_2(x) = k(f(x))$, $f_3(x) = f(2x)$, $f_4(x) = g(x)$,

$$f_5(x) = \frac{f(h(x)) - g(h(x)) - 1}{1 - f(h(x)) + k(h(x))},\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ A = g(1),\ I = \int_0^1 k(h(x))dx.$$

14) $f_1(x) = f(h(x))$, $f_2(x) = k(h(x))$, $f_3(x) = h(f(2x))$, $f_4(x) = \dfrac{1}{h(x)}$,

$$f_5(x) = \frac{g(h(x)) + k(x) - x}{h(3x)},\ x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ A = k\left(\frac{1}{2}\right),\ I = \int_0^{0,5} \frac{g(h(x))}{h(x)}\,dx.$$

15) $f_1(x) = g(h(2x))$, $f_2(x) = k(3x)$, $f_3(x) = h(f(3x))$, $f_4(x) = g(x)$,

$$f_5(x) = \frac{g(2x) - 2f(x) + 2}{f(x) - f(2x) + k(x)},\ x_1 = 9,\ x_2 = 3,\ A = g(2),\ I = \int_0^{0,5} \frac{k(h(x))}{h(x)}\,dx.$$

16) $f_1(x) = k(3x)$, $f_2(x) = g(h(x))$, $f_3(x) = h(f(-2x))$, $f_4(x) = \dfrac{1}{h(x+1)}$,

$$f_5(x) = \frac{f(h(x)) - g(h(x)) - 1}{1 - f(h(x)) + k(h(x))},\ x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ A = k\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$I = \int_0^1 \frac{f(h(x)) - 1}{h(x)}\,dx.$$

17) $f_1(x) = g(4x)$, $f_2(x) = f(h(x))$, $f_3(x) = h(f(2x))$, $f_4(x) = \dfrac{1}{h(x-1)}$,

$$f_5(x) = \frac{h(x) - g(h(x)) + \dfrac{h^2(x)}{2}}{k(h(x)) - h(x)},\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ A = f(1),$$

$$I=\int_0^1 \frac{h(x)-k(h(x))}{h(2x)}dx.$$

18) $f_1(x)=f(h(2x))$, $f_2(x)=g(h(-x))$, $f_3(x)=h(f(-x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{h(x-2)}$,

$f_5(x)=\dfrac{h(x)-k(x)+x}{g(x)-x+\dfrac{x^2}{2}}$, $x_1=-2$, $x_2=3$, $A=f(-1)$,

$$I=\int_0^1 \frac{h(f(2x))-1}{x}dx.$$

19)–24) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\mathrm{ch}x$, $k(x)=\arcsin x$.

19) $f_1(x)=f(h(x))$, $f_2(x)=f(f(g(x)))$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x+1)}$,

$f_5(x)=\dfrac{g(x)-x}{k(x)-x}$, $x_1=\dfrac{3\pi}{2}$, $x_2=0$, $A=h(1)$, $I=\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{k(f(x))}{f(x)}dx$.

20) $f_1(x)=g(f(f(x)))$, $f_2(x)=k(f(x))$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{h(f(x))-1}{g(f(f(x)))}$, $x_1=-\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=3$, $A=k\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $I=\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{k(3x)-1}{3x}dx$.

21) $f_1(x)=h(f(x))$, $f_2(x)=k(f(2x))$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{g(f(x))+h(x)-1}{k(f(x))}$, $x_1=\dfrac{3\pi}{4}$, $x_2=3$, $A=k\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $I=\displaystyle\int_0^1\frac{k(f(2x))}{f(x)}dx$.

22) $f_1(x)=h(f(3x))$, $f_2(x)=k(f(f(x)))$, $f_3(x)=f(f(g(x)))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{h(f(x))-g(f(f(x)))-1}{k(f(f(x)))}$, $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=2$, $A=g(1)$,

$$I=\int_0^1 \frac{h(f(x))-1}{f(x)}dx.$$

23) $f_1(x)=h(f(2x))$, $f_2(x)=h(4x)$, $f_3(x)=f(f(g(x)))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{h(2x)-h(3x)+k(f(x))}{g(f(2x))}$, $x_1=\dfrac{3\pi}{2}$, $x_2=-1$, $A=h(2)$,

$I=\int\limits_0^{0,5} g(f(2x))dx$.

24) $f_1(x)=h(f(-x))$, $f_2(x)=k\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f_3(x)=f(f(g(x)))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,

$f_5(x)=\dfrac{h(2x)-h(x)-2g(f(x))}{h(3x)-1}$, $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=-2$, $A=k\left(\dfrac{1}{4}\right)$,

$I=\int\limits_0^{0,5} g(f(3x))dx$.

25)–30) $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=\ln(1+x)$, $k(x)=\mathrm{sh}x$.

25) $f_1(x)=g(f(2x))$, $f_2(x)=h(f(f(x)))$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=h(x)$,

$f_5(x)=\dfrac{g(2x)-g(3x)}{h(f(x))}$, $x_1=-\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=-1$, $A=g(1)$, $I=\int\limits_0^1 \dfrac{h(f(x))}{f(x)}dx$.

26) $f_1(x)=g(f(3x))$, $f_2(x)=h\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=\dfrac{1}{f(x-2)}$,

$f_5(x)=\dfrac{k(f(x))-k(f(2x))}{g(f(x))-1+h(f(x))}$, $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=0$, $A=g(2)$,

$I=\int\limits_0^{0,5} k(f(x))dx$.

27) $f_1(x)=k(f(2x))$, $f_2(x)=f(f(g(x)))$, $f_3(x)=f(g(x))$,

$f_4(x)=\dfrac{1}{f(x+2)}$, $f_5(x)=\dfrac{g(4x)+2g(x)-3}{h(f(x))-3k(f(x))}$, $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=0$, $A=h(1)$,

$I=\int\limits_0^{0,25} g(f(x))dx$.

28) $f_1(x)=k(f(3x))$, $f_2(x)=f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, $f_3(x)=f(f(g(x)))$,

$f_4(x)=h\left(-\frac{x}{2}\right)$, $f_5(x)=\frac{h(f(x))+2g(f(x))-2}{2k(f(x))+f(g(x))-1}$, $x_1=\frac{3\pi}{2}$, $x_2=0$,

$A=h(2)$, $I=\int_0^{0,5} g(f(f(x)))dx$.

29) $f_1(x)=h\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, $f_2(x)=f(k(x))$, $f_3(x)=f(g(x))$, $f_4(x)=\frac{1}{f(x+4)}$,

$f_5(x)=\frac{3k(x)+k(f(x))-3x}{g(f(x))+h(f(x))-1}$, $x_1=\pi$, $x_2=-1$, $A=k(1)$,

$I=\int_0^{0,25} k(f(f(x)))dx$.

30) $f_1(x)=h\left(f\left(\frac{x}{3}\right)\right)$, $f_2(x)=f(k(2x))$, $f_3(x)=h\left(\frac{x}{3}\right)$, $f_4(x)=\frac{1}{f(x+3)}$,

$f_5(x)=\frac{f(g(2x))+h(f(x))-1}{k(f(x))}$, $x_1=0$, $x_2=1$, $A=k(2)$,

$I=\int_0^{0,5} \frac{h(f(f(x)))}{f(x)}dx$.

Задание 9

Функция $f(x)$ задана графически.

1. Постройте разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена:

а) на полном периоде; **б)** на полупериоде и является четной; **в)** на полупериоде и является нечетной.

Для функции из **а)** непосредственным нахождением запишите комплексную форму ряда Фурье.

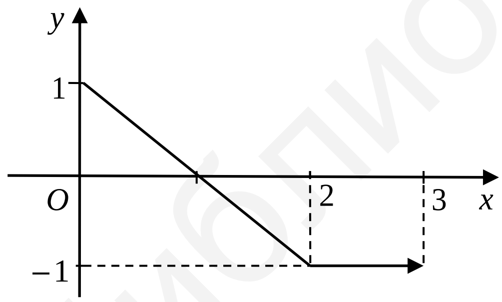
В каждом из случаев **а)–в)** постройте графики функции и суммы ряда Фурье.

2. Используя полученное в **1а)** разложение функции в действительный ряд Фурье, найдите:

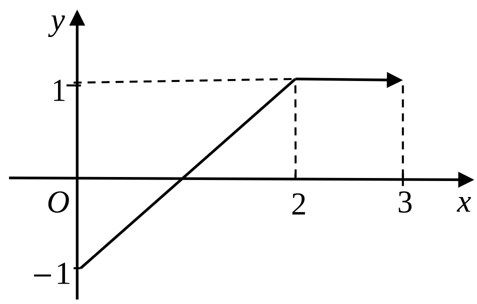
а) амплитуду A_5 и фазу φ_5; **б)** комплексную форму ряда Фурье.

Варианты

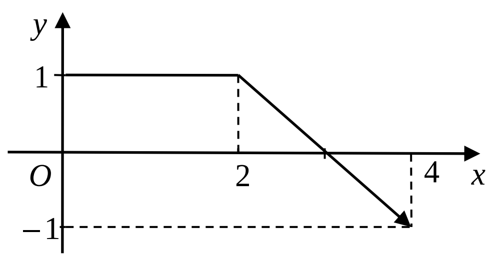
1) $n = 4$



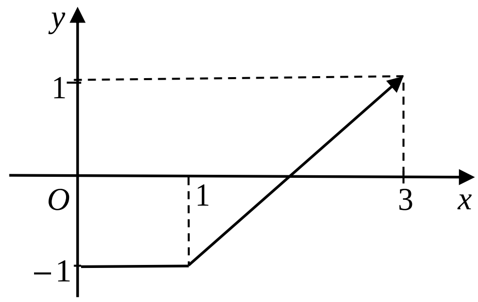
2) $n = 3$



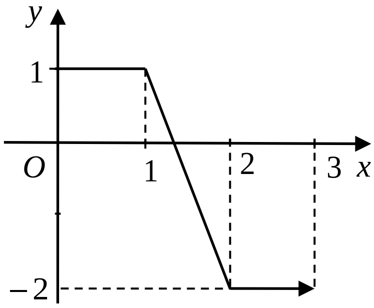
3) $n = 5$



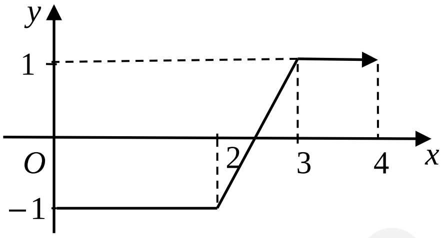
4) $n = 6$



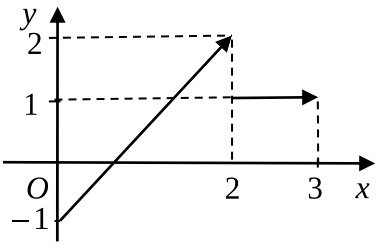
5) $n=7$



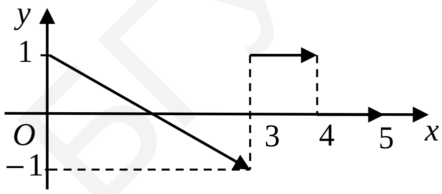
6) $n=8$



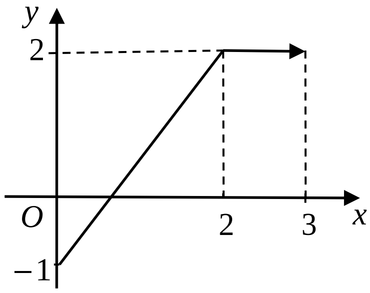
7) $n=9$



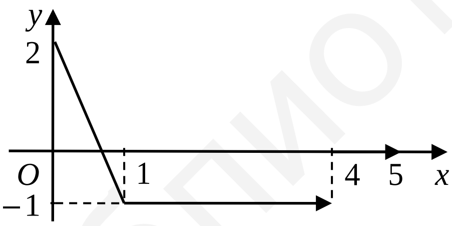
8) $n=3$



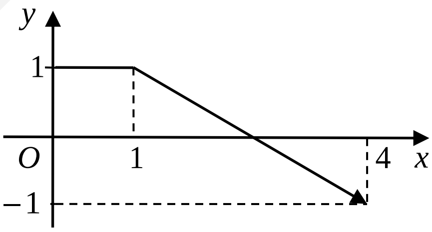
10) $n=5$



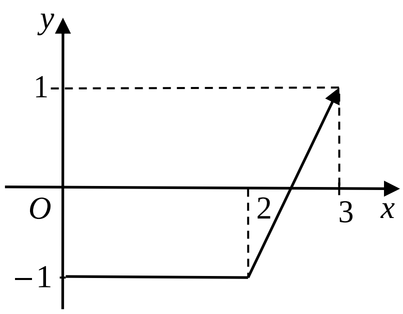
9) $n=4$



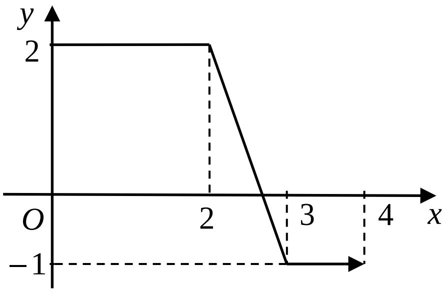
11) $n=6$



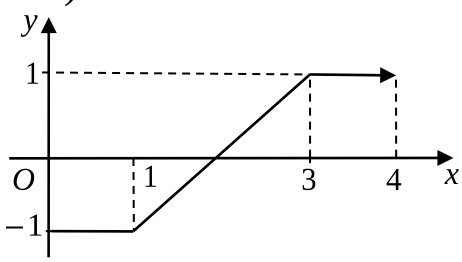
12) $n=7$



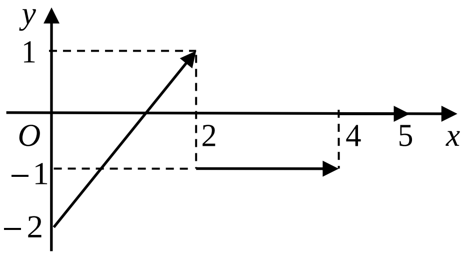
13) $n = 8$



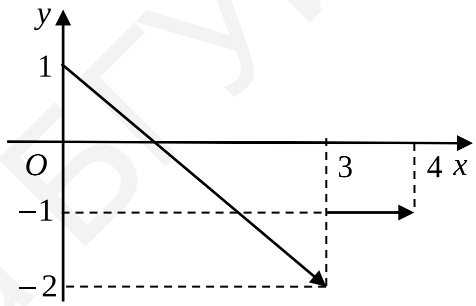
14) $n = 9$



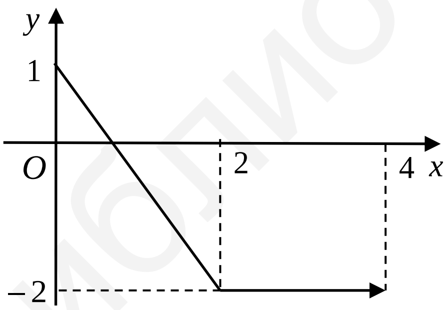
15) $n = 3$



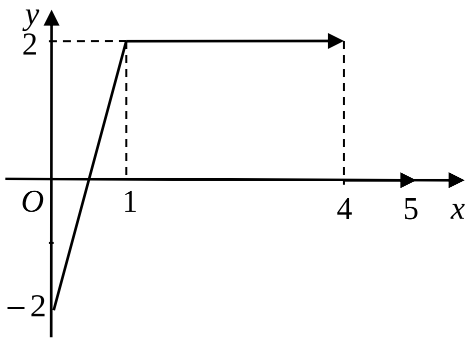
16) $n = 4$



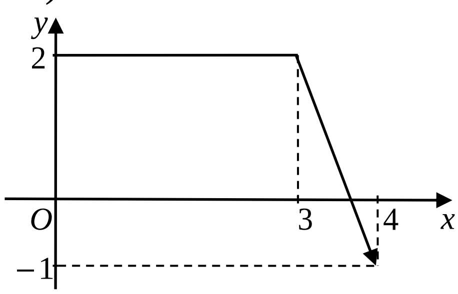
17) $n = 5$



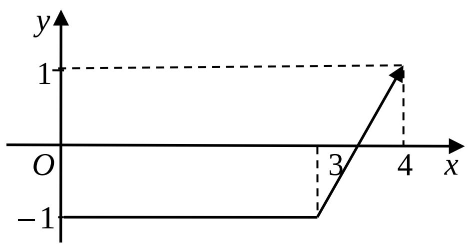
18) $n = 6$



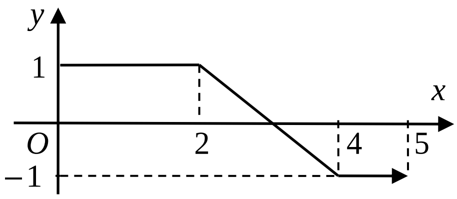
19) $n = 7$



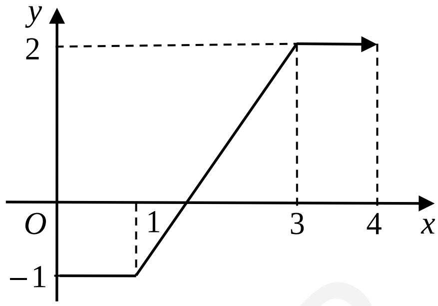
20) $n = 8$



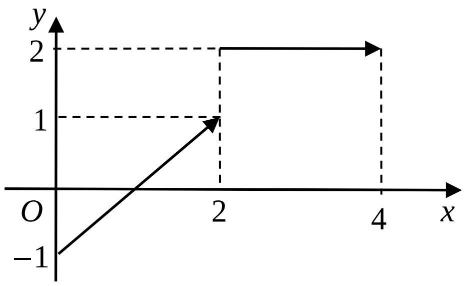
21) $n = 9$



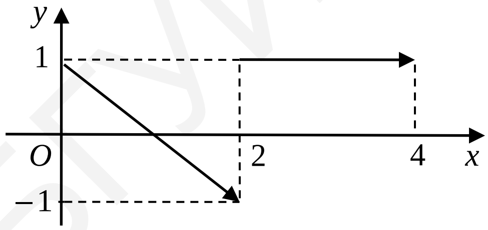
22) $n = 2$



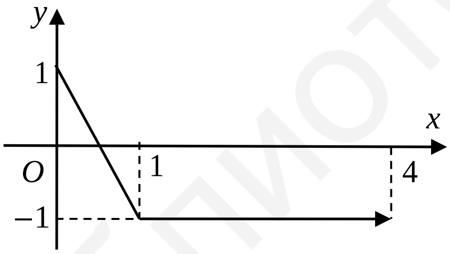
23) $n = 3$



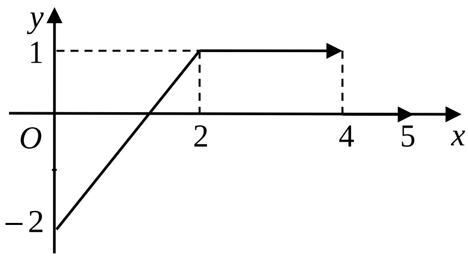
24) $n = 4$



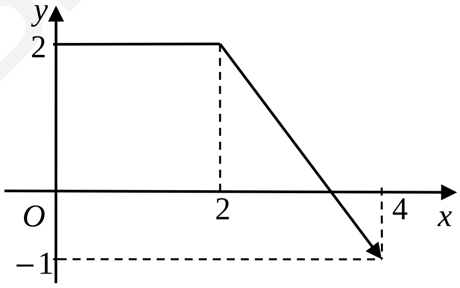
25) $n = 5$



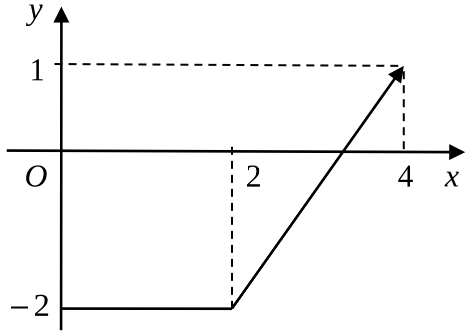
26) $n = 6$



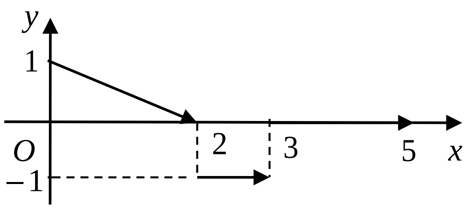
27) $n = 7$



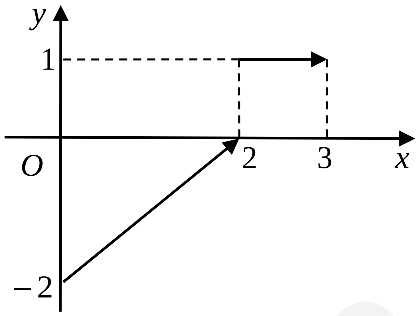
28) $n = 8$



29) $n = 9$



30) $n = 2$



2.2. Образцы решений заданий по теме «Числовые и функциональные ряды»

Задание 1

Найдите сумму данного ряда (если он сходится) или докажите расходимость этого ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^2-8n-15}$. **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)^n \cdot \arccos\dfrac{1}{2^n}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n+5\right)$. **г)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Решение

а) По определению, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\right)$ называется сходящимся, а число S – его суммой, если существует конечный предел S последовательности $\left(S_n\right)$ частичных сумм этого ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равен бесконечности или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся.

Представим n-й член $a_n = \dfrac{1}{16n^2-8n-15}$ данного ряда в виде суммы простейших дробей.

Поскольку квадратный трехчлен $16n^2-8n-15$ можно разложить на множители

$$16n^2-8n-15 = 16\left(n-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(n+\frac{3}{4}\right) = (4n-5)\cdot(4n+3),$$

то для a_n справедливо представление

$$a_n=\frac{1}{16n^2-8n-15}=\frac{1}{(4n-5)\cdot(4n+3)}=\frac{A}{4n-5}+\frac{B}{4n+3}=$$

$$=\frac{A(4n+3)+B(4n-5)}{(4n-5)\cdot(4n+3)}=\frac{n(4A+4B)+(3A-5B)}{(4n-5)\cdot(4n+3)}.$$

Отсюда

$$n(4A+4B)+(3A-5B)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}4A+4B=0,\\3A-5B=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=-A,\\3A+5A=1.\end{cases}$$

Значит, $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$.

Следовательно, $a_n=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4n+3}$.

Составим n-ю частичную сумму S_n данного ряда:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4k-5}-\frac{1}{4k+3}\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k-5}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{4n-5}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{4n-5}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right).$$

Найдем предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{12}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{12}$, то данный ряд сходится к сумме $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{12}$.

Ответ: ряд сходится и $S=-\frac{1}{12}$.

б) Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)^n \cdot \arccos\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \arccos\frac{1}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n-1}\right)^n \cdot \arccos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n-1}{5}}\right)^{\frac{3n-1}{5}}\right)^{\frac{5n}{3n-1}} \cdot \arccos 0 =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{3n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{e^{\frac{5}{3}} \cdot \pi}{2} = \frac{\sqrt[3]{e^5} \cdot \pi}{2}.$$

Используем достаточное условие расходимости числового ряда: так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

в) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n + 5\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n-5)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n-5)\right)}{\sqrt{n^2+2n}+(n-5)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2-(n-5)^2}{\sqrt{n^2+2n}+n-5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-\left(n^2-10n+25\right)}{n\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\cdot\left(1-\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{12n-25}{n\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\cdot\left(1-\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(12-\frac{25}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1-\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{25}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1-\frac{5}{n}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то в соответствии с достаточным условием расходимости данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

г) Представим n-й член $a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \ge 2$, данного ряда в виде:

$$a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n.$$

Найдем n-ю частичную сумму S_n рассматриваемого ряда:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln k = (\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln n) +$$
$$+ (\ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln n + \ln(n+1) + \ln(n+2)) -$$
$$- 2(\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln n + \ln(n+1)) = -\ln 2 + \ln(n+2) - \ln(n+1) =$$
$$= -\ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+1}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(-\ln 2) + \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= -\ln 2 + \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\ln 2$, то данный ряд сходится к сумме $S = -\ln 2$.

Ответ: ряд сходится, $S = -\ln 2$.

Задание 2

Из множества данных рядов выберите сходящиеся и расходящиеся. Обоснуйте свой выбор ссылками на соответствующие классы эталонных рядов и известные свойства рядов.

а) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{-3}{\sqrt[6]{n^5}}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2}\right)^n$; **в)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2^n - 6^{n-1}}{3^n}$.

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{7n\sqrt{n}}{n^{\frac{11}{2}}}$; **д*)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\log_2 6 - 2\sqrt{\log_2 3}}\right)^n$.

Решение

а) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$, который является обобщенным гармоническим рядом с n-м членом $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$. Поскольку $\alpha = \dfrac{5}{6} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$ расходится.

Так как в силу свойств рядов:

1) умножение ряда на число, отличное от нуля, не меняет характера его сходимости, то ряд $(-3)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ тоже расходится;

2) добавление (или удаление) конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), то исходный ряд $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{-3}{\sqrt[6]{n^5}}$, полученный из расходящегося ряда $(-3)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$ удалением первых девяти членов, остается расходящимся.

Ответ: ряд расходится.

б) Очевидно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)^n$ составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6} < 1$. Это условие обеспечивает сходимость исходного ряда.

Ответ: ряд сходится.

в) Запишем n-й член $a_n = \dfrac{2^n - 6^{n-1}}{3^n}$ ряда в виде

$$a_n = \frac{2^n - 6^{n-1}}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{6^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 2^n .$$

Числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ и $\left(-\dfrac{1}{6}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ составлены из членов геометрических прогрессий со знаменателями $q_1 = \dfrac{2}{3} < 1$ и $q_2 = 2 > 1$ соответственно. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ сходится, а ряд $\left(-\dfrac{1}{6}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ расходится.

Поскольку алгебраическая сумма сходящегося и расходящегося рядов есть ряд расходящийся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{6}\cdot 2^n\right)$ расходится. Вместе с ним расходится и исходный ряд, полученный из него удалением двух первых членов.

Ответ: ряд расходится.

г) Преобразуем n-й член $a_n = \dfrac{7n\sqrt{n}}{n^{\frac{11}{2}}}$ данного ряда следующим образом:

$$a_n = \frac{7\cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{11}{2}}} = \frac{7}{n^4} .$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ сходится как обобщенный гармонический ряд $(\alpha = 4 > 1)$. Следовательно, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{7}{n^4}$ также сходится, поскольку получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ в результате операций умножения на 7 и удаления первого члена, которые сохраняют сходимость ряда.

Ответ: ряд сходится.

д*) Упростим выражение $\sqrt{\log_2 6 - 2\sqrt{\log_2 3}}$, выделяя под корнем квадрат разности двух чисел:

$$\sqrt{\log_2(2\cdot 3) - 2\sqrt{\log_2 3}} = \sqrt{\log_2 2 + \log_2 3 - 2\sqrt{\log_2 3}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\log_2 3}\right)^2 - 2\sqrt{\log_2 3} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{\log_2 3} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{\log_2 3} - 1\right| = \sqrt{\log_2 3} - 1.$$

Тогда n-й член ряда $a_n = \left(\sqrt{\log_2 6 - 2\sqrt{\log_2 3}}\right)^n = \left(\sqrt{\log_2 3} - 1\right)^n = q^n$, при этом $0 < q = \sqrt{\log_2 3} - 1 < 1$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\log_2 3} - 1\right)^n$, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \sqrt{\log_2 3} - 1 < 1$, сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задание 3

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ укажите такой эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для которого $a_n \sim C\cdot b_n$ при $n \to \infty$ $\left(a_n, b_n \in \mathbb{R}, C > 0\right)$, и сделайте вывод о сходимости исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{3\cdot 5^n + 2\cdot 7^n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{13n - 7}{2n^2 + \sqrt{n^2 + 4}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{13n - 7}{2n^2 \cdot \sqrt{n^2 + 4}}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1} + \sqrt[4]{n^3} + \cos\frac{\pi}{n}}{1 + 6 + 11 + \ldots + (5n - 4)}$;

д*) $-2, \dfrac{5}{12}, \dfrac{12}{33}, \dfrac{19}{64}, \ldots$.

Решение

Будем использовать признак сравнения рядов в предельной (эквивалентной) форме. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакоположительные ряды $(a_n, b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N})$. Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C,\ 0 < C < \infty$, $\quad (\Leftrightarrow\ a_n \sim C \cdot b_n,\ \ n \to \infty)$, то эти ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

а) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n}$ с эталонным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$, который является сходящимся рядом, составленным из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{4}{7} < 1$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^n}{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n} : \left(\frac{4}{7}\right)^n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 7^n}{\left(3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n\right) \cdot 4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{7^n \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 2 \right)} = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

Значит, $a_n \sim \frac{1}{2} b_n$ при $n \to \infty$ и по признаку сравнения данный ряд сходится вместе с эталонным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

Ответ: ряд сходится.

б) Сравним данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{13n-7}{2n^2+\sqrt{n^2+4}}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который является расходящимся.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(13n-7)\cdot n}{2n^2+\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(13-\frac{7}{n}\right)}{n^2\cdot\left(2+\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)} = \frac{13}{2} \neq 0.$$

Поэтому $a_n \sim \dfrac{13}{2} b_n$ при $n\to\infty$ и данный ряд расходится, как и гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Ответ: ряд расходится.

в) Выберем для сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{13n-7}{2n^2\cdot\sqrt{n^2+4}}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который является сходящимся как обобщенный гармонический ряд $(\alpha = 2 > 1)$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(13n-7)\cdot n^2}{2n^2\cdot\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(13-\frac{7}{n}\right)}{n^3\cdot 2\cdot\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = \frac{13}{2} \neq 0.$$

Следовательно, $a_n \sim \frac{13}{2} b_n$ при $n \to \infty$ и по признаку сравнения данный ряд сходится вместе с эталонным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ответ: ряд сходится.

г) Заметим, что выражение $1+6+11+\ldots+(5n-4)$ является суммой членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 5$.

Найдем эту сумму по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

$$1+6+11+\ldots+(5n-4) = 1+(1+5)+(1+5\cdot 2)+\ldots+(1+5\cdot(n-1)) = S_n =$$
$$= \frac{1+5n-4}{2} \cdot n = \frac{n\cdot(5n-3)}{2}.$$

Тогда n-й член a_n данного ряда примет вид

$$a_n = \frac{\sqrt{4n+1} + \sqrt[4]{n^3} + \cos\frac{\pi}{n}}{\frac{n\cdot(5n-3)}{2}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{4n+1} + \sqrt[4]{n^3} + \cos\frac{\pi}{n}\right)}{n\cdot(5n-3)} = \frac{x_n}{y_n}.$$

Поскольку при $n \to \infty$ $\cos\frac{\pi}{n} \to 1$, то $x_n \sim 2\cdot n^{\frac{3}{4}}$, $y_n \sim 5\cdot n^2$, а значит,

$$a_n = \frac{x_n}{y_n} \sim \frac{2n^{\frac{3}{4}}}{5n^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{5}\cdot b_n.$$

Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ – сходящийся обобщенный гармонический ряд $\left(\alpha = \frac{5}{4} > 1\right)$. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Ответ: ряд сходится.

д*) Определим формулу n-го члена a_n данного ряда.

Числители дробей $-2, 5, 12, 19, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = -2$, разностью $d = 7$, n-м членом $a_n = -2 + 7(n-1)$. Знаменатели дробей $1, 12, 33, 64, \ldots$ представляют собой произведение двух множителей $1 \cdot 1,\ 2 \cdot 6,\ 3 \cdot 11,\ 4 \cdot 16, \ldots$, первые из которых являются последовательными натуральными числами, вторые – последовательными членами арифметической прогрессии с первым членом $A_1 = 1$, разностью $D = 5$, n-м членом $A_n = 1 + 5(n-1)$.

Поэтому n-й член a_n данного ряда имеет вид

$$a_n = \frac{-2+7(n-1)}{n \cdot (1+5(n-1))} = \frac{7n-9}{n \cdot (5n-4)} \sim \frac{7n}{5n^2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{n} = \frac{7}{5} b_n .$$

Таким образом, $a_n \sim \frac{7}{5} b_n$ при $n \to \infty$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходящийся гармонический ряд. Следовательно, по признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задание 4

Исследуйте сходимость знакоположительного ряда, применив для этого подходящий признак сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{3^n+4n+5}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 1}{\sqrt[7]{n^6} \cdot \left(\sin^2 n + 5\right)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right) \cdot \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2n^3-1}}{3n+5}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^{4n} \frac{\pi}{3n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{7^n \cdot (2n)!!}$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+8}{\left(n^2+2\right)\cdot\ln(4n+5)}$; **з)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n^2+7\right)\cdot e^{-n^3}$.

Решение

а) Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)}{3^n+4n+5}$ воспользуемся признаком сравнения рядов. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакоположительные ряды и выполнено неравенство $0<a_n\le b_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то из сходимости мажорирующего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Составим для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорирующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, предварительно преобразовав n-й член данного ряда:

$$a_n = \frac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)}{3^n+4n+5} = \frac{1+\cos n\pi}{3^n+4n+5} = \frac{1+(-1)^n}{3^n\left(1+\dfrac{4n}{3^n}+\dfrac{5}{3^n}\right)} < \frac{2}{3^n} = b_n.$$

Поскольку мажорирующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$ сходится как ряд, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{3}<1$, то по признаку сравнения сходится и данный ряд.

Ответ: ряд сходится.

б) Оценим снизу n-й член $b_n = \dfrac{\ln n+1}{\sqrt[7]{n^6}\cdot\left(\sin^2 n+5\right)}$ данного ряда:

$$b_n = \frac{\ln n + 1}{\sqrt[7]{n^6} \cdot \left(\sin^2 n + 5\right)} > \frac{1}{6 \cdot n^{\frac{6}{7}}} = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{7}}}$ получен из расходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{7}}}$ $\left(\alpha = \frac{6}{7} < 1\right)$ в результате его умножения на $\frac{1}{6}$ (что сохраняет его расходимость), то по признаку сравнения и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

Ответ: ряд расходится.

в) Выделим главную часть последовательности n-х членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$a_n = \left(e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right) \cdot \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2n^3 - 1}}{3n + 5}, \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, то для $\alpha = \frac{2}{\sqrt{n}}$ получаем $e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$. Учитывая, что $\operatorname{arctg}\sqrt{2n^3 - 1} \sim \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{arctg}\sqrt{2n^3 - 1} = \frac{\pi}{2}$, и $\frac{1}{3n + 5} \sim \frac{1}{3n}$ при $n \to \infty$, имеем

$$a_n = \left(e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right) \cdot \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2n^3 - 1}}{3n + 5} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3n} = \frac{\pi}{3n\sqrt{n}} = b_n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\pi}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ получен умножением на $\frac{\pi}{3}$ сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$, а значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

сходится, то в силу признака сравнения в эквивалентной форме исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Ответ: ряд сходится.

г) Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \arcsin^{4n} \dfrac{\pi}{3n}$, исходя из структуры a_n, целесообразно применить радикальный признак Коши. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $0 \le q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \arcsin^{4n} \frac{\pi}{3n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \arcsin^4 \frac{\pi}{3n}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin^4 \dfrac{\pi}{3n} = \left(\arcsin \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{3n} \right) \right)^4 = \arcsin^4 0 = 0$.

Для нахождения $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$ используем замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \right)^2 = 1$.

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin^4 \dfrac{\pi}{3n} = 1 \cdot 0 = 0 < 1$.

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Коши.

Ответ: ряд сходится.

д) Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \cdot \left(\dfrac{3n+2}{3n-1} \right)^{n^2}$ также удобно применить радикальный признак Коши, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ легко вычисляется.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n-1}{3}}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right)^{\frac{3n}{3n-1}}=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{3n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{3-\frac{1}{n}}}=\frac{e}{2}>1.$$

Значит, в соответствии с признаком Коши данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

е) Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера: пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – знакоположительный ряд. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $0\le q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ ряд расходится.

Целесообразность применения признака Даламбера к данному ряду объясняется тем, что a_{n+1} можно представить в виде

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)(4(n+1)-3)}{7^{n+1}\cdot(2(n+1))!!}=\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)(4n+1)}{7^{n+1}\cdot(2n)!!(2n+2)}=$$

$$=\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{7^n\cdot(2n)!!}\cdot\frac{4n+1}{7\cdot(2n+2)}=a_n\cdot\frac{4n+1}{7\cdot(2n+2)},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ легко вычисляется.

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot\frac{4n+1}{7\cdot(2n+2)}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{14n+14}=\frac{2}{7}<1.$$

Следовательно, в соответствии с признаком Даламбера исследуемый ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

ж) Воспользуемся интегральным признаком Коши. Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной неотрицательной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$, для которой $a_n = f(n)$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Обозначим $b_n = \dfrac{3n+8}{(n^2+2)\cdot\ln(4n+5)}$.

Поскольку (в силу сложности вычисления соответствующего несобственного интеграла) применить интегральный признак Коши непосредственно к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ не удается, построим такой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $n_0 \in \mathbb{N}$, который удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $b_n \sim C \cdot a_n$ при $n \to \infty$;

2) к ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $n_0 \in \mathbb{N}$, можно применить интегральный признак Коши.

Так как $3n+8 \sim 3n$, $n^2+2 \sim n^2$, $\ln(4n+5) \sim \ln n$ при $n \to \infty$, то

$$b_n = \frac{3n+8}{(n^2+2)\cdot\ln(4n+5)} \sim \frac{3n}{n^2 \cdot \ln n} = \frac{3}{n \cdot \ln n} = 3a_n,\ n \to \infty.$$

Таким образом, построен ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n}$, для исследования сходимости которого можно использовать интегральный признак Коши.

Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$, $x\in[2;+\infty)$. Функция $f(x)$ является непрерывной положительной и монотонно убывающей на промежутке $[2;+\infty)$.

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\cdot\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln x)\right)\Big|_{2}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)=+\infty.$$

Расходимость несобственного интеграла в соответствии с интегральным признаком Коши означает также расходимость построенного нами числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n}$.

Тогда числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$, связанный с рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ условием $b_n\sim 3\cdot a_n$ при $n\to\infty$, в силу признака сравнения тоже расходится.

Поскольку добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), то исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+8}{(n^2+2)\cdot\ln(4n+5)}$, полученный из расходящегося ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ добавлением первого члена, остается расходящимся.

Ответ: ряд расходится.

з) Аналогично тому, как мы действовали при решении задачи **ж)**, для данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ составим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, к которому удобно применить интегральный признак Коши:

$$b_n=(2n^2+7)\cdot e^{-n^3}\sim 2n^2e^{-n^3}=a_n,\ n\to\infty.$$

Для исследования сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot e^{-n^3}$ применим интегральный признак Коши. Положим $f(x) = 2x^2 e^{-x^3}$, $x \in [1;+\infty)$. Покажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям интегрального признака.

Функция $f(x)$ непрерывна и положительна на промежутке $[1;+\infty)$. Исследуем монотонность функции $f(x)$ с помощью производной.

$$f'(x) = \left(2x^2 e^{-x^3}\right)' = \left(2x^2\right)' \cdot e^{-x^3} + 2x^2 \cdot \left(e^{-x^3}\right)' =$$

$$= 4xe^{-x^3} + 2x^2 \cdot \left(-3x^2\right) \cdot e^{-x^3} = e^{-x^3} \cdot 2x \cdot \left(2 - 3x^3\right).$$

$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};+\infty\right)$. Значит, функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty) \subset \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};+\infty\right)$.

Таким образом, для функции $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ выполнены условия интегрального признака.

Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} 2x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{2}{3} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} e^{-x^3} d\left(-x^3\right) = -\frac{2}{3} \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-x^3}\right)\Big|_1^b =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^{b^3}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{3e} < +\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} 2x^2 e^{-x^3} dx$ сходится. Поэтому по интегральному признаку сходится также и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot e^{-n^3}$.

Как было показано выше, $b_n = \left(2n^2+7\right)\cdot e^{-n^3} \sim 2n^2 e^{-n^3} = a_n,\ n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot e^{-n^3}$ сходится, тогда по признаку сравнения данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n+7\right)\cdot e^{-n^3}$ тоже сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задание 5

Исследуйте сходимость знакочередующегося ряда. Для сходящегося ряда укажите характер сходимости. Оцените абсолютную величину n-го остатка ряда и найдите его сумму с точностью $0{,}01$ в случае его абсолютной сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \ln \dfrac{15n+8}{15n-7}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{\ln n}{n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)^n}{n! \cdot 5^n}$.

Решение

а) Для данного знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$|a_n| = n \cdot \ln \frac{15n+8}{15n-7} = n \cdot \ln\left(1 + \frac{15}{15n-7}\right) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{15}{15n-7}\right) \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{15}{15n-7}\right).$$

Для вычисления последнего предела воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$, из которого следует, что $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, и значит, $\ln\left(1 + \dfrac{15}{15n-7}\right) \sim \dfrac{15}{15n-7}$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{15}{15n-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{15n}{n\cdot(15n-7)} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

В силу достаточного условия расходимости числового ряда отсюда следует расходимость данного ряда.

Ответ: ряд расходится.

б) Проверим сначала, является ли исследуемый ряд абсолютно сходящимся. Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln n}{n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ и исследуем его сходимость.

Так как $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln 2}{n}$ для любого $n \geq 2$ и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln 2}{n} = \ln 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический ряд, умноженный на константу $\ln 2$, то в силу признака сравнения числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ тоже расходится.

Значит, данный ряд не является абсолютно сходящимся.

Проверим, сходится ли данный ряд условно.

Воспользуемся признаком Лейбница: если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n,\ u_n \geq 0,\ n\in\mathbb{N}$, удовлетворяют двум условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает (т. е. $u_n > u_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$), то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ сходится. При этом абсолютная величина n-го остатка удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq u_{n+1}$.

Убедимся, что условия признака Лейбница выполняются для членов $u_n = \frac{\ln n}{n}$ данного ряда.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$. Для его вычисления воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. Выполнено первое условие признака Лейбница.

Покажем, что последовательность $\{u_n\}$, $u_n=\frac{\ln n}{n}$, монотонно убывает.

Составим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\geq 2$ и исследуем ее монотонность с помощью производной.

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e.$$

Значит, функция $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ монотонно убывает на промежутке $(e;+\infty)$ и, следовательно, на $[3;+\infty)$. Отсюда получаем, что последовательность $\{u_n\}$, $u_n=\frac{\ln n}{n}$, монотонно убывает при $n\geq 3$. Выполнено второе условие признака Лейбница.

Таким образом, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln n}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Отсюда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln n}{n}$, полученный из него добавлением одного члена, тоже сходится.

Как показано выше, сходимость этого ряда не является абсолютной. Значит, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln n}{n}$ сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

в) По-прежнему первым этапом решения является проверка абсолютной сходимости ряда. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^n}{n!\cdot 5^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!\cdot 5^n}$.

Наличие факториалов подсказывает, что к этому ряду удобно применить признак Даламбера.

Так как $u_n=\frac{(n+1)^n}{n!\cdot 5^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!\cdot 5^{n+1}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+1}\cdot n!\cdot 5^n}{(n+1)!\cdot 5^{n+1}\cdot(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n\cdot(n+2)\cdot n!\cdot 5^n}{n!\cdot(n+1)\cdot 5^n\cdot 5\cdot(n+1)^n}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n=\frac{1}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 1\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=\frac{e}{5}<1.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!\cdot 5^n}$ из модулей сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Найдем сумму S данного ряда с точностью $0{,}01$.

Известно, что $S=S_n+r_n$, где S_n – n-я частичная сумма ряда, r_n – n-й остаток. Из признака Лейбница следует, что для остатка r_n справедливо неравенство $|r_n|\le u_{n+1}$, которое в нашем случае примет вид $|r_n|\le\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!\cdot 5^{n+1}}$.

Если мы найдем наименьший номер n_0, при котором $u_{n_0+1}\le\varepsilon$, тогда тем более и для остатка r_{n_0} выполняется неравенство $\left|r_{n_0}\right|=\left|S-S_{n_0}\right|\le u_{n_0+1}\le\varepsilon$. Это означает, что частичная сумма S_{n_0} приближает сумму ряда S с заданной точностью (т. е. $S \approx S_{n_0}$).

Так как $u_1 = \dfrac{2}{5} > \dfrac{1}{100}$, $u_2 = \dfrac{3^2}{2!\cdot 5^2} = \dfrac{18}{100} > \dfrac{1}{100}$, $u_3 = \dfrac{4^3}{3!\cdot 5^3} \approx \dfrac{85}{1000} > \dfrac{1}{100}$,

$u_4 = \dfrac{5^4}{4!\cdot 5^4} = \dfrac{42}{1000} > \dfrac{1}{100}$, $u_5 = \dfrac{6^5}{5!\cdot 5^5} \approx \dfrac{21}{1000} > \dfrac{1}{100}$, $u_6 = \dfrac{7^6}{6!\cdot 5^6} \approx \dfrac{105}{10000} > \dfrac{1}{100}$,

$u_7 = \dfrac{8^7}{7!\cdot 5^7} \approx \dfrac{5}{1000} < \varepsilon$,

то неравенство $u_{n+1} = \dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!\cdot 5^{n+1}} < \dfrac{1}{100}$ выполняется при $n \geq 6$, т. е. $n_0 = 6$.

Значит,

$$S \approx S_6 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 = \frac{2}{1!\cdot 5} - \frac{3^2}{2!\cdot 5^2} + \frac{4^3}{3!\cdot 5^3} - \frac{5^4}{4!\cdot 5^4} + \frac{6^5}{5!\cdot 5^5} - \frac{7^6}{6!\cdot 5^6} \approx$$

$$\approx \frac{4}{10} - \frac{18}{100} + \frac{85}{1000} - \frac{42}{1000} + \frac{21}{1000} - \frac{1}{100} = \frac{274}{1000} \approx \frac{27}{100}.$$

Ответ: ряд сходится абсолютно; $S \approx 0{,}27$.

Задание 6

1. Для каждого из данных функциональных рядов найдите область его сходимости.

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$; **б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+4)\cdot(1-\sin 4x)^n}$; **в)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n\cdot\sqrt{1+n^2\cdot x^2}}$; **д)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}$; **е)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{x}{n^2}$.

2. Докажите по определению равномерную сходимость ряда **в)** на множестве $\mathrm{X} = (-\infty; +\infty)$ и ряда **г)** на отрезке $\mathrm{X} = [0; 2]$. Начиная с какого натурального значения n модуль n-го остатка $r_n(x)$ не превосходит $\varepsilon = 10^{-3}$ для всех $x \in X$ одновременно?

3. Докажите равномерную сходимость ряда **д)** на отрезке $\left[\frac{1}{\ln 3};\frac{1}{\ln 2}\right]$, используя признак Вейерштрасса. Составьте числовую мажоранту для ряда на этом отрезке и обоснуйте ее сходимость. Покажите, что данный ряд допускает почленное интегрирование на $\left[\frac{1}{\ln 3};\frac{1}{\ln 2}\right]$, и напишите полученный при этом ряд.

4. Выясните, можно ли к ряду **е)** применить теорему о почленном дифференцировании на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. В случае положительного ответа найдите производную суммы этого ряда на указанном отрезке.

Решение

а) 1. Члены исследуемого ряда $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ определены при всех $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

Если $x = 0$, то получаем числовой ряд, составленный из нулей, который сходится к нулю.

Пусть $0 < |x| < 1$. Рассмотрим ряд из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и исследуем его сходимость при фиксированном $0 < |x| < 1$.

Выделим главную часть $n-x$ членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $a_n(x) = \frac{|x|^n}{1-x^n}$. Учитывая, что при $0 < |x| < 1$ имеем $1 - x^n \sim 1$ при $n \to \infty$, получим

$$a_n(x)=\frac{|x|^n}{1-x^n}\sim|x|^n=b_n(x),\ n\to\infty.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=|x|<1$, сходится, то в соответствии с признаком сравнения в эквивалентной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится при $0<|x|<1$.

Следовательно, рассматриваемый ряд абсолютно сходится для всех $0<|x|<1$.

Пусть теперь $|x|>1$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}=-1.$$

Поскольку при фиксированном x: $|x|>1$, выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)\neq 0$, то в силу достаточного условия расходимости данный ряд расходится при всех $|x|>1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости исследуемого ряда является интервал $(-1;1)$.

Ответ: область абсолютной сходимости – $(-1;1)$.

б) 1. Члены данного ряда $u_n(x)=\dfrac{2n+3}{(n^2+4)\cdot(1-\sin 4x)^n}$ определены при всех x, удовлетворяющих условию $1-\sin 4x\neq 0$, т. е. $\sin 4x\neq 1 \Leftrightarrow 4x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Поскольку $1-\sin 4x>0$ при любом $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, исследуемый ряд является знакоположительным при фиксированном $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Исходя из структуры $u_n(x)$, для исследования его сходимости целесообразно применить радикальный признак Коши.

Найдем при фиксированном $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n+3}{\left(n^2+4\right)\cdot(1-\sin 4x)^n}}=\frac{1}{1-\sin 4x}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+\frac{3}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{1-\sin 4x}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{3}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{1+\frac{4}{n^2}}}=\frac{1}{1-\sin 4x}.$$

Данный ряд абсолютно сходится при $\frac{1}{1-\sin 4x}<1$, т. е. $1-\sin 4x>1\Leftrightarrow\sin 4x<0\Leftrightarrow-\pi+2\pi n<4x<2\pi n,\ n\in Z\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$$

При $x\notin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$, ряд расходится.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Подставив значение $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, в данный ряд, получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{\left(n^2+4\right)\cdot(1-\sin(-\pi+2\pi n))^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+4}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Выделим главную часть n-го члена a_n, $n\to\infty$:

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+4} = \frac{2+\frac{3}{n}}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} \sim \frac{2}{n} = b_n .$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ получен из расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ в результате операции умножения на число 2, которая сохраняет его расходимость, то по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится. Следовательно, точка $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$, не входит в область сходимости рассматриваемого ряда.

При $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$, получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{\left(n^2+4\right)\cdot\left(1-\sin 2\pi n\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

который, как показано выше, расходится. Значит, точка $x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$, не входит в область сходимости данного ряда.

Таким образом, исследуемый ряд абсолютно сходится при $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z$.

Ответ: область абсолютной сходимости – $\left\{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2}\right) : n \in Z\right\}$.

в) 1. Члены данного ряда $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}$ определены для любого $x \in \mathbb{R}$.

Проверим, является ли рассматриваемый ряд абсолютно сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$. Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}$ и применим к нему признак сравнения.

Поскольку

$\frac{1}{\sqrt[4]{n^2+x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ при $n \to \infty$ и любом $x \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$, то по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^2+x^2}}$ расходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, рассматриваемый ряд не является абсолютно сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$.

Выясним, сходится ли данный ряд условно для любого $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся признаком Лейбница.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)|$ при любом $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^2+x^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[4]{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Первое условие признака Лейбница выполняется.

Покажем, что последовательность $\{|u_n(x)|\}$ монотонно убывает при любом $x \in \mathbb{R}$.

Составим функцию $f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^2+x^2}}$, $t \geq 1$. Исследуем ее монотонность с помощью производной.

$$f'(t) = \left(\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\right)' = -\frac{1}{4}\cdot\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 2t = -\frac{t}{2\sqrt[4]{\left(t^2+x^2\right)^5}}.$$

Поскольку $f'(t)<0$ при $t \geq 1$, то функция $f(t)$ убывает на промежутке $[1;+\infty)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Значит, последовательность $\{|u_n(x)|\}$ убывает для каждого $x \in \mathbb{R}$. Второе условие признака Лейбница выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Лейбница для любого $x \in \mathbb{R}$.

Учитывая, что рассматриваемый ряд не является абсолютно сходящимся при $\forall x \in \mathbb{R}$, получаем его условную сходимость на $\mathbb{R}$.

2. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X к функции $S(x)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от $x \in X$, такой, что при любом $n > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполнено неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \ (\Leftrightarrow |\, r_n(x)| < \varepsilon).$$

Поскольку данный ряд является знакочередующимся при любом $x \in \mathbb{R}$, то по признаку Лейбница модуль n-го остатка $r_n(x)$ не превосходит $|u_{n+1}(x)|$, т. е. $|\, r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$.

Тогда

$$|\, r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^2 + x^2}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$ из условия $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, получим $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Возьмем в качестве $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$. Тогда для любого $n>N(\varepsilon)$ и всех $x\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, и, значит, $|r_n(x)|<\varepsilon$, что означает равномерную сходимость данного ряда для любого $x\in\mathbb{R}$.

При $\varepsilon=10^{-3}$ номер $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{10^{-6}}\right]=10^6$. Значит, при $n>10^6$ для любого $x\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $|r_n(x)|<10^{-3}$.

Ответ: область сходимости – $\mathbb{R}$.

г) 1. Члены данного ряда $u_n(x)=\frac{x}{3^n\cdot\sqrt{1+n^2\cdot x^2}}$ определены для любого $x\in\mathbb{R}$.

Выясним, является ли исследуемый ряд абсолютно сходящимся при $\forall x\in\mathbb{R}$.

При $x=0$ получим ряд, составленный из нулей, который сходится к нулю.

Пусть $x\neq 0$. Для ряда из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{3^n\cdot\sqrt{1+n^2\cdot x^2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{3^n\cdot\sqrt{1+n^2\cdot x^2}}$$

применим признак сравнения. Оценим сверху $|u_n(x)|$ для любого $x\neq 0$, получим

$$|u_n(x)|=\left|\frac{x}{3^n\cdot\sqrt{1+n^2\cdot x^2}}\right|<\frac{|x|}{3^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{3}<1$, сходится, то и ряд $|x|\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$, $\forall x\neq 0$, полученный из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ в результате операции умножения на число $|x|$, $\forall x\neq 0$, тоже сходится. Значит, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при любом $x\neq 0$.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно при любом $x\in\mathbb{R}$.

2. Докажем по определению равномерную сходимость исследуемого ряда на отрезке $[0;2]$. Оценим сверху модуль n-го остатка $r_n(x)$ для любого $x\in[0;2]$.

$$|\,r_n(x)|=\left|\frac{x}{3^{n+1}\cdot\sqrt{1+(n+1)^2\cdot x^2}}+\frac{x}{3^{n+2}\cdot\sqrt{1+(n+2)^2\cdot x^2}}+\ldots\right|\leq$$

$$\leq\frac{|x|}{3^{n+1}\cdot\sqrt{1+(n+1)^2\cdot x^2}}+\frac{|x|}{3^{n+2}\cdot\sqrt{1+(n+2)^2\cdot x^2}}\leq\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+2}}+\ldots=$$

$$=\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^n},\ n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;2].$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$ из условия $\dfrac{1}{3^n}<\varepsilon$, т. е. $3^n>\dfrac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\log_3\dfrac{1}{\varepsilon}$.

В качестве номера $N(\varepsilon)$ можно взять натуральное число $\left[\log_3 \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда при $\forall n > N(\varepsilon)$ и каждого $x \in [0;2]$ выполнено неравенство $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, и, значит, $|r_n(x)| < \varepsilon$, что означает равномерную сходимость данного ряда на отрезке $x \in [0;2]$.

При $\varepsilon = 10^{-3}$ номер $N(\varepsilon) = \left[\log_3 \frac{1}{10^{-3}}\right] = [3 \cdot \log_3 10] = 6$.

Поэтому при $n > 6$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < 10^{-3}$ для всех $x \in [0;2]$.

Ответ: область абсолютной сходимости – $\mathbb{R}$.

д) 1. Члены данного ряда $u_n(x) = \frac{n \cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}$ определены для любого $x \neq 0$.

Поскольку $u_n(x) = \frac{n \cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2} > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и любом $x \neq 0$, то исследуемый ряд является знакоположительным при любом $x \neq 0$.

Исходя из внешнего вида n-го члена $u_n(x)$ данного ряда, для выяснения его сходимости используем радикальный признак Коши. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n \cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^2}} = e^{-\frac{1}{x}}.$$

При $e^{-\frac{1}{x}} < 1$, т. е. $-\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0$ данный ряд сходится абсолютно, при $x < 0$ – расходится.

3. Для доказательства равномерной сходимости исследуемого ряда на отрезке $\left[\frac{1}{\ln 3};\frac{1}{\ln 2}\right]$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. Если для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in X$, можно указать такой сходящийся знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in X$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \le a_n$, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

Оценим сверху для всех $n \in \mathbb{N}$ $|u_n(x)|$ на отрезке $\left[\frac{1}{\ln 3};\frac{1}{\ln 2}\right]$:

$$|u_n(x)| = u_n(x) = \frac{n \cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2} \le \frac{\ln^2 3 \cdot n}{2^n} = a_n.$$

Пусть $a_n = \frac{\ln^2 3 \cdot n}{2^n} = \ln^2 3 \cdot b_n$, $b_n = \frac{n}{2^n}$.

Так как $b_n = \frac{n}{2^n}$, $b_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку найденное значение $q = \frac{1}{2} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Даламбера. Отсюда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \ln^2 3 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ в результате умножения на число $\ln^2 3$, тоже сходится.

Значит, в соответствии признаком Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно на отрезке $\left[\dfrac{1}{\ln 3};\dfrac{1}{\ln 2}\right]$.

Для доказательства допустимости почленного интегрирования рассматриваемого ряда на отрезке $\left[\dfrac{1}{\ln 3};\dfrac{1}{\ln 2}\right]$ применим следующую теорему. Если функции $u_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, непрерывны на отрезке $[a;b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать на $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx.$$

Так как при любом $n\in\mathbb{N}$ функции $u_n(x)=\dfrac{n\cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}$ непрерывны на $\left[\dfrac{1}{\ln 3};\dfrac{1}{\ln 2}\right]$ и, как показано выше, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то данный ряд можно почленно интегрировать на нем:

$$\int\limits_{\frac{1}{\ln 3}}^{\frac{1}{\ln 2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{\ln 3}}^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{n\cdot e^{-\frac{n}{x}}}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{\ln 3}}^{\frac{1}{\ln 2}} e^{-\frac{n}{x}}d\left(-\frac{n}{x}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{n}{x}}\Bigg|_{\frac{1}{\ln 3}}^{\frac{1}{\ln 2}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n\ln 2}-e^{-n\ln 3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right).$$

Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, составленные из членов убывающих геометрических прогрессий с первыми членами $b_1 = \frac{1}{2}$ и $b_2 = \frac{1}{3}$ и со знаменателями $q_1 = \frac{1}{2}$ и $q_2 = \frac{1}{3}$ соответственно, сходятся.

Поскольку алгебраическая сумма сходящихся рядов есть ряд сходящийся, то полученный из данного ряда в результате почленного интегрирования ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{b_1}{1-q_1} - \frac{b_2}{1-q_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $(0;+\infty)$ – область абсолютной сходимости.

е) 1. Члены рассматриваемого ряда $u_n(x) = \arcsin \frac{x}{n^2}$ определены для любого x, удовлетворяющего условию $\left| \frac{x}{n^2} \right| \le 1,\ n \in \mathbb{N}$, т. е. $|x| \le n^2,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-1;1]$.

Для нахождения области абсолютной сходимости данного ряда составим ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \arcsin \frac{x}{n^2} \right|$ и применим к нему признак сравнения.

При $x = 0$ получим ряд из нулей, сходящийся к нулю.

Пусть $0<|x|\le 1$. Тогда $\left|\arcsin\frac{x}{n^2}\right|\sim\frac{|x|}{n^2}$ при $n\to\infty$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд $(\alpha=2>1)$, то числовой ряд $|x|\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ в результате умножения на число $|x|$, $x\neq 0$, тоже сходится. Следовательно, в соответствии с признаком сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится для любого $0<|x|\le 1$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится при любом $|x|\le 1$, и, значит, данный ряд сходится абсолютно для любого $x\in[-1;1]$.

4. Выясним, можно ли к исследуемому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ применить теорему о почленном дифференцировании на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Известно, что если функции $u_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$ дифференцируемы на $[a;b]$, функции $u_n'(x)$, $n\in\mathbb{N}$ непрерывны на $[a;b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c\in[a;b]$, следует его равномерная сходимость на всем отрезке $[a;b]$, при этом сумма $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$

и $$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Для любого $n\in\mathbb{N}$ функции $u_n(x)=\arcsin\frac{x}{n^2}$ дифференцируемы на $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Найдем $u_n'(x)$ для $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$u_n'(x)=\left(\arcsin\frac{x}{n^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{n^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^4}}}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n^4-x^2}}.$$

Функции $u_n'(x)=\frac{1}{\sqrt{n^4-x^2}}$, $n\in\mathbb{N}$, непрерывны на отрезке $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Оценим сверху $\left|u_n'(x)\right|$, $n\in\mathbb{N}$, для любого $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$$\left|u_n'(x)\right| = u_n'(x)=\frac{1}{\sqrt{n^4-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^4-\frac{1}{4}}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n^4-\frac{1}{4}}}\sim\frac{1}{n^2}$, $n\to\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд $(\alpha=2>1)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-\frac{1}{4}}}$ сходится по признаку сравнения в эквивалентной форме. Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Подставив значение $x=0$ в данный ряд, получим ряд, составленный из нулей, сумма которого равна нулю.

Следовательно, все условия теоремы о почленном дифференцировании ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ выполнены. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{x}{n^2}$ равномерно сходится на $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, его сумма $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{x}{n^2}$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-\frac{1}{x^2}}},\ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Ответ: $[-1;1]$ – область абсолютной сходимости.

Задание 7

1. Для каждого из данных степенных рядов найдите интервал и область сходимости.

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(x+5)^n}{n-\ln n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot(x-1)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^{2n}}{(n+1)\cdot 25^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n^2+3n+5\right)\cdot(3x)^{2n-1}$

2. Укажите наименьшее и наибольшее целые x из области сходимости рядов **а)–г)**.

3. Найдите суммы степенных рядов **в)–г)**, используя для этого операции почленного интегрирования и дифференцирования.

Решение

а) 1. Исследуемый ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+5)^n}{n - \ln n}$ является степенным рядом $\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$, где $c_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$, $n \geq 2$; $x_0 = -5$.

Вычислим радиус сходимости данного ряда по формуле $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

Так как $c_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$, то $c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1-\ln(n+1)}$. Учитывая, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, получим $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (n+1-\ln(n+1))}{(n - \ln n) \cdot (-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-\ln(n+1)}{n - \ln n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)}{n \cdot \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$ с радиусом сходимости R определяется неравенством $|x - x_0| < R$. В нашем случае $|x+5| < 1$, т. е. $-1 < x+5 < 1 \Leftrightarrow -6 < x < -4$. Значит, $(-6;-4)$ – интервал сходимости.

Исследуем поведение рассматриваемого ряда на концах интервала сходимости.

Подставив $x=-6$ в данный ряд, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-6+5)^n}{n-\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n-\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$.

Поскольку $\frac{1}{n-\ln n}=\frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}\sim\frac{1}{n}$, $n\to\infty$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический ряд, то в соответствии с признаком сравнения в эквивалентной форме числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ расходится. Значит, данный ряд расходится в точке $x=-6$.

При $x=-4$ получаем знакочередующийся числовой ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-4+5)^n}{n-\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot u_n,\ u_n=\frac{1}{n-\ln n},\ n\geq 2.$$

Проверим, выполняются ли для него условия признака Лейбница.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Первое условие признака Лейбница выполняется.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$, $x\geq 2$. Исследуем ее на монотонность с помощью производной. Найдем

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)'=-\frac{(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2}=-\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-x}{x(x-\ln x)^2}.$$

Поскольку $f'(x)<0$ при $x\in[2;+\infty)$, то функция $f(x)$ строго убывает на промежутке $[2;+\infty)$.

Следовательно, последовательность (u_n), $n\geq 2$, убывает, т. е. $u_n>u_{n+1}$, $\forall n\geq 2$. Второе условие тоже выполняется.

Таким образом, в соответствии с признаком Лейбница ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ сходится. Поэтому точка $x=-4$ принадлежит области сходимости данного ряда. Как показано выше, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$, составленный из модулей членов ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$, расходится. Следовательно, сходимость исследуемого функционального ряда в точке $x=-4$ является условной.

Таким образом, областью абсолютной сходимости ряда является интервал $(-6;-4)$, областью сходимости – промежуток $(-6;-4]$.

2. $x=-5$ – наименьшее, $x=-4$ – наибольшее целые из области сходимости ряда.

Ответ: $(-6;-4)$ – интервал сходимости, $(-6;-4]$ – область сходимости.

б) 1. Для нахождения интервала сходимости данного степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (x-1)^{n^2}$, некоторые коэффициенты которого равны нулю, воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot |x-1|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot |x-1|^{n}\right) =$$

$$= e \cdot \lim_{n\to\infty} |x-1|^n = q = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x-1|<1, \\ e & \text{при} \quad |x-1|=1, \\ +\infty & \text{при} \quad |x-1|>1. \end{cases}$$

Поскольку найденное значение $q=0<1$ при $|x-1|<1$, то исследуемый степенной ряд абсолютно сходится для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-1|<1$, т. е. $-1<|x-1|<1 \Leftrightarrow 0<x<2$. Следовательно, $(0;2)$ – интервал сходимости, $R=1$.

Так как $q>1$ при $|x-1|\geq 1$, то в соответствии с достаточным условием расходимости данный ряд расходится для любого x из условия $|x-1|\geq 1$, т. е. $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

2. Значение $x=1$ – единственное целое значение x из области сходимости рассматриваемого степенного ряда.

Ответ: $(0;2)$ – интервал сходимости, $(0;2)$ – область сходимости.

в) 1. Для данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^{2n}}{(n+1)\cdot 25^n}$ совершим замену $\left(\dfrac{x+2}{5}\right)^2=t$. В результате получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot t^n}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cdot t^n$, $c_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$, $n\geq 1$. Найдем интервал и область сходимости, сумму этого ряда.

Вычислим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cdot t^n$ по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Так как $c_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$, то $c_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n+2}$ и

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cdot t^n$ с радиусом сходимости $R=1$ имеет вид $|t|<1\Leftrightarrow t\in(-1;1)$.

Исследуем поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$ на концах интервала сходимости. Подставив значение $t=1$ в этот ряд, получим знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot u_n,\ u_n = \frac{1}{n+1}$.

Исследуем его сходимость с помощью признака Лейбница.

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Значит, первое условие выполняется.

Поскольку $u_n = \frac{1}{n+1}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}$, то $u_n > u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, второе условие также выполняется.

Таким образом, в соответствии с признаком Лейбница знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ сходится. Поэтому точка $t=1$ входит в область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, составленный из модулей членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Поскольку $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический ряд, то по признаку сравнения в эквивалентной форме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ сходится условно. Следовательно, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$ сходится условно в точке $t=1$.

Подставив в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$ значение $t=-1$, получим расходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Значит, точка $t=-1$ не входит в область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является промежуток $(-1;1]$, при этом областью абсолютной сходимости является интервал $(-1;1)$.

Пусть $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^n}{n+1}$, $t \in (-1;1]$. При $t=0$ имеем $S(0)=0$. Для нахождения суммы $S(t)$ ряда запишем его в виде

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^n}{n+1} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{t} \cdot S_1(t),$$

где $S_1(t)$ – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^{n+1}}{n+1}$ с радиусом сходимости $R=1$.

Поскольку степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$ с радиусом сходимости $R=1$ сходится равномерно на любом отрезке $[-r;r]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости $(-R;R)$, где $0<r<R$, то ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости и почленно интегрировать на отрезке $[0;t] \subset (-R;R)$. При этом полученные степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot t^n$.

Продифференцируем по переменной t обе части равенства $S_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^{n+1}}{n+1}$, $t \in (-1;1)$.

Получим $S_1'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot t^n,\ t\in(-1;1).$

Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot t^n=t-t^2+t^3-\ldots,$ составленного из членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=t$ и знаменателем $q=-t,\ |q|<1$. Тогда

$$S_1'(t)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{t}{1+t},\ t\in(-1;1).$$

Для нахождения суммы $S_1(t)$ проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке $[0;t]\subset(-1;1)$:

$$\int_0^t S_1'(y)dy=\int_0^t \frac{y}{1+y}dy\Leftrightarrow\int_0^t S_1'(y)dy=\int_0^t \frac{(y+1)-1}{y+1}dy\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_1(y)\Big|_0^t=\left(y-\ln|y+1|\right)\Big|_0^t\Leftrightarrow S_1(t)-S_1(0)=t-\ln|t+1|.$$

Поскольку $S_1(0)=0$, то $S_1(t)=t-\ln|t+1|=t-\ln(t+1),\ t\in(-1;1).$

Следовательно, сумма $S(t)$ равна

$$S(t)=\frac{1}{t}\cdot S_1(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{t},\ 0<|\,t\,|<1 \text{ и } S(0)=0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot t^n}{n+1}$ сходится в точке $t=1$, то в соответствии со второй теоремой Абеля его сумма $S(t)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, следовательно, $S(1)=1-\ln 2$.

Таким образом,

$$S(t)=\begin{cases}1-\dfrac{\ln(1+t)}{t}, & t\in(-1;0)\cup(0;1],\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 = t$, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^{2n}}{(n+1)\cdot 25^n}$ имеет интервал сходимости, определяемый неравенством $-1 < \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 5$, т. е. $x \in (-7;3)$; радиус сходимости $R = 5$; область сходимости

$$-1 < \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow |x+2| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x+2 \le 5, \text{ т. е. } x \in [-7;3];$$

сумму ряда

$$S(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\ln\left(1+\left(\dfrac{x+2}{5}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{x+2}{5}\right)^2}, & x \in [-7;-2) \cup (-2;3], \\ 0, & x = -2, \end{cases}$$

т. е.

$$S(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{25}{(x+2)^2}\ln\left(25+(x+2)^2\right) + \dfrac{25\ln 25}{(x+2)^2}, & x \in [-7;-2) \cup (-2;3], \\ 0, & x = -2. \end{cases}$$

Значение $x = -7$ – наименьшее, значение $x = 3$ – наибольшее целые значения x из области сходимости данного ряда.

Ответ: $(-7;3)$ – интервал сходимости; $[-7;3]$ – область сходимости; $S(x) = 1 - \dfrac{25}{(x+2)^2}\ln\left(25+(x+2)^2\right) + \dfrac{25\ln 25}{(x+2)^2}, \quad x \in [-7;-2) \cup (-2;3]$,

$S(-2) = 0$.

г) 1. Для данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n^2+3n+5\right)\cdot(3x)^{2n-1}$ совершим замену $3x=t$. Тогда получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n^2+3n+5\right)\cdot t^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$. Найдем интервал и область сходимости, сумму полученного ряда.

Для нахождения интервала сходимости ряда воспользуемся признаком Даламбера.

Так как $u_n(t)=\left(2n^2+3n+5\right)\cdot t^{2n-1}$,

$$u_{n+1}(t)=\left(2(n+1)^2+3(n+1)+5\right)\cdot t^{2(n+1)-1}=\left(2n^2+7n+10\right)\cdot t^{2n+1},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(2n^2+7n+10\right)\cdot t^{2n+1}}{\left(2n^2+3n+5\right)\cdot t^{2n-1}}\right|=t^2.$$

Степенной ряд сходится абсолютно при $t^2<1\Leftrightarrow|t|<1$, т. е. $t\in(-1;1)$. Значит, $(-1;1)$ – интервал сходимости, $R=1$ – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Подставляя $t=1$ в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n^2+3n+5\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2+3n+5\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)=+\infty$, то в соответствии с достаточным условием сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ расходится при $t=1$.

При $t=-1$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\cdot\left(2n^2+3n+5\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, который расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ расходится при $t=-1$.

Таким образом, областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ является интервал $(-1;1)$.

Пусть $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n^2+3n+5\right)\cdot t^{2n-1}$, $t\in(-1;1)$. При $t=0$ имеем $S(0)=0$.

Для нахождения суммы $S(t)$ запишем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ в виде

$$S(t)=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot t^{2n-1}+3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot t^{2n-1}+5\cdot\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}=$$
$$=2\cdot S_3(t)+3\cdot S_2(t)+5\cdot S_1(t),\quad t\in(-1;1),$$

где $S_1(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}$, $S_2(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot t^{2n-1}$, $S_3(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot t^{2n-1}$, $t\in(-1;1)$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}=t+t^3+t^5+\ldots$, $|t|<1$, составлен из членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=t$ и знаменателем $q=t^2<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}$ сходится к сумме $S_1(t)=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{t}{1-t^2}$, $t\in(-1;1)$.

Для нахождения суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot t^{2n-1}$, $t\in(-1;1)$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{2n}$, $t\in(-1;1)$, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = t^2$ и знаменателем $q = t^2 < 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{2n}$ сходится при $|t| < 1$ и его сумма равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{2n} = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $t \in (-1;1)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по переменной $t \in (-1;1)$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}\right)' = \left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)', \ t \in (-1;1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(t^{2n}\right)' = \left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)', \ t \in (-1;1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot t^{2n-1} = \frac{2t \cdot \left(1-t^2\right) - t^2 \cdot (-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}, \ t \in (-1;1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot t^{2n-1} = \frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2}, \ t \in (-1;1).$$

Значит, $S_2(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{2n-1} = \dfrac{t}{\left(1-t^2\right)^2}$, $t \in (-1;1)$.

Умножим обе части равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{2n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t}{\left(1-t^2\right)^2}$ на t, $|t| < 1$. Поскольку в результате умножения степенного ряда на число его интервал сходимости сохраняется, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{2n} = \frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2}, \ t \in (-1;1).$$

Для нахождения суммы $S_3(t)$ продифференцируем обе части последнего равенства в интервале сходимости $(-1;1)$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{2n}\right)' = \left(\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\right)', \ t \in (-1;1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot t^{2n-1} =$$

$$= \frac{2t \cdot \left(1-t^2\right)^2 - t^2 \cdot 2 \cdot \left(1-t^2\right) \cdot (-2t)}{\left(1-t^2\right)^4}, \ t \in (-1;1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot t^{2n-1} = \frac{2t+2t^3}{\left(1-t^2\right)^3}, \ t \in (-1;1).$$

Следовательно, $S_3(t) = \dfrac{t^3+t}{\left(1-t^2\right)^3}, \ t \in (-1;1).$

Таким образом, подставляя найденные значения сумм $S_1(t), S_2(t), S_3(t)$ в выражении для $S(t)$, получим

$$S(t) = 2 \cdot \frac{t^3+t}{\left(1-t^2\right)^3} + 3 \cdot \frac{t}{\left(1-t^2\right)^2} + 5 \cdot \frac{t}{1-t^2} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(t^3+t\right) + 3t\cdot\left(1-t^2\right) + 5t\cdot\left(1-t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^3} = \frac{5t^5-11t^3+10t}{\left(1-t^2\right)^3}, \quad t \in (-1;1).$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $3x = t$, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2n^2+3n+5\right)\cdot(3x)^{2n-1}$ имеет интервал сходимости, определяемый неравенством $|3x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3}$, т. е. $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$; радиус сходимости $R = \dfrac{1}{3}$, область сходимости – $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ и сумму ряда

$$S(x) = \frac{5(3x)^5 - 11(3x)^3 + 10\cdot 3x}{\left(1-(3x)^2\right)^3} = \frac{1215x^5 - 297x^3 + 30x}{\left(1-9x^2\right)^3}, \ x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Значение $x = 0$ – единственное целое x из области сходимости ряда.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ – интервал сходимости; $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ – область сходимости; $S(x) = \dfrac{1215x^5 - 297x^3 + 30x}{\left(1-9x^2\right)^3}, \ x \in \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right).$

Задание 8

Даны функции $f(x)=x^2,\ g(x)=e^{-x},\ h(x)=\sin x,\ k(x)=\ln(1+x)$.

1. Разложите функции $g(f(x)),\ h(f(x)),\ k(f(x)),\ f(h(x))$ в ряд Маклорена.

2. Разложите функции $\dfrac{1}{f(x+1)}$ и $f(h(x))$ в ряд Тейлора в окрестности точек $x_1=3$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ соответственно, укажите область сходимости полученных рядов.

3. Используя полученные в пункте **1** разложения:

1) представьте значение $g(2)$ в виде суммы сходящегося числового ряда и найдите его приближенное значение с точностью 10^{-2};

2) вычислите $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{k(f(x))}{f(x)}dx$ с точностью 10^{-2};

3) найдите предел $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(h(x))-k(f(x))}{g(f(x))+h(f(x))-1}$, если он существует.

Решение

1. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Заменяя в нем переменную x на $(-x^2)$, получим

$$g(f(x))=e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Поскольку разложение функции e^{x} справедливо для любого $x \in \mathbb{R}$, то и разложение функции $g(f(x)) = e^{-x^2}$ верно при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Запишем разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Для разложения функции $h(f(x)) = \sin(x^2)$ заменим в полученном разложении x на x^2:

$$h(f(x)) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Так как разложение функции $\sin x$ верно при любом $x \in \mathbb{R}$, то и разложение функции $h(f(x)) = \sin(x^2)$ справедливо для всех $\forall x \in \mathbb{R}$.

Для разложения функции $k(f(x)) = \ln(1 + x^2)$ в ряд Маклорена воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ x \in (-1;1].$$

Заменив в нем x на x^2, получим

$$k(f(x)) = \ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} (x^2)^n}{n} + \ldots =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n}.$$

Поскольку разложение функции $\ln(1+x)$ верно при любом $x \in (-1;1]$, то разложение функции $k(f(x)) = \ln(1 + x^2)$ имеет место при любом x, удовлетворяющем неравенству $-1 < x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le 1$, т. е. $x \in [-1;1]$.

Рассмотрим функцию $f\left(h(x)\right)=\sin^2 x$. Так как $\sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos 2x\right)$, воспользуемся разложением функции $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}.$$

Заменяя в нем x на $2x$, получим

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Тогда

$$f\left(h(x)\right)=\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$

$$=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\ldots-\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Поскольку разложение функции $\cos x$ справедливо для любого $x\in\mathbb{R}$, то и разложение функции $f\left(h(x)\right)=\sin^2 x$ верно при любом $x\in\mathbb{R}$.

2. Разложим функцию $\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1=3$.

Представим функцию $\frac{1}{f(x+1)}$ как $\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'$.

Преобразуем функцию $\frac{1}{x+1}$ к виду $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4+(x-3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}$.

Воспользуемся разложением функции $\dfrac{1}{x+1}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n,\ \ x\in(-1;1).$$

Заменив x на $\dfrac{x-3}{4}$, получим

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\dfrac{x-3}{4}+1}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x-3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-3)^n}{4^{n+1}}.$$

Так как разложение функции $\dfrac{1}{x+1}$ справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству $-1<x<1$, то разложение функции $\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{4}}$ имеет место для всех x, удовлетворяющих условию

$$-1<\frac{x-3}{4}<1\Leftrightarrow-4<x-3<4\Leftrightarrow-1<x<7,\ \text{т. е.}\ \ x\in(-1;7).$$

После почленного дифференцирования ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-3)^n}{4^{n+1}}$ в интервале сходимости $(-1;7)$ получим

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-3)^n}{4^{n+1}}\right)',\ x\in(-1;7)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n\cdot(x-3)^{n-1}}{4^{n+1}},\ x\in(-1;7).$$

Тогда

$$\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n\cdot(x-3)^{n-1}}{4^{n+1}},\ x\in(-1;7).$$

Исследуем поведение полученного ряда на концах интервала сходимости. Подставим $x=-1$ в этот ряд, получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n\cdot(-1-3)^{n-1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n\cdot(-1)^{n-1}\cdot 4^{n-1}}{4^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\cdot\frac{n}{16}=\frac{1}{16}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$, то в соответствии с достаточным признаком расходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ расходится. Поэтому ряд $\frac{1}{16}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$, полученный умножением расходящегося ряда на число $\frac{1}{16}$, тоже расходится.

Значит, точка $x=-1$ не входит в область сходимости полученного ряда.

При $x=7$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n\cdot(7-3)^{n-1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{16},$$

который расходится в силу достаточного условия расходимости ряда. Следовательно, точка $x=7$ не включается в область сходимости полученного ряда.

Таким образом,

$$\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n\cdot(x-3)^{n-1}}{4^{n+1}},\ x\in(-1;7).$$

Разложим теперь функцию $f(h(x))=\sin^2 x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Преобразуем функцию $f(h(x))$ следующим образом:

$$f(h(x))=\sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

Воспользуемся разложением функции $\cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Заменяя в нем x на $2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 - \frac{\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{2!} + \frac{\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{2^2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}.$$

Тогда

$$f(h(x)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{2^2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{2^4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - \frac{2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как разложение функции $\cos x$ имеет место при $\forall x \in \mathbb{R}$, то и разложение функции $f(h(x)) = \sin^2 x$ справедливо для любого $x \in \mathbb{R}$.

3. 1) Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Принимая в нем $x = -2$, получим представление числа $g(2) = e^{-2}$ в виде суммы числового ряда:

$$e^{-2} = 1 + (-2) + \frac{(-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-2)^n}{n!} + \ldots = 1 - 2 + \frac{2^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся рядом и сходится по признаку Лейбница. Поэтому для его остатка r_n справедливо неравенство $|r_n| \le u_{n+1}$, которое в нашем случае принимает вид $|r_n| \le \frac{2^n}{n!}$.

Найдем наименьший номер n_0, при котором $u_{n+1} \le \varepsilon$, тогда $\left|r_{n_0}\right| \le u_{n_0+1} \le \varepsilon$.

Так как

$$u_1 = 1 > \frac{1}{100}, \; u_2 = 2 > \frac{1}{100}, \; u_3 = \frac{2^2}{2!} = 2 > \frac{1}{100}, \; u_4 = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} > \frac{1}{100},$$

$$u_5 = \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} > \frac{1}{100}, \; u_6 = \frac{2^5}{5!} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15} > \frac{1}{100}, \; u_7 = \frac{2^6}{6!} = \frac{64}{720} = \frac{4}{45} > \frac{1}{100},$$

$$u_8 = \frac{2^7}{7!} = \frac{128}{5040} = \frac{8}{315} > \frac{1}{100}, \; u_9 = \frac{2^8}{8!} = \frac{256}{40320} \approx \frac{6}{1000} < \frac{1}{100},$$ то неравенство $\left|r_{n_0}\right| \le u_{n_0+1} \le \varepsilon$ выполняется при $n_0 = 8$.

Тогда $\left|r_{n_0}\right| = \left|S - S_{n_0}\right| \le u_{n_0+1} \le \varepsilon$, это означает, что сумма S_{n_0} приближает сумму S с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, т. е. $S \approx S_{n_0} = S_8$.

Следовательно,

$$e^{-2} \approx 1-2+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}-\frac{2^7}{7!}=$$

$$=1-2+2-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{15}+\frac{4}{45}-\frac{8}{315}\approx 1-1{,}333+0{,}667-0{,}267+0{,}089-0{,}025=$$

$$=0{,}131\approx 0{,}13.$$

2) Так как подынтегральная функция $\frac{k(f(x))}{f(x)}=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$ имеет первообразную, не выражающуюся через элементарные функции в конечном виде, то разложим функцию в ряд Маклорена.

Используя полученное в п. **1** разложение в ряд Маклорена функции $k(f(x))=\ln\left(1+x^2\right)$, запишем разложение подынтегральной функции

$$\frac{k(f(x))}{f(x)}=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{n}.$$

Полученный степенной ряд сходится при $x\in[-1;1]$. Интегрируя этот ряд почленно на отрезке $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\subset[-1;1]$, имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{k(f(x))}{f(x)}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{n}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n-2}dx\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\left.\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 2^3}+\frac{1}{15\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}+\ldots.$$

Последний ряд является сходящимся знакочередующимся числовым рядом. Найдем его сумму S с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

Известно, что $S = S_n + r_n$, где S_n – n-я частичная сумма, r_n – n-й остаток ряда. В соответствии с признаком Лейбница n-й остаток r_n удовлетворяет неравенству $|r_n| \le u_{n+1}$, которое для нашего ряда примет вид

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}.$$

Найдем наименьший номер n_0, при котором $u_{n_0+1} \le \varepsilon$, тогда $\left|r_{n_0}\right| = \left|S - S_{n_0}\right| \le u_{n_0+1} \le \varepsilon$, т. е. $S \approx S_{n_0}$ с заданной точностью.

Так как

$$u_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{100},\ u_2 = \frac{1}{6\cdot 2^3} = \frac{1}{48} \approx \frac{21}{1000} > \frac{1}{100},\ u_3 = \frac{1}{15\cdot 2^5} = \frac{1}{480} \approx \frac{2}{1000} < \varepsilon,$$

то неравенство $u_{n_0+1} = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} \le \varepsilon$ при $n \ge 2$, т. е. при $n_0 = 2$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} = S \approx u_1 - u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48} \approx 0{,}48.$$

Отсюда получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{k(f(x))}{f(x)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx \approx 0{,}48.$$

Ответ: $0{,}48$.

3) Для вычисления $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(h(x)) - k(f(x))}{g(f(x)) + h(f(x)) - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x^2} + \sin\left(x^2\right) - 1}$ воспользуемся полученными в п. **1** разложениями функций

$\sin^2 x,\ \ln\left(1+x^2\right),\ e^{-x^2},\ \sin\left(x^2\right)$ в ряд Маклорена, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x^2}+\sin\left(x^2\right)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\ldots\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots\right)}{\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)+\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots\right)-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4-\frac{13}{45}x^6+\ldots}{\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^6+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o\left(x^4\right)}{\frac{1}{2}x^4+o\left(x^4\right)}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 9

Функция $f(x)$ задана графически.

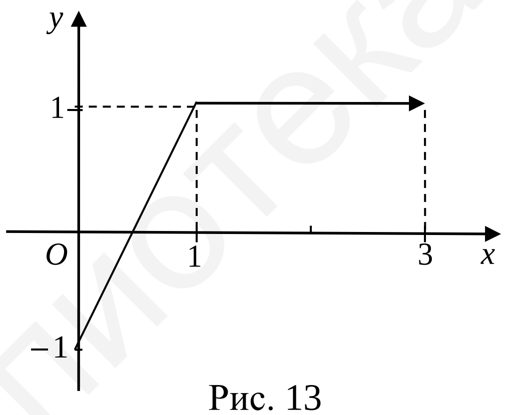


Рис. 13

1. Постройте разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена:

а) на полном периоде; **б)** на полупериоде и является четной; **в)** на полупериоде и является нечетной.

Для функции из **а)** непосредственным нахождением запишите комплексную форму ряда Фурье.

В каждом из случаев **а)–в)** постройте графики функции и суммы ряда Фурье.

2. Используя полученное в **1а)** разложение функции в действительный ряд Фурье, найдите:

а) амплитуду A_5 и фазу φ_5; **б)** комплексную форму ряда Фурье.

Решение

1. Зададим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $[0;3)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(0;-1)$ и $(1;1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Leftrightarrow\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)}\Leftrightarrow y=2x-1.$$

Тогда уравнение отрезка прямой с концами в этих точках примет вид $y=2x-1,\ x\in[0;1]$.

Значит, данная функция, заданная графиком на промежутке $[0;3)$, определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in[0;1],\\ 1\quad, & x\in[0;3).\end{cases}$$

а) Пусть функция $f(x)$ задана на полном периоде. Тогда $2l=3$, т. е. $l=\frac{3}{2}$.

Тригонометрический ряд Фурье $2l$-периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

коэффициенты $a_0,\ a_n,\ b_n$ которого находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\cdot\int_a^{a+2l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\cdot\int_a^{a+2l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\cdot\int_a^{a+2l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$.

Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты Фурье $a_0,\ a_n,\ b_n,\ n\in\mathbb{N}$.

$$a_0=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_a^{a+2l} f(x)dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\cdot\left(\int\limits_0^1 (2x-1)dx+\int\limits_1^3 dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{(2x-1)^2}{4}\Bigg|_0^1+x\Bigg|_1^3\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3-1\right)=\frac{4}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 f(x)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\int\limits_1^3 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{1}{n\pi}\left(\sin 2n\pi-\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$.

$$\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}dx=\left|\begin{array}{l} u=2x-1,\ \ du=2dx,\\ dv=\cos\frac{2n\pi x}{3}dx,\\ v=\int\cos\frac{2n\pi x}{3}dx=\frac{3}{2n\pi}\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2n\pi}\cdot(2x-1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_0^1-\frac{3}{n\pi}\cdot\int\limits_0^1 \sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2n\pi}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{2n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_0^1\right)=\frac{1}{n\pi}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right).$$

Окончательно получаем $a_n = \dfrac{3}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\dfrac{2n\pi}{3} - 1\right),\ \ n\in\mathbb{N}.$

$$b_n = \frac{1}{l}\cdot\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}dx + \int\limits_1^3 \sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}dx - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}dx - \frac{1}{n\pi}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Вычислим последний интеграл по частям.

$$\frac{2}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}dx = \left|\begin{array}{l} u = 2x-1,\ \ du = 2dx, \\ dv = \sin\dfrac{2n\pi x}{3}dx, \\ v = \displaystyle\int\sin\frac{2n\pi x}{3}dx = -\frac{3}{2n\pi}\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2n\pi}\cdot(2x-1)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\cdot\int\limits_0^1 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2n\pi}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+1\right) + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\cos\left(\frac{2n\pi}{3}+1\right) + \frac{3}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Тогда $b_n = \dfrac{3}{n^2\pi^2}\cdot\sin\dfrac{2n\pi}{3} - \dfrac{2}{n\pi},\ \ n\in\mathbb{N}.$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{3} + \left(\frac{3}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{2}{n\pi}\right)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{3}\right),$$

$x\in\mathbb{R}$.

Для нахождения суммы ряда Фурье воспользуемся теоремой Дирихле. Пусть $2l$-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[a;a+2l]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. функция является непрерывной на всем отрезке или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. функция является монотонной на всем отрезке либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция монотонна.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на отрезке $[a;a+2l]$ к функции $S(x)$, причем

1) $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции $f(x)$ значение суммы ряда Фурье равно $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$;

3) $S(a)=S(a+2l)=\dfrac{S(a+0)+S(a+2l-0)}{2}$.

Поскольку $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$, и учитывая периодичность функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье, получаем

$$S(x)=f(x),\ x\in(3k;3(k+1)),\ k\in Z.$$

В точках $x=3k,\ k\in Z$, сумма $S(x)$ ряда Фурье равна

$$S(3k)=\frac{f(3k+0)+f(3k-0)}{2}=\frac{f(+0)+f(3-0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

График функции $f(x)$ строится в соответствии с условием задачи (рис. 14). График суммы $S(x)$ ряда Фурье отличается от графика $f(x)$ только значениями в точках $x=3k$: $S(3k)=0,\ k\in Z$ (рис. 15).

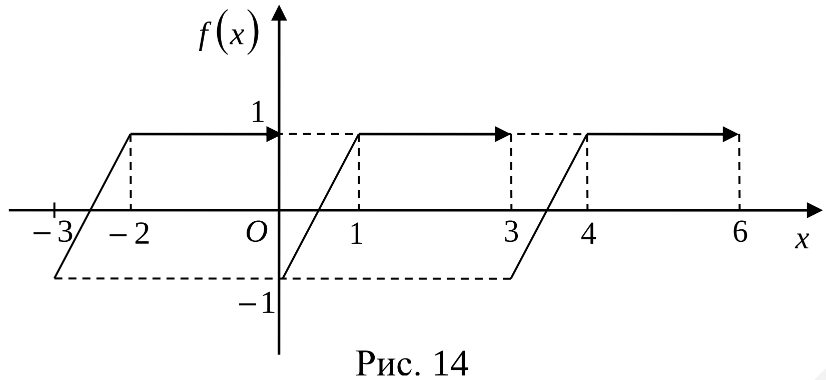


Рис. 14

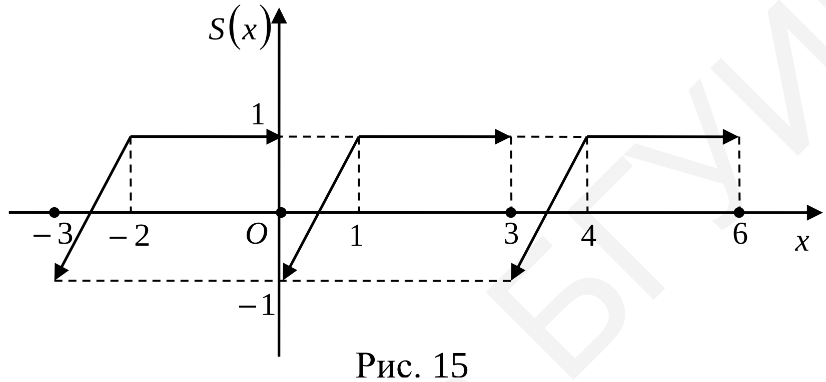


Рис. 15

Комплексная форма ряда Фурье $2l$-периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{i\frac{n\pi x}{l}},$$

коэффициенты c_n которой находятся по формуле

$$c_n = \frac{1}{2l} \cdot \int_a^{a+2l} f(x) \cdot e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx, \ n \in Z.$$

Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты $c_n, \ n \in Z$.

$$c_0 = \frac{1}{2l} \cdot \int_a^{a+2l} f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (2x-1)dx + \int_1^3 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(2x-1)^2}{4}\bigg|_0^1 + x \cdot \bigg|_1^3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3 - 1\right) = \frac{2}{3}.$$

Находим коэффициенты $c_n, \ n \neq 0, \ n \in Z$.

$$c_n=\frac{1}{2l}\cdot\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cdot e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx+\int\limits_1^3 e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx+\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{i2n\pi}\right)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx+\frac{i}{2n\pi}\cdot\left(e^{-i2n\pi}-e^{-i\frac{2n\pi}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx+\frac{i}{2n\pi}\cdot\left(1-e^{-i\frac{2n\pi}{3}}\right).$$

Вычислим последний интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx=\left|\begin{array}{l} u=2x-1,\ du=2dx, \\ dv=e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx, \\ v=\int e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx=\dfrac{3i}{2n\pi}\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3i}{2n\pi}\cdot(2x-1)\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}\Bigg|_0^1-\frac{3i}{n\pi}\cdot\int\limits_0^1 e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3i}{2n\pi}\cdot e^{-i\frac{2n\pi}{3}}+\frac{3i}{2n\pi}+\frac{9}{2n^2\pi^2}\cdot e^{-i\frac{2n\pi x}{3}}\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\cdot e^{-i\frac{2n\pi}{3}}+\frac{i}{2n\pi}+\frac{3}{2n^2\pi^2}\cdot\left(e^{-i\frac{2n\pi}{3}}-1\right).$$

Окончательно получаем

$$c_n=\frac{i}{n\pi}+\frac{3}{2n^2\pi^2}\cdot\left(e^{-i\frac{2n\pi}{3}}-1\right),\ n\in Z,\ n\neq 0\,.$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье функции $f(x)$ примет вид

$$f(x)\sim\frac{2}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{+\infty}\left(\frac{i}{n\pi}+\frac{3}{2n^2\pi^2}\cdot\left(e^{-i\frac{2n\pi}{3}}-1\right)\right)\cdot e^{i\frac{2n\pi x}{3}}.$$

б) Пусть функция $f(x)$ определена на полупериоде и является четной. Продолжим эту функцию четным образом на отрезок $[-3;0]$:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-3;-1],\\ -2x-1, & x\in[-1;0],\\ 2x-1, & x\in[0;1],\\ 1, & x\in[1;3].\end{cases}$$

Полученную функцию, заданную на отрезке $[-3;-3]$, периодически продолжим на всю числовую ось.

Ряд Фурье $2l$-периодической четной функции имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

коэффициенты a_0, a_n которого находятся по формуле

$$a_0=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)dx,\;\; a_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку в нашем случае период $T=6$, т. е. $2l=6,\ l=3$, то коэффициенты ряда Фурье будут иметь вид:

$$a_0=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^1(2x-1)dx+\int_1^3 dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{(2x-1)^2}{4}\right|_0^1+\left.x\right|_1^3\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3-1\right)=\frac{4}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx+\int_1^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_1^3=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx-\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Вычислим последний интеграл по частям:

$$\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=2x-1,\ \ du=2dx, \\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{3}dx, \\ v=\displaystyle\int\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\cdot(2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1-\frac{6}{n\pi}\cdot\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1\right)=\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}+\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right).$$

Тогда окончательно получаем

$$a_n=\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье четной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{3}-1\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Поскольку построенная функция $f(x)$ является непрерывной на всей числовой оси, то сумма $S(x)$ ряда Фурье совпадает с $f(x)$ для $x\in\mathbb{R}$, и, значит, графики $f(x)$ и $S(x)$ совпадают на всей числовой оси (рис. 16).

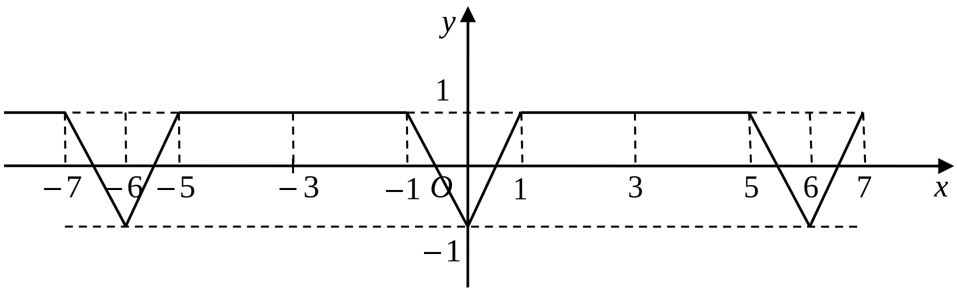


Рис. 16

в) Пусть функция $f(x)$ определена на полупериоде и является нечетной. Продолжим эту функцию нечетным образом на интервал $(-3;0)$:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-3;-1],\\ 2x+1, & x\in[-1;0),\\ 2x-1, & x\in(0;1],\\ 1, & x\in[1;3).\end{cases}$$

Полученную функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-3;3)$, периодически продолжим на всю числовую ось.

Ряд Фурье $2l$-периодической нечетной функции имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

коэффициенты которого b_n находятся по формулам

$$b_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как в нашем случае $2l=6,\ l=3,$ найдем коэффициенты b_n функции $f(x)$.

$$b_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_1^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\frac{2}{n\pi}\cdot\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Вычислим последний интеграл, воспользовавшись формулой интегрирования по частям:

$$\frac{2}{3}\int_0^1 (2x-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{array}{l} u=2x-1,\ du=2dx, \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx, \\ v=\int\sin\frac{n\pi x}{3}dx=-\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\cdot(2x-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1+\frac{6}{n\pi}\cdot\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{3}{n\pi}+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^1\right)=-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}+\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Окончательно получаем

$$b_n=\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{2\cdot(-1)^n}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}=\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\cdot\left(1+(-1)^n\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\cdot\left(1+(-1)^n\right)\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Поскольку сумма $S(x)$ ряда Фурье совпадает с функцией $f(x)$ во всех точках непрерывности, и учитывая периодичность функции $f(x)$ и суммы $S(x)$, получаем

$S(x)=f(x)$ при $x\in(-3+6k;6k)\cup(6k;3+6k),\ k\in Z$.

В точках $x=-3+6k,\ x=6k,\ k\in Z$, сумма $S(x)$ равна

$$S(-3+6k)=\frac{f(-3+6k+0)+f(-3+6k-0)}{2}=\frac{f(-3+0)+f(3-0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0;$$

$$S(6k)=\frac{f(6k+0)+f(6k-0)}{2}=\frac{f(+0)+f(-0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ряда Фурье имеют вид

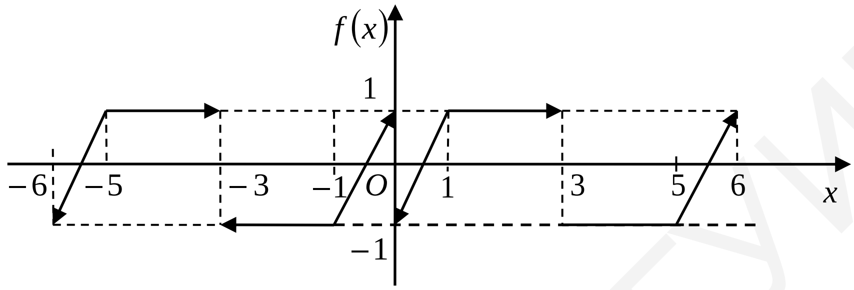


Рис. 17

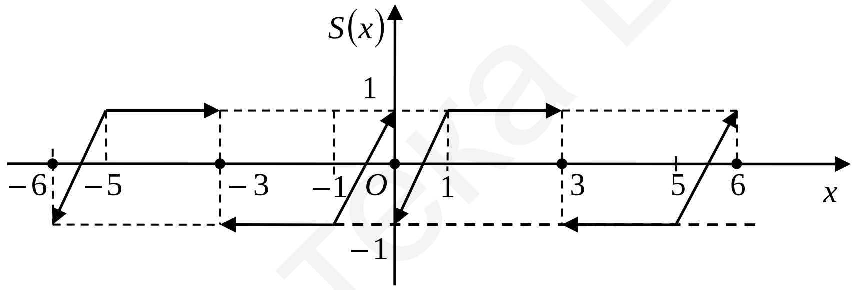


Рис. 18

2. а) Используя полученное в **1а)** разложение функции в действительный ряд Фурье, найдем амплитуду A_5 и фазу φ_5.

Воспользуемся формулами

$$A_n=\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2},\ \varphi_n=\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}.$$

Тогда при $n=5$ имеем

$$a_5=\frac{3}{25\pi^2}\left(\cos\frac{10\pi}{3}-1=\right)=\frac{3}{25\pi^2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{9}{50\pi^2};$$

$$b_5=\frac{3}{25\pi^2}\sin\frac{10\pi}{3}-\frac{2}{5\pi}=-\frac{3\sqrt{3}}{50\pi^2}-\frac{2}{5\pi};$$

$$A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{81}{2500\,\pi^4}+\frac{27}{2500\,\pi^4}+\frac{12\sqrt{3}}{250\,\pi^3}+\frac{4}{25\pi^2}}=\frac{\sqrt{108+120\sqrt{3}\pi+400\,\pi^2}}{50\pi^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{27+30\sqrt{3}\pi+100\,\pi^2}}{25\pi^2}=;$$

$$\varphi_5=\operatorname{arctg}\frac{b_5}{a_5}=\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}+20\pi}{9}.$$

б) Комплексная форма ряда Фурье имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\cdot e^{i\frac{n\pi x}{l}},$$

коэффициенты c_n которой находятся по формулам

$$c_n=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Вычислим для функции $f(x)$ коэффициенты $c_n,\ n\in Z$.

$$c_n=\frac{a_0}{2}=\frac{2}{3};$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)-i\cdot\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{2}{n\pi}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2\pi^2}e^{-i\frac{2n\pi}{3}}-\frac{3}{n^2\pi^2}+i\cdot\frac{2}{n\pi}\right),\ n\in\mathbb{N};$$

$$c_{-n}=\overline{c_n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье функции $f(x)$ примет вид

$$f(x)\sim\frac{2}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{+\infty}\left(\frac{3}{2n^2\pi^2}\cdot e^{-i\frac{2n\pi}{3}}-\frac{3}{2n^2\pi^2}+\frac{i}{n\pi}\right)\cdot e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Задания по теме «Элементы теории функции комплексной переменной»

Задание 1

Изобразите на комплексной плоскости область D, заданную системой неравенств. Проверьте подстановкой, является ли данная точка z_0 внутренней точкой области D.

Варианты

1) $D: \begin{cases} |z-i| \ge 1, \\ |z-2i| \le 2, \\ \arg z \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right); \end{cases}$ $z_0 = 3i.$

2) $D: \begin{cases} |z+2i| \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge -3, \\ \operatorname{Re} z < -1; \end{cases}$ $z_0 = -2-2i.$

3) $D: \begin{cases} |z-1-i| \le \sqrt{2}, \\ \operatorname{Im}(z-1) \ge 1, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $z_0 = 1+\sqrt{3}i.$

4) $D: \begin{cases} |z+1-i| \le 1, \\ \operatorname{Im} \bar{z} \ge -1, \\ \operatorname{Re} z \ge -1; \end{cases}$ $z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i.$

5) $D: \begin{cases} |z-1| \le 2, \\ \arg(z+1) \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; 0\right], \\ \operatorname{Im} z \ge -1; \end{cases}$ $z_0 = i.$

6) $D: \begin{cases} |z+2-2i| < 2, \\ \operatorname{Re} z \ge -2, \\ \operatorname{Im} z \le 3; \end{cases}$ $z_0 = -1+i.$

7) $D:\begin{cases}|z+1|\ge 1,\\ |z+2|\le 2,\\ \arg z\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right];\end{cases}$ $z_0=-2+2i.$

8) $D:\begin{cases}|z+i|\le 3,\\ \operatorname{Re} z\le -1,\\ \operatorname{Im} z\le 0;\end{cases}$ $z_0=-2-i.$

9) $D:\begin{cases}|z-1-i|\le 1,\\ \operatorname{Re} z<\dfrac{3}{2},\\ 0<\arg z\le\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$ $z_0=i.$

10) $D:\begin{cases}|z-2i|\le 2,\\ \operatorname{Im} z<3,\\ \operatorname{Re} z\ge 1;\end{cases}$ $z_0=2i.$

11) $D:\begin{cases}|z+1|\ge 2,\\ 0<\arg(z+1)<\dfrac{\pi}{4},\\ \operatorname{Im} z\ge 1;\end{cases}$ $z_0=1.$

12) $D:\begin{cases}|z-1+i|>1,\\ \operatorname{Im}\bar z\ge 1,\\ \operatorname{Re}\bar z\ge 1;\end{cases}$ $z_0=1+i.$

13) $D:\begin{cases}|z+i|\ge 1,\\ |z+2i|\le 2,\\ -\dfrac{3\pi}{4}\le\arg z<-\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ $z_0=-3i.$

14) $D:\begin{cases}|z+1+i|\le\sqrt{2},\\ \operatorname{Im}(z+1)\ge -1,\\ \dfrac{3\pi}{4}\le\arg z<\pi;\end{cases}$ $z_0=-i.$

15) $D:\begin{cases}|z-1|>1,\\ |z-2|<2,\\ |\arg z|\le\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$ $z_0=3.$

16) $D:\begin{cases}|z-2+2i|<2,\\ \operatorname{Re} z<2,\\ \operatorname{Im} z\ge -3;\end{cases}$ $z_0=1-i.$

17) $D:\begin{cases}|z-i|<3,\\ |\operatorname{Re} z|\le 1,\\ \operatorname{Im} z>0;\end{cases}$ $z_0=2i.$

18) $D:\begin{cases}|z+1|\ge 1,\\ |z-i|<1,\\ \dfrac{3\pi}{4}<\arg z\le\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $z_0=i.$

19) $D:\begin{cases} |z+1-i|<1; \\ \operatorname{Re} z \ge -\dfrac{3}{2}, \\ \arg z \in \left(\dfrac{2}{3}\pi; \pi\right]; \end{cases}$ $\quad z_0 = 2i.$

20) $D:\begin{cases} |z+i| \le 1, \\ |z-1| \le 1, \\ \operatorname{Im} z \ge -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ $\quad z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}.$

21) $D:\begin{cases} |z+1-i| \ge 1, \\ |z+1+i| \le 3, \\ \dfrac{5\pi}{6} < \arg z \le \pi; \end{cases}$ $\quad z_0 = -2.$

22) $D:\begin{cases} |z+1| \ge 1, \\ |z-2| < 3, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \pi; \end{cases}$ $\quad z_0 = i.$

23) $D:\begin{cases} |z-i| \le 3, \\ |z+i| > 1, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z \le \dfrac{5\pi}{4}; \end{cases}$ $\quad z_0 = -1+2i.$

24) $D:\begin{cases} |z-i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \le 1, \\ \operatorname{Im} z \ge 1; \end{cases}$ $\quad z_0 = 1+2i.$

25) $D:\begin{cases} |z+3-3i| \le 3, \\ |z-3i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge -1; \end{cases}$ $\quad z_0 = 2i.$

26) $D:\begin{cases} |z-4-i| \ge 1, \\ |z-2-i| \le 4, \\ 0 < \arg z \le \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ $\quad z_0 = 2+2i.$

27) $D:\begin{cases} |z-2i| \le 2, \\ |z-2| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\quad z_0 = 2+2i.$

28) $D:\begin{cases} |z+1-i| \ge 2, \\ |z-1| \le 1, \\ \operatorname{Im} z \ge 0; \end{cases}$ $\quad z_0 = i.$

29) $D:\begin{cases} |z-2i-4| \ge 3, \\ |z-4-4i| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\quad z_0 = 5+4i.$

30) $D:\begin{cases} |z+2-2i| < 2\sqrt{2}, \\ |z-2i| < 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 1; \end{cases}$ $\quad z_0 = -1+2i.$

Задание 2

Вычислите значение функции $f(z)$ в точке z_0.

Варианты

1) а) $f(z)=\cos z,\ z_0=3\pi i$; б) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=-1+i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0=4$.

2) а) $f(z)=\sin z,\ z_0=-2\pi i$; б) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=-4-4i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z,\ z_0=-\dfrac{i}{3}$.

3) а) $f(z)=\mathrm{ch}\,z,\ z_0=-1+i$; б) $f(z)=\mathrm{Arcctg}\,z,\ z_0=\dfrac{3i}{4}$;

в) $f(z)=z^{2i},\ z_0=i$.

4) а) $f(z)=\mathrm{sh}\,z,\ z_0=1+i$; б) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z,\ z_0=2i$;

в) $f(z)=z^{8i},\ z_0=-1$.

5) а) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=-2$; б) $f(z)=\sin z,\ z_0=\dfrac{\pi}{3}-3i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z,\ z_0=\dfrac{-9+i}{1-9i}$.

6) а) $f(z)=\mathrm{sh}\,z,\ z_0=1-\dfrac{\pi i}{3}$; б) $f(z)=z^{\sqrt{5}},\ z_0=-1$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0=i$.

7) а) $f(z)=e^{z},\ z_0=\dfrac{2+i}{3-i}$; б) $f(z)=\mathrm{ch}\,z,\ z_0=1+\pi i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z,\ z_0=-4i$.

8) а) $f(z)=3i\sin(3iz),\ z_0=-1$; б) $f(z)=\mathrm{Ln}\left(z^2+2\bar{z}\right),\ z_0=1-i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z,\ z_0=\dfrac{3i}{2}$.

9) а) $f(z)=\cos z,\ z_0=4+4i$; б) $f(z)=e^{\bar{z}},\ z_0=\ln 2-10\pi i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z,\ z_0=2+i$.

10) а) $f(z)=e^z,\ z_0=\dfrac{2i^{12}-i^5}{1+i}$; б) $f(z)=\mathrm{sh}\,z,\ z_0=1-\dfrac{\pi i}{6}$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcctg}\,z,\ z_0=-\dfrac{i}{2}$.

11) а) $f(z)=e^z,\ z_0=3+\dfrac{3\pi}{2}i$; б) $f(z)=\mathrm{ch}(iz),\ z_0=2-2i$;

в) $f(z)=z^{\frac{i}{4}},\ z_0=-2$.

12) а) $f(z)=\mathrm{Ln}(iz),\ z_0=10$; б) $f(z)=\cos\bar{z},\ z_0=\dfrac{\pi}{6}-4i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0=-5$.

13) а) $f(z)=e^{2\bar{z}},\ z_0=\pi+2\pi i$; б) $f(z)=\sin z,\ z_0=\dfrac{\pi}{4}+i$;

в) $f(z)=z^{4i},\ z_0=1-i$.

14) а) $f(z)=\bar{z}\,\mathrm{sh}\,z,\ z_0=6i$; б) $f(z)=z^{8i},\ z_0=1+i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z,\ z_0=-\dfrac{i}{4}$.

15) а) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=\dfrac{i}{i-1}$; б) $f(z)=\cos\bar{z},\ z_0=\dfrac{4\pi}{3}+i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z,\ z_0=6i$.

16) а) $f(z)=e^{-z},\ z_0=\ln 5+5\pi i$; б) $f(z)=\mathrm{sh}\,iz,\ z_0=\dfrac{\pi}{3}+i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z,\ z_0=\dfrac{-5+i}{1-5i}$.

17) а) $f(z)=\sin\bar{z},\ z_0=\dfrac{5\pi}{3}+2i$; б) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=-10i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0=3i^{14}$.

18) а) $f(z)=\cos\bar{z},\ z_0=\frac{\pi}{6}-3i$; б) $f(z)=\operatorname{Ln} z,\ z_0=-2-2i$;

в) $f(z)=z^{\sqrt{3}},\ z_0=-2$.

19) а) $f(z)=\sin z,\ z_0=\frac{\pi}{6}-4i$; б) $f(z)=\operatorname{Ln} z,\ z_0=-8\sqrt{2}$;

в) $f(z)=\operatorname{Arcsin} z,\ z_0=-i^{16}$.

20) а) $f(z)=e^{\bar{z}},\ z_0=3-i\frac{\pi}{4}$; б) $f(z)=z^{2i},\ z_0=-i$;

в) $f(z)=\operatorname{Arccos} z,\ z_0=-\frac{5i}{2}$.

21) а) $f(z)=\operatorname{Ln} z,\ z_0=3i^{15}$; б) $f(z)=\operatorname{sh} z,\ z_0=2+2i$;

в) $f(z)=\operatorname{Arctg} z,\ z_0=2-i$.

22) а) $f(z)=\operatorname{ch} z,\ z_0=5\pi i$; б) $f(z)=z^{4i},\ z_0=1$;

в) $f(z)=\operatorname{Arcctg} z,\ z_0=-\frac{5i}{2}$.

23) а) $f(z)=\operatorname{Ln}\bar{z},\ z_0=\sqrt{3}-i$; б) $f(z)=\sin z,\ z_0=\frac{\pi}{6}+2i$;

в) $f(z)=z^{1-i},\ z_0=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

24) а) $f(z)=\operatorname{Ln} z,\ z_0=-\sqrt{3}+i$; б) $f(z)=\operatorname{sh} z,\ z_0=\ln 2+\frac{\pi i}{6}$;

в) $f(z)=\operatorname{Arccos} z,\ z_0=-10i^5$.

25) а) $f(z)=\operatorname{Ln} z,\ z_0=-3-3i$; б) $f(z)=\operatorname{th} z,\ z_0=\ln 2+\frac{\pi i}{3}$;

в) $f(z)=\operatorname{Arcsin} z,\ z_0=2i^{2022}$.

26) а) $f(z)=\sin z,\ z_0=\frac{\pi}{3}(1+i)$; б) $f(z)=z^{6i},\ z_0=-2$;

в) $f(z)=\operatorname{Arctg} z,\ z_0=\frac{-2+i}{1-2i}$.

27) а) $f(z)=2i(\bar{z})^2\,\mathrm{Im}\,z,\ z_0=1+2i$; б) $f(z)=\mathrm{ch}\,z,\ z_0=\ln 5+\dfrac{\pi i}{4}$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcctg}\,z,\ z_0=\dfrac{-1+i}{1-i}$.

28) а) $f(z)=e^{\bar{z}},\ z_0=\ln\sqrt{2}+\dfrac{3\pi i}{4}$; б) $f(z)=\mathrm{sh}\,iz,\ z_0=\pi+2i$;

в) $f(z)=z^i,\ z_0=\dfrac{3-i}{2+i}$.

29) а) $f(z)=4\sin 2iz,\ z_0=-3$; б) $f(z)=z^{-1+i},\ z_0=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$;

в) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z,\ z_0=-5i^{15}$.

30) а) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\ z_0=2\sqrt{3}-2i$; б) $f(z)=z^{2i},\ z_0=\dfrac{3+i}{2-i}$;

в) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0=4i^{2020}$.

Задание 3

1. Решите уравнение.

2. Определите кратность корней данного уравнения.

3. Укажите корни, принадлежащие области D.

Варианты

1) $(4z^2-1)(1-\cos z)=0$; $D:\left|z-\dfrac{\pi}{4}\right|<1$.

2) $(z^3-1)\cos\pi z=0$; $D:\left|z+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|<1$.

3) $(\sqrt{2}z+1+i)(z^4+1)=0$; $D:\left|z+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$.

4) $(z+i-1)^2\left(e^{\frac{\pi z}{2i}}+1\right)=0$; $D:|z+2i|<\dfrac{5}{2}$.

5) $\left(z^3-4z^2+4z\right)\sin 2z=0$; $D: |z-3|<\sqrt{2}$.

6) $(z-1+i)^2\left(e^{\pi z}+i\right)=0$; $D: |z+i|<\sqrt{2}$.

7) $(z-3)^2\cos\frac{3z}{2}=0$; $D: |z-3|<1$.

8) $(iz+3)\sin\left(\frac{\pi iz}{3}\right)=0$; $D: |z-i|<3$.

9) $\left(9z^2-\pi^2\right)^2\left(e^z+1\right)=0$; $D: \left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$.

10) $\left(8z^2+2z^3-z^4\right)\sin 3z=0$; $D: \left|z+\frac{\pi}{3}\right|<1$.

11) $\left(2z^2-z\right)\sin(\pi iz)=0$; $D: |z-1|<\frac{3}{4}$.

12) $\left(2z^2-z-3\right)\cos\frac{\pi z}{3}=0$; $D: |z-1|<\frac{9}{4}$.

13) $\left(4z^2+9\right)\left(e^{\pi z}-i\right)=0$; $D: |z-i|<\frac{3}{4}$.

14) $\left(z^3-9z\right)(\cos\pi z+1)=0$; $D: \left|z-\frac{3}{4}\right|<1$.

15) $\left(z^3+1\right)\sin\frac{z}{2}=0$; $D: |z+1|<\frac{5}{4}$.

16) $\left(z^2-iz+2\right)\sin\left(\frac{\pi iz}{2}\right)=0$; $D: |z+i|<\frac{1}{2}$.

17) $\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\sin(2\pi z)=0$; $D: \left|z-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$.

18) $\left(z^3+z^2-z-1\right)\operatorname{sh} z=0$; $D: |z|<2$.

19) $\left(z^2-4\right)\left(e^{iz}+1\right)=0$; $D: |z|<\frac{5}{2}$.

20) $\left(z^3+2z^2\right)\cos\frac{\pi z}{2}=0$; $D: |z+3|<\frac{5}{2}$.

21) $\left(z^2+9\right)\left(e^z+i\right)=0$; $D: |z+i|<3$.

22) $(z-1+i)\left(z^4-1\right)=0$; $D: |z-1+i|<\dfrac{3}{2}$.

23) $\left(z^2+\pi^2\right)\sin\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)=0$; $D: |z+2i|<\dfrac{5}{2}$.

24) $\left(z^2-1\right)\left(e^{2z}-1\right)=0$; $D: |z-1|<\dfrac{3}{2}$.

25) $\left(z^2+\dfrac{1}{4}\right)\operatorname{sh}(2\pi z)=0$; $D: \left|z+\dfrac{3}{4}i\right|<\dfrac{1}{2}$.

26) $\left(z^2-9\pi^2\right)\cos\dfrac{z}{2}=0$; $D: |z+\pi|<\pi$.

27) $\left(z^2-1\right)^2\operatorname{ch} iz=0$; $D: |z+1|<1$.

28) $\left(z^3+4z^2+3z\right)\left(e^{\pi iz}+1\right)=0$; $D: \left|z-\dfrac{1}{2}\right|<1$.

29) $\left(z^2+2z\right)\operatorname{sh} iz=0$; $D: \left|z+\dfrac{3\pi}{2}\right|<\pi$.

30) $\left(z^2-z-6\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi z}{2i}\right)=0$; $D: |z-2|<2$.

Задание 4

Дана функция $f(z)$.

1. Выделите ее действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части.

2. Выясните, является ли данная функция аналитической в области D.

3. Вычислите $f'(z)$ в точках ее существования.

Варианты

1) $f(z)=e^{-iz}$, $D: |z+i|>2$.

2) $f(z) = (z+1+i)\operatorname{Im}\bar{z}, \quad D:\ |z+2-3i| > \dfrac{1}{2}.$

3) $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z, \quad D:\ |z-2+10i| > 4.$

4) $f(z) = z|z|, \quad D:\ |z-1| < 3.$

5) $f(z) = \cos iz + i, \quad D:\ |z+i| > 5.$

6) $f(z) = \sin iz - 2i, \quad D:\ |z-1-2i| > 1.$

7) $f(z) = |z|\bar{z}, \quad D:\ |z+i| < 2.$

8) $f(z) = \operatorname{ch} 2z + z + 1, \quad D:\ |z-1| < 3.$

9) $f(z) = \operatorname{sh} 4z + iz, \quad D:\ |z+2-i| > 1.$

10) $f(z) = (z+2i)^3, \quad D:\ |z-3-i| < 5.$

11) $f(z) = (z+i)(3\bar{z}-1), \quad D:\ |z+4-i| > 2.$

12) $f(z) = z^2 + |z|^2, \quad D:\ |z-i| > 1.$

13) $f(z) = z^2 \operatorname{Im}\bar{z}, \quad D:\ |z-2+5i| < 6.$

14) $f(z) = (z-3i)^3, \quad D:\ |z+3| < 5.$

15) $f(z) = (z-1)\operatorname{Re}(z+2-i), \quad D:\ |z+i| > 1.$

16) $f(z) = (z+i)\operatorname{Im} z^2, \quad D:\ |z+1+i| > 2.$

17) $f(z) = (z+i)^2 + 2z, \quad D:\ |z-3+i| > 1.$

18) $f(z) = (\bar{z}-i)^2 - 3z, \quad D:\ |z+4| > 2.$

19) $f(z) = ie^{2z}, \quad D:\ |z+i-1| < 6.$

20) $f(z) = |z|\operatorname{Re} z, \quad D:\ |z-1| < 3.$

21) $f(z) = |z|\operatorname{Im}\bar{z}, \quad D:\ |z-2i| > 1.$

22) $f(z) = \dfrac{i+1}{\bar{z}}, \quad D:\ |z-1| < 5.$

23) $f(z) = (z - 5i)|z|^2, \quad D: |z + 1 - i| > 2$.

24) $f(z) = (2 - i)\sin(z - 2i), \quad D: |z - 3i| > 1$.

25) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}, \quad D: |z - i| < 3$.

26) $f(z) = \dfrac{z + i}{\bar{z}}, \quad D: |z - 1| < 4$.

27) $f(z) = (z - 2i)(\bar{z} + 3z), \quad D: |z + 1 - i| > 3$.

28) $f(z) = i\cos(z + 2i), \quad D: |z - 4| < 4$.

29) $f(z) = (2z + 1)(\bar{z} - iz), \quad D: |z + 1 - 2i| < 3$.

30) $f(z) = (\overline{z + i})\operatorname{Re}(2iz^2), \quad D: |z + i| > 4$.

Задание 5

Вычислите интеграл от функции комплексной переменной по указанной кривой L.

Варианты

1) а) $\int\limits_L (z^3 + z^2 + 1)dz$, $L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

б) $\int\limits_L \operatorname{Im}(z^2 + 2i - 5)dz$, L – ломаная ABC: $z_A = 0,\ z_B = 2 + i,\ z_C = i$;

в) $\int\limits_L (5|z| + z)dz$, $L: \{|z| = 2, \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

2) а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^3\, dz$, L – ломаная ABC: $z_A = 0,\ z_B = 3 + 3i,\ z_C = 3i$;

б) $\int\limits_L \dfrac{\bar{z}}{z} dz$, $L: \left\{|z| = 3, \quad \dfrac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

в) $\int\limits_L (\sin z + 1)dz$, $L: \{|z| = 3, \quad \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

3) а) $\int\limits_L \mathrm{Re}(2z+i)dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y=x^2$, $z_A=-1+i$, $z_B=0$, BC – отрезок, $z_C=1+i$;

б) $\int\limits_L (z^7-2z^6+3)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=i$, $z_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_C=-i$;

в) $\int\limits_L 4z|z|\,dz$, $L:\{|z|=5,\quad \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$.

4) а) $\int\limits_L e^z(z+1)dz$, $L:\{|z|=1, \mathrm{Im}\,z\le 0\}$;

б) $\int\limits_L \frac{z^2}{\bar z}dz$, $L:\left\{|z|=2,\quad \frac{\pi}{4}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}\right\}$;

в) $\int\limits_L \mathrm{Re}(z^2+iz)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=1$, $z_B=i$, $z_C=0$.

5) а) $\int\limits_L (z^2+\cos z)dz$, $L:\{|z|=1, \mathrm{Re}\,z\le 0\}$;

б) $\int\limits_L 2z|z|dz$, $L:\{|z|=4,\quad \mathrm{Im}\,z\ge 0,\ \mathrm{Re}\,z\le 0\}$;

в) $\int\limits_L e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\,z dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-1$, $z_B=0$, $z_C=1+i$.

6) а) $\int\limits_L \left(\bar z^2+z^2\right)dz$, L – дуга параболы $y=1-x^2$ от $z_1=1$ до $z_2=-1$;

б) $\int\limits_L (20z^4-6z^2+2z)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-i$, $z_B=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_C=2$;

в) $\int\limits_L \frac{|z|}{z^2}dz$, $L:\{|z|=\sqrt{3},\quad \mathrm{Im}\,z\ge 0,\ \mathrm{Re}\,z\le 0\}$.

7) а) $\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2\,dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-1+i$, $z_B=1+i$, $z_C=1-i$;

б) $\int\limits_L ze^z dz$, $L:\{|z|=3,\quad \mathrm{Im}\,z\ge 0,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0\}$;

в) $\int\limits_{L} \left(|z|^2 + z^2\right) dz$, $L:\left\{|z| = \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$.

8) а) $\int\limits_{L} z^2 e^{z^3} dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 0,\ z_B = -1 - i$, $z_C = -i$;

б) $\int\limits_{L} \left(2|z| + 3z\right) dz$, $L:\left\{|z| = 1,\ \ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

в) $\int\limits_{L} \left(\bar{z} + z\right) dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y = x^2 - 1$, $z_A = -1,\ z_B = -i$, BC – отрезок, $z_C = -1 - 2i$.

9) а) $\int\limits_{L} \operatorname{Re}\left(z - 2\bar{z}\right) dz$, L – дуга параболы $y = x^2 - 2x$ от $z_A = 1 - i$ до $z_B = 0$;

б) $\int\limits_{L} \left(z^3 - \cos z\right) dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 0,\ z_B = 1,\ z_C = i$;

в) $\int\limits_{L} \bar{z} \cdot |z|^2 dz$, $L:\left\{|z| = 2, \quad \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \le 0\right\}$.

10) а) $\int\limits_{L} \dfrac{2z \cdot \bar{z}}{|z|^2} dz$, L – отрезок AB от $z_A = 2 + \dfrac{3}{2} i$ до $z_B = 1 + i$;

б) $\int\limits_{L} \dfrac{z}{|z|^2} dz$, $L:\left\{|z| = 4, \quad \pi \le \arg z \le \dfrac{5\pi}{4}\right\}$;

в) $\int\limits_{L} \left(z^5 - 12z^3\right) dz$, L – ломаная ABC, $z_A = i,\ z_B = 1 + 3i,\ z_C = 2$.

11) а) $\int\limits_{L} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\, dz$, L – отрезок AB, $z_A = -1 + i,\ z_B = i$;

б) $\int\limits_{L} \left(-\dfrac{1}{2}\left(\bar{z}\right)^2\right) dz$, L – кривая ABC, где AB – отрезок, $z_A = 2 + 2i,\ z_B = 0$, BC – дуга параболы $y = x^2$, $z_C = -1 + i$;

в) $\int\limits_{L} \dfrac{\bar{z}}{z} dz$, L – граница области $\left\{1 \le |z| \le 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$.

12) а) $\int\limits_L e^z(z-1)dz$, $L:\{|z|=3,\quad \operatorname{Im} z\le 0\}$;

б) $\int\limits_L |z|z\,dz$, $L:\{|z|=3,\quad \operatorname{Im} z\le 0\}$;

в) $\int\limits_L (z\bar{z}+z^2)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-1$, $z_B=-i$, $z_C=1$.

13) а) $\int\limits_L (|z|+z)dz$, L – граница области $\{1\le|z|\le 1,\ \operatorname{Re} z\ge 0,\ \operatorname{Im} z\ge 0\}$;

б) $\int\limits_L (\sin iz+z)dz$, $L:\{|z|=1,\quad \operatorname{Re} z\ge 0\}$;

в) $\int\limits_L (3\bar{z}-4z)dz$, L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_A=1+i$ до $z_B=-1+i$.

14) а) $\int\limits_L \operatorname{Im}(2z+\bar{z})dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y=2-x^2$, $z_A=2i$, $z_B=1+i$, BC – отрезок, $z_C=1$;

б) $\int\limits_L ze^{-z^2}\,dz$, L – ломаная ABC, $z_A=i$, $z_B=3+3i$, $z_C=3i$;

в) $\int\limits_L \bar{z}|z|^2\,dz$, L – граница области $\{|z|=2,\quad \operatorname{Im} z\le 0,\ \operatorname{Re} z\le 0\}$.

15) а) $\int\limits_L (\bar{z}+2z)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-i$, $z_B=i$, $z_C=2+i$;

б) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)dz$, $L:\left\{|z|=2,\quad \dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le\pi\right\}$;

в) $\int\limits_L (z^2+\cos iz)dz$, $L:\{|z|=1,\quad \operatorname{Im} z\ge 0\}$.

16) а) $\int\limits_L (\bar{z}+2z)dz$, L – кривая ABC, AB – дуга параболы $y=1-x^2$, $z_A=1$, $z_B=-1$, BC – отрезок, $z_C=-i$;

б) $\int\limits_L \left(\dfrac{|z|}{2}-z\right)dz$, $L:\left\{|z|=\sqrt{3},\quad \dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{4}\right\}$;

в) $\int\limits_L (\operatorname{ch} z + iz)dz$, L: $\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

17) а) $\int\limits_L \frac{\bar{z} - z}{|z|^2} dz$, L – отрезок AB, $z_A = -1 + 2i$, $z_B = 2i$;

б) $\int\limits_L z e^{2z} dz$, $L: \left\{|z| = 2,\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi\right\}$;

в) $\int\limits_L \frac{\bar{z}}{z^2} dz$, L: $\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \le 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

18) а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z^2 dz$, L – ломаная ABC, $z_A = i$, $z_B = 0$, $z_C = 1$;

б) $\int\limits_L z^2 e^{z^3} dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 2i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = 1$;

в) $\int\limits_L \frac{3(\bar{z})^2}{|z|} dz$, L: $\{|z| = 4,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$.

19) а) $\int\limits_L (z - 2)\bar{z}\, dz$, L: $\{|z| = 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$;

б) $\int\limits_L (z^2 + 2z)dz$, $L: \left\{|z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$;

в) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1 + i$.

20) а) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Im} z\, dz$, L – отрезок AB, $z_A = 0$, $z_B = 1 - i$;

б) $\int\limits_L 4z|z|\, dz$, L – граница области $\{1 \le |z| \le 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$;

в) $\int\limits_L (z^3 + 2z)dz$, L – ломаная ABC, $z_A = -2i$, $z_B = 2 - i$, $z_C = -3i$.

21) а) $\int\limits_L z \sin 2z\, dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 0$, $z_B = \pi + \pi i$, $z_C = \pi i$;

б) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z^2 - z\right)dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y = 2x^2$, $z_A = 0$, $z_B = 1 + 2i$, BC – отрезок, $z_C = 2i$;

в) $\int\limits_L \left(\frac{1}{2}\bar{z} + |z|\right)dz$, $L: \left\{|z| = \sqrt{2},\ \ \frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4}\right\}$.

22) а) $\int\limits_L \left(z^3 + 3z - i\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A = -i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 2i$;

б) $\int\limits_L z \operatorname{Re} z^2\, dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 2i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 1$;

в) $\frac{1}{i}\int\limits_L \frac{\bar{z}}{z}dz$, L: $\left\{|z| \le \sqrt{3},\ \ \operatorname{Im} z \le 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$.

23) а) $\int\limits_L \left(\operatorname{ch} z - z + i\right)dz$, L: $\left\{|z| = 1,\ \ \operatorname{Im} z \ge 0\right\}$;

б) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 dz$, L – ломаная ABC, $z_A = 0$, $z_B = 3 + 3i$, $z_C = 3i$;

в) $\int\limits_L \left(\frac{|z|}{4} - iz\right)dz$, $L: \left\{|z| = \sqrt{2},\ \ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4}\right\}$.

24) а) $\int\limits_L \left(z^{10} - 4z + i\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A = i$, $z_B = 5 + i$, $z_C = 3i$;

б) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Im} z\, dz$, L – ломаная ABC, $z_A = -2$, $z_B = 0$, $z_C = 2 + 2i$;

в) $\int\limits_L \left(i \cdot |z| - 3z\right)dz$, L: $\left\{|z| = \sqrt{5},\ \operatorname{Re} z \le 0\right\}$.

25) а) $\int\limits_L z \sin iz\, dz$, L: $\left\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$;

б) $\int\limits_L (z + i)\bar{z}\, dz$, L: $\left\{|z| = 1,\ \ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}$;

в) $\int\limits_L z^2 \operatorname{Re} z\, dz$, L – ломаная ABC, $z_A = i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 1$.

26) а) $\int\limits_L \left(|z| + iz^2\right)dz$, L: $\left\{|z| = 4,\ \ \operatorname{Im} z \ge 0\right\}$;

б) $\int\limits_L \left(iz^3+3\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-i,\ z_B=1,\ z_C=i$;

в) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(3z+\bar{z}\right)dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y=x^2-4x$, $z_A=0,\ z_B=2-4i$, BC – отрезок, $z_C=-4i$.

27) а) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(iz^2+2z\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-1-i,\ z_B=0$, $z_C=2$;

б) $\int\limits_L \left(iz^2+2z\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=2i,\ z_B=2i+3,\ z_C=3i$;

в) $\int\limits_L \left(z^4+|z|^4\right)dz$, L: $\left\{|z|=\sqrt{2},\quad \operatorname{Im}z\ge 0,\ \operatorname{Re}z\le 0\right\}$.

28) а) $\int\limits_L z\cdot\bar{z}\,dz$, L – граница области $\left\{|z|=1,\quad \operatorname{Im}z\ge 0\right\}$;

б) $\int\limits_L \left(\operatorname{ch}z+\cos iz\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=0,\ z_B=-1,\ z_C=i$;

в) $\int\limits_L \left(2\bar{z}-3z\right)dz$, L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_A=-1-i$ до $z_B=1-i$.

29) а) $\int\limits_L |z|\cdot z\,dz$, L – граница области $\left\{|z|=2,\quad \operatorname{Re}z\le 0\right\}$;

б) $\int\limits_L \left(\sin iz+z\right)dz$, L: $\left\{|z|=1,\quad \operatorname{Re}z\ge 0\right\}$;

в) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(2z+3\bar{z}\right)dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y=1-x^2$, $z_A=-1,\ z_B=i$, BC – отрезок, $z_C=1$.

30) а) $\int\limits_L \left(iz^4+3z-1\right)dz$, L – ломаная ABC, $z_A=-i,\ z_B=5,\ z_C=2i$;

б) $\int\limits_L e^{|z|^2}\operatorname{Re}z\,dz$, L – отрезок AB, $z_A=0,\ z_B=1$;

в) $\int\limits_L |z|\cdot z^3\,dz$, L: $\left\{|z|=3,\quad \operatorname{Im}z\le 0,\ \operatorname{Re}z\ge 0\right\}$.

Задание 6

Дана функция $f(z)$. Используя интегральную теорему Коши или интегральную формулу Коши, вычислите $\oint\limits_{C_i} f(z)dz \ (i=1,2,3)$.

Варианты

1) $f(z)=\dfrac{z+1}{\left(z^2+1\right)^2}$, если а) $C_1: |z|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: |z-i|=\dfrac{1}{2}$, в) $C_3: |z|=2$.

2) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+4}$, если а) $C_1: |z-i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: |z-i|=2$,

в) $C_3: |z-i|=4$.

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+3z^3}$, если а) $C_1: |z+1|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: |z+1|=\dfrac{3}{2}$,

в) $C_3: |z+1|=3$.

4) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2(z-1)}$, если а) $C_1: |z-i|=1$, б) $C_2: |z-1|=1$,

в) $C_3: |z-i|=2$.

5) $f(z)=\dfrac{z+i}{z(z-i)^3}$, если а) $C_1: \left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{4}$, б) $C_2: |z-i|=\dfrac{1}{2}$,

в) $C_3: \left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{5}{4}$.

6) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)(z+2i)}$, если а) $C_1: |z-1+i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: |z-1+i|=\dfrac{5}{4}$,

в) $C_3: |z-1+i|=\dfrac{3}{2}$.

7) $f(z)=\dfrac{z-2i}{(z+1)(z+2i)^2}$, если а) $C_1:|z-1|=1$, б) $C_2:|z+2|=2$, в) $C_3:|z+i|=\dfrac{3}{2}$.

8) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-3z-4}$, если а) $C_1:|z-3-i|=1$, б) $C_2:|z-3-i|=2$, в) $C_3:|z-2|=4$.

9) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{4z^2+1}$, если а) $C_1:|z+i|=\dfrac{1}{4}$, б) $C_2:|z+i|=1$, в) $C_3:|z|=1$.

10) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+z-2}$, если а) $C_1:|z+1|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z+1|=1$, в) $C_3:|z+1|=3$.

11) $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{2z^2+z-3}$, если а) $C_1:|z|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z+1|=1$, в) $C_3:|z|=2$.

12) $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$, если а) $C_1:|z-\pi|=1$, б) $C_2:|z-\pi i|=1$, в) $C_3:|z|=4$.

13) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+4\right)^3}$, если а) $C_1:|z-i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z-i|=2$, в) $C_3:|z|=3$.

14) $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z^3-iz^2}$, если а) $C_1:|z+1-i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z|=\dfrac{1}{2}$, в) $C_3:|z+1-i|=\dfrac{3}{2}$.

15) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-4z+5}$, если а) $C_1:|z-2|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z-2+i|=1$, в) $C_3:|z-2|=2$.

16) $f(z)=\dfrac{e^{4z}}{z(z+2)^2}$, если а) $C_1: |z+i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: |z|=\dfrac{1}{2}$,

в) $C_3: |z+1|=\dfrac{3}{2}$.

17) $f(z)=\dfrac{z}{2z^2-2z+5}$, если а) $C_1: \left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2: \left|z-\dfrac{3}{2}i\right|=1$,

в) $C_3: \left|z-\dfrac{1}{2}\right|=2$.

18) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+9)^2}$, если а) $C_1: |z-3|=1$, б) $C_2: |z+3i|=1$, в) $C_3: |z|=4$.

19) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^3+2iz^2}$, если а) $C_1: |z+i|=\dfrac{1}{4}$, б) $C_2: |z|=\dfrac{1}{4}$,

в) $C_3: |z+2i|=3$.

20) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z^2-2z-3}$, если а) $C_1: |z-1|=1$, б) $C_2: |z+1|=1$,

в) $C_3: |z-1|=3$.

21) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} 2z}{(z-i)^2(z+1)}$, если а) $C_1: |z-1|=1$, б) $C_2: |z+1|=\dfrac{1}{2}$,

в) $C_3: |z+1-i|=\dfrac{3}{2}$.

22) $f(z)=\dfrac{1}{(9z^2+1)^2}$, если а) $C_1: |z|=\dfrac{1}{4}$, б) $C_2: \left|z-\dfrac{i}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$,

в) $C_3: \left|z-\dfrac{i}{4}\right|=1$.

23) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+7iz+8}$, если а) $C_1: |z+3i|=1$, б) $C_2: |z-i|=3$,

в) $C_3: |z+4i|=6$.

24) $f(z)=\dfrac{e^{-2z}}{z^2+3iz+4}$, если а) $C_1:|z+2i|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z-i|=2$,

в) $C_3:|z+2i|=4$.

25) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{\left(z^2+\dfrac{1}{16}\right)^2}$, если а) $C_1:|z-i|=\dfrac{1}{4}$, б) $C_2:\left|z+\dfrac{i}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$,

в) $C_3:|z|=1$.

26) $f(z)=\dfrac{z^3}{2z^2-5iz+3}$, если а) $C_1:|z-i|=1$, б) $C_2:|z-3i|=1$,

в) $C_3:|z-3i|=4$.

27) $f(z)=\dfrac{e^{-6z}}{z^3-2iz^2}$, если а) $C_1:|z+2i|=1$, б) $C_2:|z-2i|=1$,

в) $C_3:|z-1-i|=2$.

28) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+iz^3}$, если а) $C_1:|z+1|=\dfrac{1}{2}$, б) $C_2:|z+i|=\dfrac{1}{2}$,

в) $C_3:|z-1|=\dfrac{3}{2}$.

29) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-8iz+9}$, если а) $C_1:|z-3i|=1$, б) $C_2:|z+i|=3$,

в) $C_3:|z-5i|=7$.

30) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2-\pi iz}$, если а) $C_1:|z-2i|=1$, б) $C_2:|z|=1$,

в) $C_3:|z-2i|=3$.

Задание 7

Дано разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $0<|z-z_0|<R$ изолированной особой точки z_0.

1. Определите тип особой точки z_0 функции $f(z)$.

2. Найдите вычет функции $f(z)$ в указанной точке.

3. Вычислите интегралы $\oint\limits_{|z-z_0|=r} \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(0<r<R)$, используя формулы для коэффициентов ряда Лорана.

Варианты

1) $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z+1)^n, \quad z_0=-1; \qquad \oint\limits_{|z+1|=r}\dfrac{f(z)}{(z+1)^2}dz.$

2) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}, \quad z_0=i; \qquad \oint\limits_{|z-i|=r} f(z)(z-i)^2 dz.$

3) $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \quad z_0=1; \qquad \oint\limits_{|z-1|=r} f(z)(z-1)^2 dz.$

4) $f(z)=\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n}{(n+3)(n+2)}(z+2)^n, \quad z_0=-2; \qquad \oint\limits_{|z+2|=r}\dfrac{f(z)}{(z+2)^3}dz.$

5) $f(z)=-\dfrac{i}{2(z-2i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-2i)^n}{(2i)^n}, \quad z_0=2i; \qquad \oint\limits_{|z-2i|=r}\dfrac{f(z)}{(z-2i)^3}dz.$

6) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(z-1)^n}{\sqrt{3n-1}\cdot 2^n}, \quad z_0=1; \qquad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{(z-1)^3}dz.$

7) $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(1+in)(z+2+i)^n, \quad z_0=-2-i; \qquad \oint\limits_{|z+2+i|=r}\dfrac{f(z)dz}{z+2+i}.$

8) $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(1+\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n!(z-1)^n}, \quad z_0=1; \qquad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{z-1}dz.$

9) $f(z)=\sum\limits_{n=-4}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^3+5}(z+i)^n, \quad z_0=-i; \qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2\,dz.$

10) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{5^n\cdot z^{2n+1}}, \quad z_0=0; \qquad \oint\limits_{|z|=r} f(z)\cdot z^4\,dz.$

11) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{3^{n+1}z^{2n-1}}, \quad z_0=0; \qquad \oint\limits_{|z|=r} \dfrac{f(z)}{z^2}\,dz.$

12) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}\right)(z+i)^{-n}, \quad z_0=-i; \qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)^2\,dz.$

13) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!(z+i)^{2n}}, \quad z_0=-i; \qquad \oint\limits_{|z+i|=r} f(z)(z+i)\,dz.$

14) $f(z)=\dfrac{i}{6(z-3i)}+\dfrac{1}{36}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{(6i)^n}, \quad z_0=3i; \qquad \oint\limits_{|z-3i|=r} \dfrac{f(z)}{(z-3i)^2}\,dz.$

15) $f(z)=\dfrac{i}{4(z+2i)}+\dfrac{1}{16}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{(4i)^n}, \quad z_0=-2i; \qquad \oint\limits_{|z+2i|=r} \dfrac{f(z)}{(z+2i)^3}\,dz.$

16) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-3}}, \quad z_0=0; \qquad \oint\limits_{|z|=r} z\cdot f(z)\,dz.$

17) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}(z+i)^n, \quad z_0=-i; \qquad \oint\limits_{|z+i|=r} \dfrac{f(z)}{(z+i)^2}\,dz.$

18) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+5}}, \quad z_0=0; \qquad \oint\limits_{|z|=r} \dfrac{f(z)}{z^4}\,dz.$

19) $f(z)=\dfrac{3}{z+2}-\dfrac{2}{(z+2)^2}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n, \quad z_0=-2; \qquad \oint\limits_{|z+2|=r} \dfrac{f(z)dz}{(z+2)^3}.$

20) $f(z)=\sum\limits_{n=-5}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{3\sqrt{2n}}, \quad z_0=-i; \qquad \oint\limits_{|z+i|=r} (z+i)^3\cdot f(z)\,dz.$

21) $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(z-1+i)^n}{(1-in)}, \quad z_0=1-i; \qquad \oint\limits_{|z-1+i|=r} \dfrac{f(z)}{z-1+i}\,dz.$

22) $f(z)=\dfrac{i}{2(z+i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{(2i)^n}$, $\quad z_0=-i;\quad \oint\limits_{|z+i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+i)^2}dz$.

23) $f(z)=-\dfrac{i}{6(z-3i)}+\dfrac{1}{36}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z+3i)^n}{(6i)^n}$, $\quad z_0=-3i;\quad \oint\limits_{|z-3i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+3i)^2}dz$.

24) $f(z)=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\dfrac{(3n+1)}{5^{n+1}}(z+3i)^n$, $\quad z_0=-3i;\quad \oint\limits_{|z+3i|=r}f(z)(z+3i)dz$.

25) $f(z)=-\dfrac{i}{4(z-2i)}+\dfrac{1}{16}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z+2i)^n}{(4i)^n}$, $\quad z_0=-2i;\quad \oint\limits_{|z+2i|=r}\dfrac{f(z)}{(z+2i)^2}dz$.

26) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!(z-2)^n}$, $\quad z_0=2;\quad \oint\limits_{|z-2|=r}f(z)(z-2)^3dz$.

27) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2+1)z^{2n+1}}$, $\quad z_0=0;\quad \oint\limits_{|z|=r}f(z)\cdot z^2dz$.

28) $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$, $\quad z_0=1;\quad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}dz$.

29) $f(z)=\sum\limits_{n=-3}^{\infty}(1-in)(z-3-i)^n$, $\quad z_0=3+i;\quad \oint\limits_{|z-3-i|=r}f(z)(z-3-i)^2dz$.

30) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(1-i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-1)^n$, $\quad z_0=1;\quad \oint\limits_{|z-1|=r}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}dz$.

Задание 8

Дана функция $f(z)$.

1. Определите изолированную особую точку z_0 данной функции и разложите $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

2. Укажите правильную и главную части ряда Лорана. Определите тип особой точки z_0 и найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

Варианты

1) а) $f(z)=\dfrac{4-4z+8z^2-16z^3}{16z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin 2iz-2iz}{z^4}$;

в) $f(z)=z^5e^{\frac{z^2+2i}{z^2}}$.

2) а) $f(z)=\dfrac{1+z^2+2z^4-3z^6}{7z^4}$; б) $f(z)=z^2e^{\frac{2}{z}}$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-3i}$.

3) а) $f(z)=\dfrac{5z^7+4z^4+3z^3-2z+5}{4z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{z\operatorname{ch}3z-3-z}{z^6}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{z+i}{z-2}}$.

4) а) $f(z)=\dfrac{7-7z+14z^2-5z^3}{2z^3}$; б) $f(z)=\left(\dfrac{z}{4}\right)^4\operatorname{sh}\dfrac{i}{z}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{3z+i}{3z-i}$.

5) а) $f(z)=\dfrac{7z^3-4z^2+3z-1}{12z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos\left(z^2\right)-1}{z^4}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{2z}{z-3i}$.

6) а) $f(z)=\dfrac{8z^4-5z^3+z^2+3}{4z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{3z-\sin 3z}{z^6}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{z}{z-4}}$.

7) а) $f(z)=\dfrac{3-z+2z^2+4z^5}{3z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{2z^5}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-i}$.

8) а) $f(z)=\dfrac{1+2z-3z^2+4z^4}{5z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^4}$;

в) $f(z)=\cos\left(\pi\dfrac{z+3}{z-1}\right)$.

9) а) $f(z)=\dfrac{3z^6-8z^4+2z+10}{3z^2}$; б) $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{2z}{z-4}$.

10) а) $f(z)=\dfrac{4+5z-2z^3+3z^5}{iz^4}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\sin\frac{1}{z}}{iz}$;

в) $f(z)=e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$.

11) а) $f(z)=\dfrac{1+2z-5z^2+3z^4-6z^6}{2z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{3z^2}-1}{3z^3}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{1}{z-2i}}$.

12) а) $f(z)=\dfrac{6z^7-5z^5+3z^3+2z+7}{6z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos iz-1}{iz^3}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z}{1-z}$.

13) а) $f(z)=\dfrac{3z^{10}+5z^5+2z-1}{4z^4}$; б) $f(z)=z^9\left(1-\sin\dfrac{1}{z^2}\right)$;

в) $f(z)=ze^{\frac{2z}{z-2i}}$.

14) а) $f(z)=\dfrac{11+19z-23z^3-z^4}{12z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(3z)-2-2z}{z^4}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{z}{z-4}}$.

15) а) $f(z)=\dfrac{7z^5-3z^4+7z^2+3z+10}{6z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{16z^2+\cos 4z}{z^3}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{2z+3i}{z+i}$.

16) а) $f(z)=\dfrac{10z^4-11z^2+7z+2}{5z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{ze^z-z-1}{z^3}$;

в) $f(z)=z^5\sin\left(\pi\dfrac{z^2+4i}{z^2}\right)$.

17) а) $f(z)=\dfrac{4z^2+6z^3-8z^4+9z^5}{3z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(2iz)-2iz}{z^4}$;

в) $f(z)=z^3\cos\left(\pi\dfrac{z+2}{z}\right)$.

18) а) $f(z)=\dfrac{7z^6-3z^4+2z^2+1}{5z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\operatorname{ch}2z^2}{3z^7}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{z+1}{z-1}}$.

19) а) $f(z)=\dfrac{1-3z+5z^2-4z^3+9z^7}{2z^2}$; б) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z^2+2z}{(z+1)^2}$.

20) а) $f(z)=\dfrac{10z^{10}-8z^8+6z^4-4z^2+5}{3z^3}$; б) $f(z)=\left(\dfrac{z}{2}\right)^4\sin\dfrac{2}{z}$;

в) $f(z)=z^3\cos\left(\pi\dfrac{z^2+i}{z^2}\right)$.

21) а) $f(z)=\dfrac{-6z^8-7z^5+3z^2+2z-3}{6z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{i}{z^2}}-1}{2z}$;

в) $f(z)=z\sin\dfrac{z^2+i}{z^2}$.

22) а) $f(z)=\dfrac{-z^7+5z^4-3z^3+2z^2+1}{10z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z-\sin z}{z^4}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3}$.

23) а) $f(z)=\dfrac{-4+2z+6z^2+5z^3}{5z^2}$; б) $f(z)=z^3\cos\dfrac{i}{z}$;

в) $f(z)=z^2\sin\dfrac{2z+3}{z}$.

24) а) $f(z)=\dfrac{8-16z^2+7z^4+5z^6}{2z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z-e^{\frac{z}{2}}}{z^3}$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+2i}$.

25) а) $f(z)=\dfrac{z^4-2z^3+2z^2-4z+1}{8z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{6z}-\cos 8z}{z^3}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$.

26) а) $f(z)=\dfrac{2z^8-3z^5+4z^2-6z+2}{3z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(iz)^2-e^{z^2}+1}{z^3}$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{iz+2}{z}$.

27) а) $f(z)=\dfrac{10-9z+8z^3-7z^5}{12z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+1-\cos z}{z^5}$;

в) $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+2}{z}\right)$.

28) а) $f(z)=\dfrac{-16z^8+12z^4+5z^3-2}{6z^5}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}+2i+3z}{z}$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-1}$.

29) а) $f(z)=\dfrac{4+3z^2-5z^3+6z^6}{2z^5}$; б) $f(z)=z^2\sin\dfrac{2}{z}$;

в) $f(z)=ze^{\frac{z-2i}{z-1}}$.

30) а) $f(z)=\dfrac{2z^9-6z^6+3z^3+2}{7z^5}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos 5z-1+25z^2}{z^3}$;

в) $f(z)=\sin\left(\pi\dfrac{z-1}{z-2}\right)$.

Задание 9

Дана функция $f(z)$ и точка z_0.

1. Докажите, что z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$.

2. Определите тип этой точки и найдите в ней вычет функции $f(z)$.

Варианты

1) а) $f(z)=\dfrac{z+\pi i}{e^{2z}+1}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{2}i$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg}(\pi z)}{z-z^2}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{e^{3z}-1-\frac{9}{2}z^2-\sin 3z}$, $z_0=0$.

2) а) $f(z)=\operatorname{tg}\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_0=-\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin(\pi z)}{2z^2+z-1}$, $z_0=-1$;

в) $f(z)=\dfrac{3z^3-5z^2}{\operatorname{ch}2z-1-2z^2}$, $z_0=0$.

3) а) $f(z)=\operatorname{ctg}2z$, $z_0=\dfrac{3\pi}{2}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}\left(z+\frac{\pi i}{3}\right)}{2\pi iz-3z^2}$, $z_0=\dfrac{2\pi}{3}i$;

в) $f(z)=\dfrac{4\pi-z}{\cos z-1}$, $z_0=4\pi$.

4) а) $f(z)=\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$, $z_0=-\frac{3\pi}{4}$; б) $f(z)=\frac{\sin\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}{3z+\pi}$, $z_0=-\frac{\pi}{3}$;

в) $f(z)=\frac{4z^2}{\operatorname{ch}2z-1-2z^2}$, $z_0=0$.

5) а) $f(z)=\frac{i-z}{\operatorname{ch}\left(z-\frac{\pi}{4}i\right)}$, $z_0=-\frac{\pi}{4}i$; б) $f(z)=\frac{\operatorname{ctg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{4z^2-5\pi z}$, $z_0=\frac{5\pi}{4}$;

в) $f(z)=\frac{z-z^2}{e^{4z}-1-4z-8z^2}$, $z_0=0$.

6) а) $f(z)=\frac{3z-\pi}{\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}$, $z_0=-\frac{3\pi}{4}$; б) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3-2z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\frac{z-2}{(z+1)\sin(z+1)}$, $z_0=-1$.

7) а) $f(z)=\frac{z^2+\pi}{\operatorname{ch}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)}$, $z_0=-\pi i$; б) $f(z)=\frac{\left(z^2-\pi^2\right)^2}{1+\cos z}$, $z_0=\pi$;

в) $f(z)=\frac{3z^3}{\operatorname{sh}z-z-\frac{z^3}{6}}$, $z_0=0$.

8) а) $f(z)=\frac{(2z-\pi)^2}{1+\cos 2z}$, $z_0=\frac{\pi}{2}$; б) $f(z)=\frac{2z^2+z}{\operatorname{ch}\left(z+\frac{\pi}{4}i\right)}$, $z_0=\frac{\pi}{4}i$;

в) $f(z)=\frac{-2z^3}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$, $z_0=0$.

9) а) $f(z)=\dfrac{(\pi-4z)^2}{1-\sin 2z},\ z_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{6z}{\cos\left(z+\dfrac{\pi}{6}\right)},\ z_0=\dfrac{\pi}{3}$;

в) $f(z)=\dfrac{4z^4+z^3}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}},\ z_0=0$.

10) а) $f(z)=\dfrac{8z}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-z\right)},\ z_0=\dfrac{7\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg}\left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\pi z^2-6z^3},\ z_0=\dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(z)=\dfrac{z^5+2z^4-z^3}{6z+36z^3-\operatorname{sh}6z},\ z_0=0$.

11) а) $f(z)=\dfrac{iz}{\sin\left(2z-\dfrac{\pi}{3}\right)},\ z_0=\dfrac{\pi}{6}$; б) $f(z)=\dfrac{(4z-7\pi)^2}{1+\cos 4z},\ z_0=\dfrac{7\pi}{4}$;

в) $f(z)=\dfrac{2z^2-z^3}{1-8z^2-\cos 4z},\ z_0=0$.

12) а) $f(z)=\dfrac{4z+i}{\operatorname{th}\left(z+\dfrac{\pi}{4}i\right)},\ z_0=\dfrac{3\pi}{4}i$; б) $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z^2-3z},\ z_0=0$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)},\ z_0=0$.

13) а) $f(z)=\dfrac{\left(4z^2-25\pi^2\right)^2}{-1-\cos 2z},\ z_0=\dfrac{5\pi}{2}$; б) $f(z)=\dfrac{2-z}{\sin\left(\dfrac{z}{2}+1\right)},\ z_0=2\pi-2$;

в) $f(z)=\dfrac{4z^2-8z}{z-2-\operatorname{sh}(z-2)},\ z_0=2$.

14) а) $f(z)=\dfrac{z^4}{\operatorname{sh}(z+2)}$, $z_0=-2$; б) $f(z)=\dfrac{\left(e^z-1\right)^2}{1+\cos z}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\dfrac{10z^4+z^5}{\operatorname{ch} z-\cos z-z^2}$, $z_0=0$.

15) а) $f(z)=\operatorname{th}(2iz)$, $z_0=-\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{8z^2-6\pi iz}{\operatorname{ch}\left(z-\dfrac{\pi i}{4}\right)}$, $z_0=\dfrac{3\pi}{4}i$;

в) $f(z)=\dfrac{z-1}{e^{2z}-\sin 2z-1}$, $z_0=0$.

16) а) $f(z)=\dfrac{\pi-z}{e^{-z}+1}$, $z_0=\pi i$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{z}{2}+\dfrac{\pi}{4}i\right)}{4z^2+\pi^2}$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}i$;

в) $f(z)=\dfrac{2z^2-2z}{z-1-\operatorname{sh}(z-1)}$, $z_0=1$.

17) а) $f(z)=\dfrac{\pi iz}{\operatorname{sh}(iz-1)}$, $z_0=\pi-i$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi z}{2}}{z^4-1}$, $z_0=-1$;

в) $f(z)=\dfrac{6z}{\cos 2z+e^{2z}-2-2z}$, $z_0=0$.

18) а) $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\operatorname{tg} 3z}$, $z_0=\pi$; б) $f(z)=\dfrac{1-\cos\pi z}{z^3+4z^2+4z}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^7-2z^8}{\sin z^3-z^3}$, $z_0=0$.

19) а) $f(z)=\dfrac{4z^3+1}{\cos\left(5z-\dfrac{3\pi}{4}\right)}$, $z_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{3}}{z^2+z-6}$, $z_0=-3$;

в) $f(z)=\dfrac{2z^7+z^6}{1-2z^4-\cos z^2}$, $z_0=0$.

20) а) $f(z)=\dfrac{z^2+\pi^2}{e^{4z}-1}$, $z_0=\dfrac{3\pi}{2}i$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}2\pi z}{z^2+1}$, $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{3z-z^2}{\sin z-\operatorname{sh} z}$, $z_0=0$.

21) а) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{\sin\left(\dfrac{z}{2}+1\right)}$, $z_0=-2$; б) $f(z)=\dfrac{4z^2+3\pi iz}{\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{\pi i}{4}\right)}$, $z_0=-\dfrac{3\pi}{4}i$;

в) $f(z)=\dfrac{z^3+2z^2+z}{\operatorname{ch}(z+1)-1-\dfrac{(z+1)^2}{2}}$, $z_0=-1$.

22) а) $f(z)=\dfrac{z^2+3}{\sin(z+3)}$, $z_0=-3$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{th}3\pi z}{z^2-iz+2}$, $z_0=-i$;

в) $f(z)=\dfrac{z^2-z-2}{(z-2)\sin(z-2)}$, $z_0=2$.

23) а) $f(z)=\dfrac{8z^2}{\sin(2iz)}$, $z_0=-\dfrac{\pi i}{2}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+9\pi^2}{1+e^{-z}}$, $z_0=3\pi i$;

в) $f(z)=\dfrac{3z^3-z^2}{e^{\frac{z^2}{2}}+\cos z-2}$, $z_0=0$.

24) а) $f(z)=\dfrac{9z^3}{\sin\left(\pi z+\dfrac{\pi}{3}\right)}$, $z_0=\dfrac{2}{3}$; б) $f(z)=\dfrac{\left(z^2+4\pi^2\right)^2}{1-\cos iz}$, $z_0=-2\pi i$;

в) $f(z)=\dfrac{5z^2+7z^3}{e^{z^2}-\cos z-\dfrac{3}{2}z^2}$, $z_0=0$.

25) а) $f(z)=\dfrac{4iz+2\pi}{\cos\left(iz+\dfrac{\pi}{4}\right)}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{4}i$; б) $f(z)=\dfrac{6z^2-\pi z}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2z\right)}$, $z_0=\dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(z)=\dfrac{5z^2-6z}{e^{\frac{z}{3}}-\sin\frac{z}{3}-1-\frac{z^2}{9}}$, $z_0=0$.

26) а) $f(z)=\dfrac{8z+\pi}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}-3z\right)}$, $z_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{z^2+\pi^2}{\sin(3iz)}$, $z_0=-\pi i$;

в) $f(z)=\dfrac{2z^4-z^5}{\operatorname{ch}z^2-e^{z^2}+z^2}$, $z_0=0$.

27) а) $f(z)=\dfrac{16z^3}{i\operatorname{ch}(2\pi z)}$, $z_0=-\dfrac{i}{4}$; б) $f(z)=\dfrac{\pi^2+4z^2}{1+e^{2z}}$, $z_0=\dfrac{\pi i}{2}$;

в) $f(z)=\dfrac{2z^4+4z^5}{\operatorname{ch}7z-\cos 7z-49z^2}$, $z_0=0$.

28) а) $f(z)=\dfrac{\left(z^2+4\pi^2\right)^2}{1-\cos 3iz}$, $z_0=2\pi i$; б) $f(z)=\dfrac{4z^3+\pi^2 z}{\sin(2iz)}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{2}i$;

в) $f(z)=\dfrac{z+z^2+2z^3}{e^{-3z}+\sin 3z-1-\frac{9}{2}z^2}$, $z_0=0$.

29) а) $f(z)=\dfrac{z^2}{e^{\frac{z}{2}}-i}$, $z_0=\pi i$; б) $f(z)=\dfrac{4z^3+\pi z^2}{\sin 2z-1}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

в) $f(z)=\dfrac{10z^7-9z^6}{\cos 2z^2-1+2z^4}$, $z_0=0$.

30) а) $f(z)=\dfrac{4z}{e^z+i}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{2}i$; б) $f(z)=\dfrac{4z^2+9\pi^2}{\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi i}{4}\right)}$, $z_0=\dfrac{3\pi}{2}i$;

в) $f(z)=\dfrac{3z+4z^2}{4\sin\frac{z}{2}-2z}$, $z_0=0$.

Задание 10

Используя теорему Коши о вычетах, вычислите интегралы.

Варианты

1) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i-3|=4} \frac{4-4z+8z^2-16z^3}{16z^2}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{4}\right|=1} \frac{z^2dz}{(4z^2-1)(1-\cos z)}$.

2) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z-1)^2(z+1)}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+\sqrt{5}-i|=3} z^2e^{\frac{2}{z}}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|=1} \frac{(2z+1)dz}{(z^3-1)\cos\pi z}$.

3) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z\,dz}{z^5}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1+2i|=3} ze^{\frac{z+i}{z-2}}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=1} \frac{dz}{(\sqrt{2}z+i+1)(z^4+1)}$.

4) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{(z+2)dz}{(z-2)^2(z+1)}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i+3|=4} \frac{7-7z+14z^2-5z^3}{2z^3}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=\frac{5}{2}} \frac{(z+2i)dz}{\left(e^{\frac{\pi z}{2i}}+1\right)(z-1+i)^2}$.

5) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+2)}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1-i|=3} \sin\frac{2z}{z-3i}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=\sqrt{2}} \frac{\left(z^2-\pi^2\right)dz}{\left(z^3-4z^2+4z\right)\sin 2z}$.

6) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{e^z dz}{z^2-2iz+8}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{8z^4-5z^3+z^2+3}{4z^3}dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=\sqrt{2}} \frac{(2z+i)dz}{(z-1+i)^2\left(e^{\pi z}+i\right)}$.

7) а) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{(2+z)dz}{z^3-2z^2+z}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2-3i|=4} \frac{\left(e^{z^2}-1\right)dz}{2z^5}$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\left(z^2-\pi^2\right)dz}{(z-3)^2\cos\frac{3z}{2}}$.

8) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{5}{2}} \frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=3} \frac{e^{iz}-1}{z^4}dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\left(z^2+9\right)^2 dz}{(iz+3)\sin\left(\frac{\pi iz}{3}\right)}$.

9) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=2} z\cos\frac{1}{z}\,dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\left(e^z+1\right)\left(9z^2-\pi^2\right)^2}$.

10) а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2dz}{(z+3)(z-2)^3}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{4+5z-2z^3+3z^5}{iz^4}dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{\left|z+\frac{\pi}{3}\right|=1} \frac{(3z+\pi)dz}{\left(8z^2+2z^3-z^4\right)\sin 3z}$.

11) а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3 dz}{(4+z^2)^2}$; б) $\oint\limits_{|z+1-3i|=2} z e^{\frac{1}{z-2i}} dz$;

в) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{4}} \frac{(z^2-1)dz}{(2z^2-z)\sin(\pi i z)}$.

12) а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{(2-3z)dz}{(z+2i)(z-2)^3}$; б) $\oint\limits_{|z-1+i|=2} \frac{\cos iz - 1}{iz^3} dz$;

в) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{9}{4}} \frac{(4z^2-9)^2 dz}{(2z^2-z-3)\cos\frac{\pi z}{3}}$.

13) а) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{(1+5z)dz}{z^3(z^2+z-2)}$; б) $\oint\limits_{|z+1|=3} z e^{\frac{2z}{z-2i}} dz$;

в) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{4}} \frac{(4z^2+1)dz}{(4z^2+9)(e^{\pi z}-i)}$.

14) а) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin 2z dz}{(z-2)(z+1)^3}$; б) $\oint\limits_{|z-\sqrt{3}+\sqrt{2}i|=3} \frac{\operatorname{sh} 3z - 2 - 2z}{z^4} dz$;

в) $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{4}\right|=1} \frac{(z-1)^2 dz}{(z^3-9z)(\cos\pi z+1)}$.

15) а) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z+4}{z^5-z^3} dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=2} \sin\frac{2z+3i}{z+i} dz$;

в) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{5}{4}} \frac{z dz}{(z^3+1)\sin\frac{z}{2}}$.

16) а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{3z dz}{(z^2+1)^2(z+3)}$; б) $\oint\limits_{|z-2i|=3} z^5 \sin\left(\pi\frac{z^2+4i}{z^2}\right) dz$;

в) $\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \dfrac{dz}{\left(z^2 - iz + 2\right)\sin\left(\dfrac{\pi iz}{2}\right)}$.

17) а) $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{e^z dz}{(z+i)^2(z-2)^2}$; б) $\oint\limits_{|z-1|=2} z^3 \cos\left(\pi \dfrac{z+2}{z}\right) dz$;

в) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}} \dfrac{(2z-1)^2 dz}{\left(z^2 - \dfrac{1}{4}\right)\sin(2\pi z)}$.

18) а) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{dz}{z^3\left(z^2-4\right)^2}$; б) $\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \dfrac{1-\operatorname{ch} 2z^2}{3z^7} dz$;

в) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{\left(z^3+z^2-z-1\right)\operatorname{sh} z}$.

19) а) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{3z\,dz}{(z+2i)(z+2)^3}$; б) $\oint\limits_{|z-1-i|=3} \dfrac{1-3z+5z^2-4z^3+9z^7}{2z^2} dz$;

в) $\oint\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \dfrac{dz}{\left(z^2-4\right)\left(e^{iz}+1\right)}$.

20) а) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\operatorname{ch} 3z}{(z-1)^3(z+3)} dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \left(\dfrac{z}{2}\right)^4 \sin\dfrac{2}{z}\, dz$;

в) $\oint\limits_{|z+3|=\frac{5}{2}} \dfrac{z^2+4z+3}{\left(z^3+2z^2\right)\cos\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)} dz$.

21) а) $\oint\limits_{|z-1+2i|=\frac{3}{2}} \dfrac{\operatorname{sh} iz}{(z-2i)^2(z+1)^2} dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=2} z \sin\dfrac{z^2+i}{z^2} dz$;

в) $\oint\limits_{|z+i|=3} \dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)\left(e^z+i\right)}$.

22) а) $\oint\limits_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1} \frac{(z+i)dz}{(z-i)^3 z^2}$; б) $\oint\limits_{\left|z+\sqrt{2}-i\right|=2} \frac{e^z-\sin z}{z^4}dz$;

в) $\oint\limits_{|z-1+i|=\frac{3}{2}} \frac{\left(1-z^2\right)dz}{(z-1+i)\left(z^4-1\right)}$.

23) а) $\oint\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{\cos 4z dz}{(z-2)^2(z+i)}$; б) $\oint\limits_{|z+1+2i|=3} \frac{-4+2z+6z^2+5z^3}{7z^2}dz$;

в) $\oint\limits_{|z+2i|=\frac{5}{2}} \frac{dz}{\left(z^2+\pi^2\right)\sin\frac{\pi z}{2}}$.

24) а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3\left(z^2+1\right)^2}$; б) $\oint\limits_{|z+i|=2} \cos\frac{z}{z+2i}dz$;

в) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{zdz}{\left(z^2-1\right)\left(e^{2z}-1\right)}$.

25) а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+i)dz}{\left(z^2+4\right)^2(z-2)}$; б) $\oint\limits_{\left|z+\sqrt{3}-\sqrt{2}i\right|=3} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z^3}dz$;

в) $\oint\limits_{\left|z+\frac{3}{4}i\right|=\frac{1}{2}} \frac{(2z+i)dz}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{sh}(2\pi z)}$.

26) а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 4z dz}{(z+1)^3}$; б) $\oint\limits_{|z-2i|=3} \sin\frac{iz+2}{z}dz$;

в) $\oint\limits_{|z+\pi|=\pi} \frac{dz}{\left(z^2-9\pi^2\right)\cos\frac{z}{2}}$.

27) а) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{dz}{z^4+2z^3}$; б) $\oint\limits_{|z-2+2i|=3} \frac{10-9z+8z^3-7z^5}{12z^4}dz$;

в) $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2-z-2}{\left(z^2-1\right)^2 \operatorname{ch} iz} dz$.

28) а) $\oint\limits_{|z-3-3i|=\frac{7}{2}} \frac{(2z+i)dz}{(z-3)^3\left(z^2+4\right)}$; б) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}i+1\right|=2} \frac{-16z^8+12z^4+5z^3-2}{6z^5} dz$;

в) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{(z-1)dz}{\left(z^3+4z^2+3z\right)\left(e^{\pi iz}+1\right)}$.

29) а) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\left(z^3+1\right)dz}{z(z-2i)^3}$; б) $\oint\limits_{|z+i|=2} ze^{\frac{z-2i}{z-1}} dz$;

в) $\oint\limits_{\left|z+\frac{3\pi}{2}\right|=\pi} \frac{dz}{\left(z^2+2z\right)\operatorname{sh}(iz)}$.

30) а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{3z}dz}{z^3(2z-1)}$; б) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right|=1} \frac{\cos 5z-1+25z^2}{z^3} dz$;

в) $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{(z-3)^2 dz}{\left(z^2-z-6\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi z}{2i}\right)}$.

Задание 11

С помощью вычетов вычислите интегралы от функций действительной переменной.

Варианты

1) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4}-\cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+\frac{1}{4})^2}$.

2) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{13}{4} - 3\cos x}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

3) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{26}{25} - \frac{2}{5}\sin x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9} dx$.

4) а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+\frac{1}{4}} dx$.

5) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2+\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin\frac{x}{2}}{(1+x^2)^2} dx$.

6) а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+\frac{1}{2})^2}$.

7) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{41}{25} - \frac{5}{2}\cos x}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

8) а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5}+\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+\frac{1}{9}} dx$.

9) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{5}{4} - \sin x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx$.

10) а) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin\frac{x}{3}}{(1+x^2)} dx$.

11) а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{25}{26} - \frac{3}{2}\cos x}$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$.

12) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{\frac{25}{9} - \frac{8}{3}\cos x}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

13) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}\sin x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4} dx$.

14) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2} + \cos x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{3}}{x^2+4} dx$.

15) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{5} + 2\cos x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{(1+x^2)^2} dx$.

16) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{17}{16} - \frac{\cos x}{2}}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+2)^2}$.

17) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{17 - 8\cos x}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(x^2+1)}$.

18) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{17}{16} - \frac{\sin x}{2}}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2+\frac{1}{4}} dx$.

19) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+\frac{1}{9}} dx$.

20) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{2 + \sqrt{3}\cos x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 4x}{(1+x^2)^2} dx$.

21) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos x}$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}$.

22) а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{5 - 4\cos x}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{9}\right)(x^2+1)}$.

23) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\sin x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \frac{x}{3}}{x^2+1} dx.$

24) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10} + \cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x^2+16} dx.$

25) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{6} + \sqrt{2}\cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(1+x^2)^2} dx.$

26) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{7}{5} - \frac{2}{5}\cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + \frac{1}{9}\right)^2}.$

27) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{10 - 6\cos x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right)}.$

28) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\frac{37}{36} - \frac{\sin x}{3}}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx.$

29) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{17} + \cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$

30) а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{10} + 3\cos x}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 3x}{(x^2+1)^2} dx.$

3.2. Образцы решений заданий по теме «Элементы теории функции комплексной переменной»

Задание 1

Изобразите на комплексной плоскости область D, заданную системой неравенств $\begin{cases} |z-1-i| \le \sqrt{2}, \\ \operatorname{Im}(z-1) \ge 1, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Проверьте подстановкой, является ли точка $z_0 = 1+\sqrt{3}i$ внутренней точкой области D.

Решение

Изобразим на комплексной плоскости области D_1, D_2 и D_3, являющиеся решениями соответствующих неравенств системы. Их пересечение – искомая область D.

Пусть $z = x + iy$. Тогда левая часть первого неравенства имеет вид

$$|z-1-i| = |x+iy-1-i| = |(x-1)+i(y-1)| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\,.$$

Следовательно,

$$|z-1-i| \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2\,.$$

Таким образом, область D_1 – решение первого неравенства данной системы – является кругом с центром в точке $z = 1+i$ и радиусом $\sqrt{2}$, изображенным на рис. 19. Поскольку неравенство нестрогое, то окружность $|z-1-i| = \sqrt{2}$ принадлежит области D_1, которая в нашем случае является замкнутой областью.

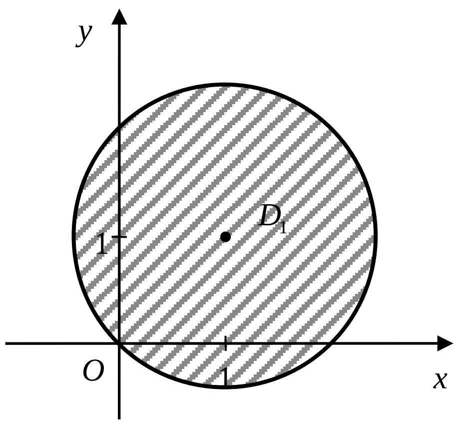


Рис. 19

Подставим $z = x + iy$ во второе неравенство системы. Получим $\mathrm{Im}(z-1) \ge 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x+iy-1) \ge 1 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Это неравенство определяет полуплоскость, лежащую сверху от прямой $y = 1$, включая и саму прямую. Область D_2 изображена на рис. 20.

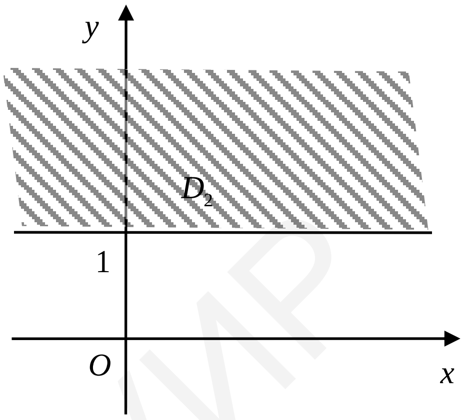


Рис. 20

Третье неравенство системы определяет множество точек плоскости, расположенных между лучами, исходящими из начала координат под углами $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ к оси Ox (область D_3). Заметим, что точки, лежащие на луче $\arg z = \frac{\pi}{4}$, в область D_3 не входят (рис. 21).

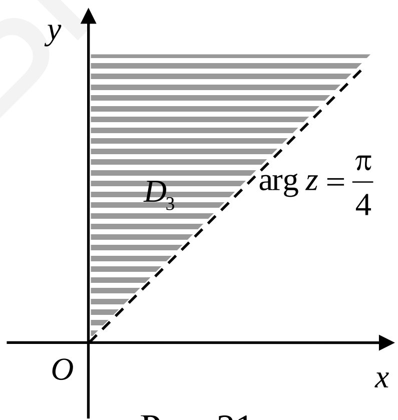


Рис. 21

Искомая область $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$ изображена на рис. 22.

Для того чтобы выяснить, является ли точка $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ внутренней точкой области D, проверим, выполняются ли для нее неравенства: $|z_0 - 1 - i| < \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z_0 - 1) > 1$, $\frac{\pi}{4} < \arg z_0 < \frac{\pi}{2}$.

$$|z_0 - 1 - i| = |1 + i\sqrt{3} - 1 - i| = |i(\sqrt{3} - 1)| =$$

$= \sqrt{3} - 1 < \sqrt{2}$ – верно,

$\mathrm{Im}(z_0 - 1) = \mathrm{Im}(1 + i\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} > 1$ – верно,

$$\arg z_0 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ – верно.}$$

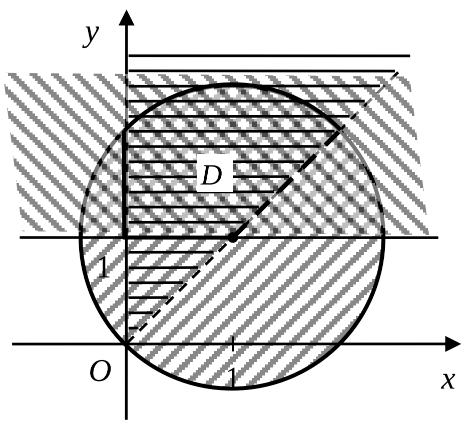


Рис. 22

Таким образом, $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ является внутренней точкой области D.

Задание 2

Вычислите значение функции $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z)=e^z$, $z_0=3-\pi i$; **б)** $f(z)=\mathrm{Ln}\,z$, $z_0=1+i$;

в) $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z$, $z_0=2i$.

Решение

а) Согласно формуле $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ имеем для $z_0=3-\pi i$:

$$f(z_0)=e^{3-\pi i}=e^3(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-e^3.$$

б) По определению, функция $\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ – бесконечнозначная. Найдем модуль и аргумент числа $z_0=1+i$:

$$|z_0|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \arg z_0=\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Тогда $f(z_0)=\mathrm{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

в) В соответствии с определением $\mathrm{Arccos}\,z=-i\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$.

$$\mathrm{Arccos}\,2i=-i\,\mathrm{Ln}\left(2i+\sqrt{(2i)^2-1}\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(2i+\sqrt{-5}\right)=-i\,\mathrm{Ln}\left(2i\pm\sqrt{5}i\right)=$$
$$=-i\,\mathrm{Ln}\left(i\left(2\pm\sqrt{5}\right)\right).$$

Найдем модули и аргументы чисел $i\left(2\pm\sqrt{5}\right)$:

$$\left|i\left(2+\sqrt{5}\right)\right|=2+\sqrt{5},\ \left|i\left(2-\sqrt{5}\right)\right|=\sqrt{5}-2,$$

$$\arg\left(i\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=\frac{\pi}{2},\ \arg\left(i\left(2-\sqrt{5}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\mathrm{Ln}\left(i\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ln}\left(i\left(2-\sqrt{5}\right)\right)=\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2nm\right),\ m\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Arccos}\,2i=-i\,\mathrm{Ln}\left(i\left(2\pm\sqrt{5}\right)\right)=\left[\begin{array}{l}-i\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right),\ k\in\mathbb{Z},\\ -i\left(\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+i\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right)\right),\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(2+\sqrt{5}\right),\ k\in\mathbb{Z},\\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi m-i\ln\left(\sqrt{5}-2\right),\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Задание 3

1. Решите уравнение $\left(2z^2+\pi z\right)\sin\pi z=0$.

2. Определите кратность корней данного уравнения.

3. Укажите корни, принадлежащие области $D:\ \left|z+2-i\right|<\dfrac{5}{4}$.

Решение

$$\left(2z^2+\pi z\right)\sin\pi z=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}2z^2+\pi z=0,\\ \sin\pi z=0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}z\left(2z+\pi\right)=0,\\ \pi z=\mathrm{Arcsin}\,0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}z=0,\\ z=-\dfrac{\pi}{2},\\ z=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arcsin}\,0.\end{array}\right.$$

1. Зная, что корни уравнения $\sin z=0$ имеют вид $z=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, получим $\sin\pi z=0\ \Leftrightarrow\ \pi z=\pi k\ \Leftrightarrow\ z=k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Таким образом, множество всех корней данного уравнения имеет вид

$$\left\{ z = 0,\ z = -\frac{\pi}{2},\ z_k = k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Для того чтобы определить кратность корней z_k уравнения $\sin \pi z = 0$, нужно установить, нулями какого порядка являются числа z_k для функции $f(z) = \sin \pi z$. Вычислим производную функции $f(z)$ в точках z_k:

$$f'(z) = (\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z \Big|_{z_k = k} = \pi \cos \pi k = \pi (-1)^k \neq 0.$$

Это означает, что числа $z_k = k,\ k \in \mathbb{Z}$ – простые нули функции $f(z)$, и, следовательно, простые корни уравнения $\sin \pi z = 0$.

Корень $z = 0$ является простым корнем уравнения $2z^2 + \pi z = 0$ и при этом является простым корнем уравнения $\sin \pi z = 0$, так как он содержится в наборе корней $z_k = k$ при $k = 0$. Следовательно, для исходного уравнения $z = 0$ – корень кратности 2; $z_k = k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – простые корни, $z = -\frac{\pi}{2}$ – простой корень, так как он не встречается в наборе корней $z_k = k$ ни при каком целом значении k.

3. Для того чтобы выяснить, какие из корней уравнения принадлежат области D, достаточно проверить, является ли верным неравенство $|z + 2 - i| < \frac{5}{4}$ для каждого из них.

$$z = -\frac{\pi}{2}:\ \left| -\frac{\pi}{2} + 2 - i \right| = \sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{4 - \pi}{2}\right)^2 + 1} \approx 1{,}09 < \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z = -\frac{\pi}{2} \in D.$$

$$z = 0:\ |0 + 2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} > \frac{5}{4}\ \Rightarrow\ \ z = 0 \notin D.$$

Проверим, при каких значениях k корни $z_k = k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ принадлежат области D. Решим неравенство

$$|k+2-i|<\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(k+2)^2+(-1)^2}<\frac{5}{4} \Leftrightarrow (k+2)^2+1<\frac{25}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k+2|<\frac{9}{16} \Leftrightarrow -\frac{9}{16}<k+2<\frac{9}{16} \Leftrightarrow -2\frac{9}{16}<k<-1\frac{7}{16}.$$

Последнее неравенство выполняется только при $k=-2$.

Таким образом, области D принадлежат корни $z=-\frac{\pi}{2}$ и $z=-2$.

Задание 4

Дана функция $f(z)=(z-1)(2\bar{z}+z)$.

1. Выделите ее действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части.

2. Выясните, является ли данная функция аналитической в области $D: |z+3-2i|>1$.

3. Вычислите $f'(z)$ в точках ее существования.

Решение

1. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$f(z)=(x+iy-1)(2(x-iy)+(x+iy))=(x+iy-1)(3x-iy)=$$
$$=3x^2+y^2-3x+i(2xy+y).$$

Значит, $u(x,y)=3x^2+y^2-3x$ – действительная часть, $v(x,y)=2xy+y$ – мнимая часть функции $f(z)$.

2. Поскольку функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются многочленами от x и y, то они дифференцируемы в любой точке $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Найдем их частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x-3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x+1.$$

Проверим, выполняются ли условия Коши – Римана (достаточные условия дифференцируемости) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ для данной функции:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 2x + 1, \\ 2y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4, \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, условия Коши – Римана выполняются в одной точке $(1;0)$. Следовательно, функция $f(z)$ является дифференцируемой только в точке $z = 1$ и не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости, в том числе и в области D.

3. Найдем производную функции $f(z)$ в точке $z = 1$. Применяя одну из формул для нахождения производной, например, $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$f'(1) = (6x - 3 + i \cdot 2y)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 3.$$

Задание 5

Вычислите интеграл от функции комплексной переменной по указанной кривой L.

а) $\int\limits_L (15z^4 + 8z^3 + 1)dz$, L – ломаная ABC, $z_A = -1$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -i$.

б) $\int\limits_L \mathrm{Im}(z - 2 + i)dz$, L – кривая ABC, где AB – дуга параболы $y = x^2 - 1$, $z_A = 1$, $z_B = -i$, BC – отрезок, $z_C = -1$.

в) $\int\limits_L (3|z| + 1)z\,dz$, $L: \left\{ |z| = \sqrt{2}, \quad \dfrac{3\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{5\pi}{4} \right\}$.

Решение

а) Поскольку подынтегральная функция $f(z)=15z^4+8z^3+1$ является аналитической на всей комплексной плоскости, то интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной точки $z_A=-1$ и конечной точки $z_C=-i$. Поэтому

$$\int\limits_L \left(15z^4+8z^3+1\right)dz=\int\limits_{-1}^{-i}\left(15z^4+8z^3+1\right)dz.$$

Применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1)$$

для вычисления полученного определенного интеграла:

$$\int\limits_{-1}^{-i}\left(15z^4+8z^3+1\right)dz=\left(3z^5+2z^4+z\right)\Big|_{-1}^{-i}=$$

$$=3(-i)^5+2(-i)^4+(-i)-3(-1)^5-2(-1)^4-(-1)=-3i+2-i+3-2+1=4-4i.$$

б) Изобразим кривую интегрирования L (рис. 23)

Согласно свойству аддитивности

$$\int\limits_L \operatorname{Im}(z-2+i)dz=\int\limits_{AB}\operatorname{Im}(z-2+i)dz+\int\limits_{BC}\operatorname{Im}(z-2+i)dz=I_1+I_2.$$

Вычислим I_1. Запишем уравнение дуги параболы AB в комплексной форме:

$$z=x+i\left(x^2-1\right),$$

где x изменяется от $x_A=\operatorname{Re} z_A=1$ до $x_B=\operatorname{Re} z_B=0$.

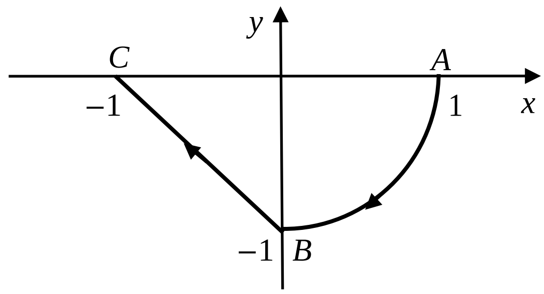


Рис. 23

Так как $z=x+i\left(x^2-1\right)$, то

$$dz=\left(x+i\left(x^2-1\right)\right)'dx=(1+2ix)dx.$$

Вычислим значение подынтегральной функции $\operatorname{Im}(z-2+i)$ в точках кривой AB:

$$\operatorname{Im}(z-2+i)=\operatorname{Im}\left(x+i\left(x^2-1\right)-2+i\right)=x^2.$$

Тогда

$$\int_{AB}\operatorname{Im}(z-2+i)dz=\int_1^0 x^2(1+2ix)dx=\int_1^0\left(x^2+2ix^3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2i\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^0=$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{i}{2}.$$

Вычислим I_2. Уравнение прямой, проходящей через точки $B(0;-1)$ и $C(-1;0)$, в декартовых координатах имеет вид $y=-x-1$.

Запишем это уравнение в комплексной форме:

$$z=x+i(-x-1),$$

где x изменяется от $x_B=\operatorname{Re}z_B=0$ до $x_C=\operatorname{Re}z_C=-1$.

Вычислим $dz=\left(x+i(-x-1)\right)'dx=(1-i)dx$.

Найдем значение подынтегральной функции $\operatorname{Im}(z-2+i)$ в точках отрезка BC:

$$\operatorname{Im}(z-2+i)=\operatorname{Im}(x+i(-x-1)-2+i)=-x.$$

Тогда

$$\int_{BC}\operatorname{Im}(z-2+i)dz=\int_0^{-1}(-x)(1-i)dx=(i-1)\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{-1}=\frac{i-1}{2}.$$

Таким образом, исходный интеграл

$$\int_L\operatorname{Im}(z-2+i)dz=-\frac{1}{3}-\frac{i}{2}+\frac{i-1}{2}=-\frac{5}{6}.$$

в) Кривой интегрирования L является дуга окружности $|z|=\sqrt{2}$ с центром в точке $z_0=0$ и радиусом $\sqrt{2}$ (рис. 24).

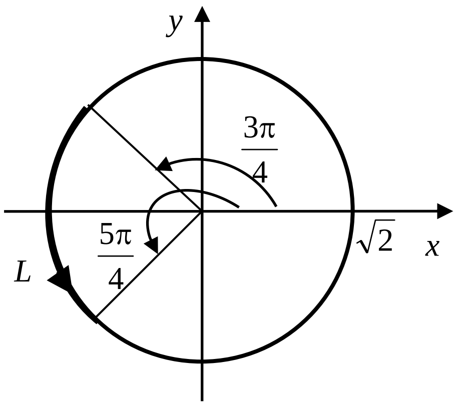


Рис. 24

Уравнение дуги окружности L в комплексной форме имеет вид $z=\sqrt{2}e^{i\varphi}$, где $\varphi=\arg z\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Так как $z=\sqrt{2}e^{i\varphi}$, то $dz=\left(\sqrt{2}e^{i\varphi}\right)'d\varphi=\sqrt{2}ie^{i\varphi}d\varphi$.

Значение подынтегральной функции $f(z)=(3|z|+1)z$ в точках дуги L имеет вид $f(z)=(3|z|+1)z=\left(3\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}e^{i\varphi}$.

Тогда

$$\int\limits_L(3|z|+1)z\,dz=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(3\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}e^{i\varphi}\sqrt{2}ie^{i\varphi}d\varphi=\left(3\sqrt{2}+1\right)\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}e^{2i\varphi}d(2i\varphi)=$$

$$=\left(3\sqrt{2}+1\right)e^{2i\varphi}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(e^{\frac{5\pi i}{2}}-e^{\frac{3\pi i}{2}}\right)=$$

$$=\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}-\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\left(3\sqrt{2}+1\right)(i-i(-1))=$$
$$=2\left(3\sqrt{2}+1\right)i.$$

Задание 6

Дана функция $f(z)$. Используя интегральную теорему Коши или интегральную формулу Коши, вычислите $\oint\limits_C\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz$, если

а) $C:|z-i|=1$; **б)** $C:|z-i|=2$; **в)** $C:|z-i|=3$.

Решение

Изолированными особыми точками подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{ze^{2z}}{z^2-z-2}$ являются нули ее знаменателя. Найдем их.

$$z^2-z-2=0 \;\Leftrightarrow\; (z-2)(z+1)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} z_1=2, \\ z_2=-1. \end{array}\right.$$

а) Контуром интегрирования C является окружность с центром в точке $z_0=i$ и радиусом 1. Проверим, принадлежат ли особые точки $z_1=2$ и $z_2=-1$ подынтегральной функции $f(z)$ кругу $D:|z-i|<1$:

$$|z_1-i|=|2-i|=\sqrt{5}>1 \;\Rightarrow\; z_1=2\notin D;$$

$$|z_2-i|=|-1-i|=\sqrt{2}>1 \;\Rightarrow\; z_2=-1\notin D.$$

Так как особые точки подынтегральной функции $f(z)$ не принадлежат кругу D, то функция $f(z)$ является аналитической в области D. По интегральной теореме Коши получаем

$$\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz=0.$$

б) Контуром интегрирования C является окружность с центром в точке $z_0=i$ и радиусом 2. Выясним, какие из точек $z_1=2$ и $z_2=-1$ принадлежат кругу $D:|z-i|<2$.

Так как $|z_1-i|=|2-i|=\sqrt{5}>2$, а $|z_2-i|=|-1-i|=\sqrt{2}<2$, то только точка $z_2=-1$ принадлежит кругу $D:|z-i|<2$.

Таким образом, подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{ze^{2z}}{z^2-z-2}$ является аналитической во всех точках области D, кроме точки $z_2=-1$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}=\frac{ze^{2z}}{(z-2)(z+1)}=\frac{\dfrac{ze^{2z}}{z-2}}{z+1}=\frac{\varphi(z)}{z+1},$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в круге $D: |z-i|<2$.

Для вычисления интеграла применим интегральную формулу Коши $\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\,\varphi(z_0)$:

$$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz=\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{\dfrac{ze^{2z}}{z-2}}{z+1}dz=2\pi i\left.\frac{ze^{2z}}{z-2}\right|_{z=-1}=2\pi i\cdot\frac{-1\cdot e^{-2}}{-3}=\frac{2\pi i}{3e^2}.$$

в) Контуром интегрирования C является окружность с центром в точке $z_0=i$ и радиусом 3. Кругу $D: |z-i|<3$ принадлежат обе особые точки $z_1=2$ и $z_2=-1$ подынтегральной функции $f(z)$, так как

$$|z_1-i|=|2-i|=\sqrt{5}<3 \text{ и } |z_2-i|=|-1-i|=\sqrt{2}<3.$$

Построим окружности C_1 и C_2 с центрами в особых точках $z_1=2$ и $z_2=-1$ достаточно малых радиусов r_1 и r_2, таких, чтобы эти окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-i|<3$.

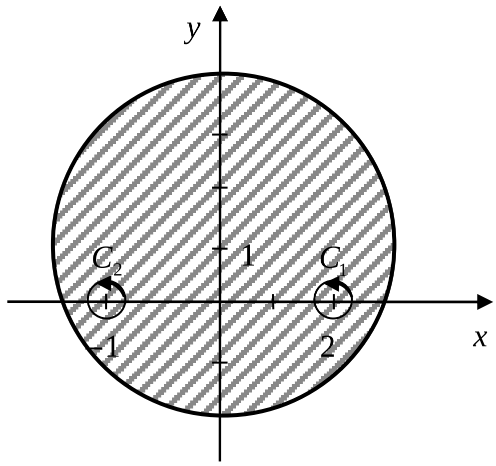


Рис. 25

В трехсвязной области, ограниченной окружностями C_1, C_2 и C (рис. 25), подынтегральная функция всюду аналитична.

Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z-i|=3}\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz=\oint\limits_{C_1}\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz+\oint\limits_{C_2}\frac{ze^{2z}}{z^2-z-2}dz.$$

Вычислим интегралы в правой части последнего равенства с помощью интегральной формулы Коши:

$$\oint_{C_1} \frac{ze^{2z}}{z^2 - z - 2} dz = \oint_{|z-2|=r_1} \frac{\frac{ze^{2z}}{z+1}}{z-2} dz = 2\pi i \left.\frac{ze^{2z}}{z+1}\right|_{z=2} = 2\pi i \cdot \frac{2e^{2z}}{3} = \frac{4}{3}\pi e^4 i,$$

$$\oint_{C_2} \frac{ze^{2z}}{z^2 - z - 2} dz = \oint_{|z+1|=r_2} \frac{\frac{ze^{2z}}{z-2}}{z+1} dz = 2\pi i \left.\frac{ze^{2z}}{z-2}\right|_{z=-1} = 2\pi i \cdot \frac{-e^{-2}}{-3} = \frac{2\pi}{3e^2} i.$$

Таким образом,

$$\oint_{|z-i|=3} \frac{ze^{2z}}{z^2 - z - 2} dz = \frac{4\pi e^4}{3} i + \frac{2\pi}{3e^2} i = \frac{2\pi\left(2e^6 + 1\right)}{3e^2} i.$$

Задание 7

Дано разложение функции $f(z) = \sum\limits_{n=-2}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(3n+8)!}$ в ряд Лорана в окрестности $0 < |z - 2i| < R$ изолированной особой точки $z_0 = 2i$.

1. Определите тип особой точки $z_0 = 2i$ функции $f(z)$.

2. Найдите вычет функции $f(z)$ в указанной точке.

3. Вычислите интегралы $\oint\limits_{|z-2i|=r} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz$ и $\oint\limits_{|z-2i|=r} f(z)(z-2i)^2 dz$, где $0 < r < R$.

Решение

Согласно условию функция $f(z)$ в окрестности $0 < |z - 2i| < R$ особой точки $z_0 = 2i$ представлена рядом Лорана:

$$\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(3n+8)!}=\frac{(z-2i)^{-2}}{(3\cdot(-2)+8)!}+\frac{(z-2i)^{-1}}{(3\cdot(-1)+8)!}+\frac{(z-2i)^{0}}{(3\cdot 0+8)!}+\frac{(z-2i)^{1}}{(3\cdot 1+8)!}+$$

$$+\frac{(z-2i)^{2}}{(3\cdot 2+8)!}+\ldots=\frac{1}{2!(z-2i)^2}+\frac{1}{5!(z-2i)}+\frac{1}{8!}+\frac{z-2i}{11!}+\frac{(z-2i)^2}{14!}+\ldots .$$

1. Поскольку главная часть ряда Лорана $\frac{1}{2!(z-2i)^2}+\frac{1}{5!(z-2i)}$ содержит два слагаемых, то $z_0=2i$ является полюсом второго порядка функции $f(z)$.

2. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0=2i$ равен коэффициенту c_{-1} при степени $n=-1$ двучлена $(z-2i)$, т. е. при $(z-2i)^{-1}=\frac{1}{z-2i}$ в разложении этой функции в ряд Лорана по степеням $(z-2i)$. Таким образом, $\operatorname{res} f(2i)=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$.

3. Коэффициенты c_n ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности $0<|z-2i|<R$ особой точки $z_0=2i$ вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-2i|=r}\frac{f(z)}{(z-2i)^{n+1}}dz,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

где $|z-2i|=r$ – произвольная окружность радиусом $r<R$. Следовательно,

$$\oint\limits_{|z-2i|=r}\frac{f(z)}{(z-2i)^{n+1}}dz=2\pi i\cdot c_n .$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z-2i|=r}\frac{f(z)}{(z-2i)^{2}}dz=\oint\limits_{|z-2i|=r}\frac{f(z)}{(z-2i)^{1+1}}dz=2\pi i\cdot c_1=2\pi i\cdot\frac{1}{11!}=\frac{2\pi i}{11!},$$ так как в соответствии с данным лорановским разложением коэффициент c_1 при $z+i$ равен $\frac{1}{11!}$.

Аналогично

$$\oint\limits_{|z-2i|=r} f(z)(z-2i)^2 dz = \oint\limits_{|z-2i|=r} \frac{f(z)}{(z-2i)^{-2}} dz = \oint\limits_{|z-2i|=r} \frac{f(z)}{(z-2i)^{-3+1}} dz = 2\pi i \cdot c_{-3} =$$
$$= 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Задание 8

Дана функция $f(z)$.

1. Определите изолированную особую точку z_0 данной функции и разложите $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

2. Укажите правильную и главную части ряда Лорана. Определите тип особой точки z_0 и найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

а) $f(z) = \dfrac{z^6 - 5z^7 + 4z^{10} - 7z^{11}}{z^6}$; **б)** $f(z) = \dfrac{e^{z^3} - 1}{z^7}$; **в)** $f(z) = \sin\dfrac{z+i}{z-i}$.

Решение

а) 1. Поскольку функция $f(z) = \dfrac{z^6 - 5z^7 + 4z^{10} - 7z^{11}}{z^6}$ определена и аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, то ее изолированной особой точкой является $z_0 = 0$. Разделив числитель функции на знаменатель, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < +\infty$:

$$f(z) = 1 - 5z + 4z^4 - 7z^5.$$

2. Правильная часть ряда Лорана содержит все четыре члена, а главная часть отсутствует. Отсюда следует, что $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Вычет функции в устранимой особой точке равен нулю, т. е. $\operatorname{res} f(0) = 0$.

б) 1. Функция $f(z)=\dfrac{e^{z^3}-1}{z^7}$ определена в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и является там аналитической. Следовательно, $z_0=0$ – единственная изолированная особая точка функции $f(z)$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<+\infty$. Для этого используем разложение функции e^t в ряд Маклорена:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots,\ t\in\mathbb{C}.$$

Полагая $t=z^3$, получим

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(e^{z^3}-1\right)=\frac{1}{z^7}\left(1+z^3+\frac{\left(z^3\right)^2}{2!}+\frac{\left(z^3\right)^3}{3!}+\frac{\left(z^3\right)^4}{4!}+\ldots+\frac{\left(z^3\right)^n}{n!}+\ldots-1\right)=$$

$$=\frac{1}{z^7}\left(z^3+\frac{z^6}{2}+\frac{z^9}{6}+\frac{z^{12}}{24}+\ldots\right)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2z}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^5}{24}+\ldots.$$

2. Главная часть ряда Лорана содержит два члена $\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{2z}$, а правильная часть $\dfrac{z^2}{6}+\dfrac{z^5}{24}+\ldots$ содержит бесконечное число слагаемых. Из того что главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, заключаем, что $z_0=0$ является полюсом функции $f(z)$. Порядок полюса равен 4. Вычет функции $f(z)$ в точке $z_0=0$, как коэффициент c_1 при степени z^{-1}, будет равен $\dfrac{1}{2}$, т. е. $\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}$.

в) 1. Так как $f(z)$ определена в области $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ и является там аналитической функцией, то ее единственной изолированной особой точкой является $z_0=i$. Чтобы воспользоваться рядами Маклорена для разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=i$, преобразуем $f(z)$:

$$f(z)=\sin\frac{z+i}{z-i}=\sin\frac{(z-i)+2i}{z-i}=\sin\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)=$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{2i}{z-i}+\cos 1\cdot\sin\frac{2i}{z-i}.$$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z-i|<+\infty$. Для этого применим разложения функций $\sin t$ и $\cos t$ в ряд Маклорена:

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1},\ t\in\mathbb{C},$$

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n},\ t\in\mathbb{C}.$$

Полагая $t=\dfrac{2i}{z-i}$, получим

$$f(z)=\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2i}{z-i}\right)^{2n}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2i}{z-i}\right)^{2n+1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}(-1)^n\cdot(2i)^{2n}=(-1)^n\cdot 4^n\cdot\left(i^2\right)^n=(-1)^n\cdot 4^n\cdot(-1)^n=4^n\\ (-1)^n\cdot(2i)^{2n+1}=(-1)^n\cdot(2i)^{2n}\cdot 2i=2i\cdot 4^n\end{array}\right|=$$

$$=\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!(z-i)^{2n}}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i\cdot 4^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}}=$$

$$=\sin 1\cdot\left(1+\frac{2}{(z-i)^2}+\ldots\right)+\cos 1\cdot\left(\frac{2i}{z-i}+\frac{8i}{3!(z-i)^3}+\ldots\right)=$$

$$=\sin 1+\sin 1\cdot\left(\frac{2}{(z-i)^2}+\ldots\right)+\cos 1\cdot\left(\frac{2i}{z-i}+\frac{8i}{3!(z-i)^3}+\ldots\right)=$$

$$=\sin 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 1\cdot 4^n}{(2n)!(z-i)^{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 1\cdot 2i\cdot 4^{n-1}}{(2n-1)!(z-i)^{2n-1}}=$$

$$=\sin 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i\cdot\cos 1\cdot 4^{n-1}}{(2n-1)!(z-i)^{2n-1}}+\frac{\sin 1\cdot 4^n}{(2n)!(z-i)^{2n}}\right).$$

2. Правильная часть ряда Лорана содержит только один член – $\sin 1$. Главная часть $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i\cdot\cos 1\cdot 4^{n-1}}{(2n-1)!(z-i)^{2n-1}}+\frac{\sin 1\cdot 4^{n}}{(2n)!(z-i)^{2n}}\right)$ ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых. Отсюда заключаем, что $z_0=i$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции $f(z)$ в точке $z_0=i$, как коэффициент c_{-1} при степени $(z-i)^{-1}$, будет равен $\operatorname{res} f(i)=2i\cos 1$.

Задание 9

Дана функция $f(z)$ и точка z_0.

1. Докажите, что z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$.

2. Определите тип этой точки и найдите в ней вычет функции $f(z)$.

а) $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{\operatorname{sh}(z-1)},\ z_0=1;$ **б)** $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{z^2-\frac{\pi}{4}z},\ z_0=\dfrac{\pi}{4};$

в) $f(z)=\dfrac{3z^2}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}},\ z_0=0.$

Решение

а) 1. Заметим, что функция $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{\operatorname{sh}(z-1)}$ задана как частное функций $\varphi(z)=2z^3+1$ и $\psi(z)=\operatorname{sh}(z-1)$, аналитических на всей комплексной плоскости. А значит, и сама функция $f(z)$ тоже является аналитической во всех точках плоскости за исключением нулей ее знаменателя $\psi(z)$. Найдем их:

$$\operatorname{sh}(z-1)=0 \Leftrightarrow z-1=\pi k i \Leftrightarrow z=1+\pi k i,\ k\in\mathbb{Z}.$$

При $k=0$ мы получаем данную точку $z_0=1$, следовательно, функция $f(z)$ теряет аналитичность в этой точке, т. е. $z_0=1$ – особая точка $f(z)$.

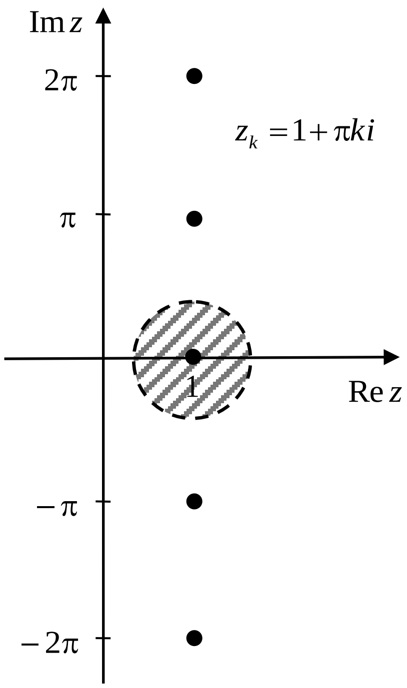


Рис. 26

Очевидно, что существует окрестность точки $z_0=1$, в которой эта особая точка является единственной (рис. 26).

Таким образом, $z_0=1$ – изолированная особая точка функции $f(z)$ (ИОТ).

2. Определим тип ИОТ $z_0=1$. Поскольку в этой точке числитель $\varphi(z)=2z^3+1\Big|_{z=1}=3\neq 0$, а знаменатель $\psi(z)=\operatorname{sh}(z-1)\Big|_{z=1}=\operatorname{sh}0=0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z^3+1}{\operatorname{sh}(z-1)}=\left[\dfrac{3}{0}\right]=\infty$. Это означает, что ИОТ $z_0=1$ – полюс функции $f(z)$. Определим порядок полюса: точка z_0 будет полюсом порядка n, если она является нулем порядка n для функции $\psi(z)=\operatorname{sh}(z-1)$ – знаменателя дроби $f(z)$. Вычислим первую производную функции $\psi(z)$ в точке $z_0=1$:

$$\psi'(z)=\operatorname{ch}(z-1)\Big|_{z=1}=\operatorname{ch}0=1\neq 0.$$

Так как $\psi(1)=0$, $\psi'(1)\neq 0$, то $z_0=1$ – простой нуль функции $\psi(z)$, и, следовательно, простой полюс функции $f(z)$.

Для нахождения вычета функции $f(z)$ в простом полюсе $z_0 = 1$ воспользуемся формулой $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$:

$$\operatorname{res} f(1) = \left.\frac{2z^3+1}{\left(\operatorname{sh}(z-1)\right)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{2z^3+1}{\operatorname{ch}(z-1)}\right|_{z=1} = \frac{2\cdot 1^3+1}{\operatorname{ch} 0} = \frac{3}{1} = 3.$$

б) 1. Функция $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$ задана как частное двух функций $\varphi(z) = \operatorname{tg}\left(z - \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\psi(z) = z^2 - \dfrac{\pi}{4}z$. Функция $\psi(z)$ аналитическая на всей комплексной плоскости, а функция $\varphi(z)$ является аналитической во всех точках своей области определения:

$$z - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Следовательно, особыми точками функции $f(z)$ являются $z_k = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$, а также нули знаменателя $\psi(z)$: $z = 0$ и $z = \dfrac{\pi}{4}$.

Данная в условии точка $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, поскольку существует окрестность точки $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$, в которой нет других особых точек функции $f(z)$ (рис. 27).

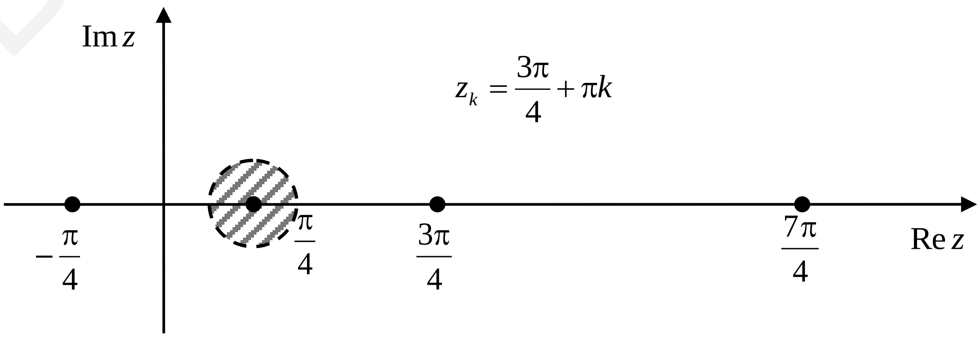


Рис. 27

Определим тип изолированной особой точки $z_0=\frac{\pi}{4}$. Заметим, что и числитель, и знаменатель функции $f(z)$ обращаются в нуль в этой точке. Определим порядок нуля $z_0=\frac{\pi}{4}$ функции $\varphi(z)$. Найдем $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\varphi'(z)=\left.\frac{1}{\cos^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\right|_{z=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1\neq 0.$$

Поскольку $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, то $z_0=\frac{\pi}{4}$ – простой нуль функции $\varphi(z)$, и, следовательно, простой полюс функции $f(z)$.

Очевидно, что $z_0=\frac{\pi}{4}$ является простым нулем функции $\psi(z)$:

$$\psi(z)=z^2-\frac{\pi}{4}z=z\left(z-\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, $z_0=\frac{\pi}{4}$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Вычет в устранимой особой точке равен нулю, т. е. $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

в) 1. Функция $f(z)=\dfrac{3z^2}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$, заданная как частное двух аналитических $\varphi(z)=3z^2$ и $\psi(z)=\cos z-1+\frac{z^2}{2}$, является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением нуля знаменателя $\psi(z)$: $z_0=0$. Единственная особая точка $z_0=0$, очевидно, будет изолированной особой точкой функции $f(z)$.

2. Определим тип точки $z_0 = 0$. Очевидно, она является нулем второго порядка функции $\varphi(z)$. Установим, нулем какого порядка для функции $\psi(z)$ является $z_0 = 0$. Найдем:

$$\psi'(z) = -\sin z + z\Big|_{z=0} = 0;$$

$$\psi''(z) = -\cos z + 1\Big|_{z=0} = 0;$$

$$\psi'''(z) = \sin z\Big|_{z=0} = 0;$$

$$\psi^{\mathrm{IV}}(z) = \cos z\Big|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

Из того что $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = 0$ и $\psi^{\mathrm{IV}}(0) \neq 0$, заключаем, что $z_0 = 0$ – нуль четвертого порядка функции $\psi(z)$.

Поскольку $z_0 = 0$ является нулем второго порядка числителя функции $f(z)$ и нулем четвертого порядка знаменателя функции $f(z)$, то данная особая точка $z_0 = 0$ – полюс второго порядка функции $f(z)$.

Для нахождения вычета $f(z)$ в точке $z_0 = 0$ воспользуемся формулой $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$, где k – порядок полюса.

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0} \left(z^2 \cdot \frac{3z^2}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{3z^4}{1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots - 1 + \dfrac{z^2}{2}} \right)' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{3z^4}{\dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots} \right)' =$$

$$=3\lim_{z\to0}\left(\frac{z^4}{z^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)}\right)'=3\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots}\right)'=$$

$$=3\lim_{z\to0}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)'=$$

$$=3\lim_{z\to0}\left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)^2}\right)\cdot\left(-\frac{2z}{6!}+\ldots\right)=0.$$

Задание 10

Используя теорему Коши о вычетах, вычислите интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{dz}{z^3(z+1)}$; **б)** $\oint\limits_{|z+2-2i|=3}\sin\frac{z+i}{z-i}dz$;

в) $\oint\limits_{|z+2-i|=\frac{5}{4}}\frac{z+2}{\left(2z^2+\pi z\right)\sin\pi z}dz$.

Решение

а) Подынтегральная функция $\frac{1}{z^3(z+1)}$ имеет две особые точки: $z=0$ – полюс третьего порядка и $z=-1$ – простой полюс.

Проверим, принадлежат ли эти особые точки области D, ограниченной контуром $|z-1|=3$, т. е. кругу $|z-1|<3$.

$z=0$: $|0-1|=1<3 \Rightarrow z=0\in D$;

$z=-1$: $|-1-1|=2<3 \Rightarrow z=-1\in D$.

Таким образом, функция $f(z)$ является аналитической всюду в области D, за исключением точек $z=0$ и $z=-1$.

Найдем вычеты функции $f(z)$ в этих точках.

Для вычисления вычета в полюсе третьего порядка воспользуемся формулой

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n\cdot f(z)\right),$$

где n – порядок полюса.

Для точки $z=0$ порядок полюса $n=3$, поэтому

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{1}{z^3(z+1)}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left((z+1)^{-1}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-(z+1)^{-2}\right)'=-\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-2(z+1)^{-3}\right)=1.$$

Найдем вычет функции $f(z)$ в простом полюсе $z=-1$. Применяя формулу $\operatorname{res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$, получим

$$\operatorname{res} f(-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^3(z+1)}=\frac{1}{(-1)^3}=-1.$$

Согласно теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{dz}{z^3(z+1)}=2\pi i\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(-1)\right)=2\pi i\left(1+(-1)\right)=0.$$

б) При решении задания 8 было установлено, что функция $f(z)=\sin\dfrac{z+i}{z-i}$ имеет существенно особую точку $z_0=i$, вычет в которой равен $2i\cos 1$. Выясним, принадлежит ли точка $z_0=i$ области, ограниченной контуром $|z+2-2i|=3$, т. е. кругу D: $|z+2-2i|<3$.

$$|z_0+2-2i|=|i+2-2i|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}<3 \Rightarrow z_0=i\in D.$$

Таким образом, функция $f(z)=\sin\frac{z+i}{z-i}$ является аналитической в области D всюду, за исключением точки $z_0=i$. Согласно теореме Коши о вычетах, получим

$$\oint\limits_{|z+2-2i|=3}\sin\frac{z+i}{z-i}dz=2\pi i\cdot\operatorname{res}f(i)=2\pi i\cdot 2i\cos 1=-4\pi\cos 1.$$

в) Особыми точками подынтегральной функции $f(z)=\frac{z+2}{(2z^2+\pi z)\sin\pi z}$ являются нули ее знаменателя. В результате решения задания 3 были найдены корни уравнения $(2z^2+\pi z)\sin\pi z=0$, а также было установлено, что кругу $D:|z+2-i|<\frac{5}{4}$ принадлежат два корня $z_1=-\frac{\pi}{2}$ и $z_2=-2$. Обе точки z_1 и z_2 являются простыми нулями знаменателя функции $f(z)$.

Числитель функции $f(z)$ обращается в нуль только при $z_2=-2$. Следовательно, $z_1=-\frac{\pi}{2}$ является простым полюсом функции $f(z)$. Точка $z_2=-2$ является простым нулем числителя функции $f(z)$. Таким образом, $z_2=-2$ – простой нуль как числителя, так и знаменателя подынтегральной функции. Отсюда заключаем, что $z_2=-2$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в устранимой особой точке равен нулю, т. е. $\operatorname{res}f(-2)=0$.

Найдем вычет $f(z)$ в простом полюсе $z_1=-\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{res}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\frac{z+2}{(2z^2+\pi z)\sin\pi z}=$$

$$= \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{z+2}{2z \cdot \sin \pi z} = \frac{-\frac{\pi}{2}+2}{2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)} = \frac{4-\pi}{2\pi \sin \frac{\pi^2}{2}}.$$

Итак, подынтегральная функция $f(z)$ является аналитической в области $D: |z+2-i| < 2$ всюду, за исключением точек $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $z_2 = -2$. Согласно теореме Коши о вычетах получим

$$\oint_{|z+2-i|=2} \frac{z+2}{(2z^2+\pi z)\sin \pi z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{res} f(-2) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{4-\pi}{2\pi \sin \frac{\pi^2}{2}} + 0 \right) = \frac{(4-\pi)i}{\sin \frac{\pi^2}{2}}.$$

Задание 11

С помощью вычетов вычислите интегралы от функций действительной переменной.

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{17 - 8\sin x}$; **б)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4x dx}{x^2 + \frac{1}{4}}$.

Решение

а) Данный определенный интеграл с помощью подстановки $e^{ix} = z$ преобразуем к контурному интегралу по окружности $|z| = 1$ от функции комплексной переменной.

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x dx}{17-8\sin x}=\left|\begin{array}{l} z=e^{ix} \\ dz=ie^{ix}dx \;\Rightarrow\; dx=\dfrac{dz}{iz} \\ \sin x=\dfrac{z^2-1}{2iz},\ \cos x=\dfrac{z^2+1}{2z} \end{array}\right|=\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)dz}{2ziz\left(17-8\sin\dfrac{z^2-1}{2iz}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)dz}{z\left(4z^2-17iz-4\right)}=-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)dz}{z(4z-i)(z-4i)}=-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}F(z)dz.$$

Подынтегральная функция $F(z)$ имеет три особые точки: $z=0$, $z=\dfrac{i}{4}$ и $z=4i$ – полюсы первого порядка. Точка $z=4i$ не принадлежит кругу $|z|=1$. Таким образом, в области $|z|<1$ функция $F(z)$ аналитическая всюду, за исключением точек $z=0$ и $z=\dfrac{i}{4}$. Найдем вычеты функции $F(z)$ в этих точках.

$$\operatorname{res}F(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^2+1}{z(4z-i)(z-4i)}=\frac{1}{-i(-4i)}=-\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res}F\left(\frac{i}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{i}{4}}\left(z-\frac{i}{4}\right)\cdot\frac{z^2+1}{z(4z-i)(z-4i)}=\frac{\left(\dfrac{i}{4}\right)^2+1}{\dfrac{i}{4}\cdot 4\cdot\left(\dfrac{i}{4}-4i\right)}=\frac{1}{4}.$$

По теореме Коши о вычетах получаем

$$-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}F(z)dz=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname{res}F(0)+\operatorname{res}F\left(\frac{i}{4}\right)\right)=-\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=0.$$

б) Введем вспомогательную функцию $F(z)=\dfrac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}$. Ее действительная часть $\operatorname{Re}F(z)=\operatorname{Re}\dfrac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}=\operatorname{Re}\dfrac{\cos 4z+i\sin 4z}{z^2+\frac{1}{4}}=\dfrac{\cos 4z}{z^2+\frac{1}{4}}$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)$ исходного несобственного интеграла, если $z=x\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим замкнутый контур $\mathrm{C}=\mathrm{C_R}\cup[-\mathrm{R};\mathrm{R}]$ где $\mathrm{C_R}$ – верхняя полуокружность $|z|=\mathrm{R}$, а $[-\mathrm{R};\mathrm{R}]$ – отрезок действительной оси (рис. 28)

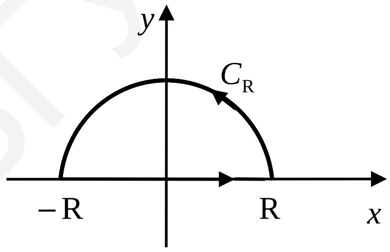


Рис. 28

Если $|z|\to\infty$, то функция $\dfrac{1}{z^2+\frac{1}{4}}\to 0$.

Следовательно, по лемме Жордана

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\int_{\mathrm{C_R}}\frac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz=0.$$

Функция $F(z)$ имеет две особые точки: $z=\frac{1}{2}i$ и $z=-\frac{1}{2}i$. Так как в верхней полуплоскости лежит только точка $z=\frac{1}{2}i$, то по теореме Коши о вычетах для любого $\mathrm{R}>\frac{1}{2}$ выполняется $\oint_C\dfrac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz=0$.

Найдем вычет функции $F(z)$ в полюсе первого порядка $z=\frac{1}{2}i$.

$$\operatorname{res}F\left(\frac{1}{2}i\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}i}\frac{\left(z-\frac{1}{2}i\right)e^{4iz}}{\left(z-\frac{1}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}i\right)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}i}\frac{e^{4iz}}{z+\frac{1}{2}i}=\frac{e^{2i}}{i}=-ie^{2i},$$

Тогда $\oint\limits_{C} \dfrac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz = 2\pi i\left(-ie^{2i}\right) = 2\pi e^{2i}$ $\left(\text{для } R > \dfrac{1}{2}\right)$.

По свойству аддитивности получаем

$$\oint\limits_{C} \frac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz = \int\limits_{C_R} \frac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz + \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{4ix}}{x^2+\frac{1}{4}}dx = 2\pi e^{2i}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $R \to \infty$. В силу леммы Жордана $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \dfrac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz = 0$. Согласно определению несобственного интеграла первого рода по промежутку от $-\infty$ до $+\infty$, рассматриваемому в смысле главного значения, имеем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{4iz}}{z^2+\frac{1}{4}}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+\frac{1}{4}}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+\frac{1}{4}}dx = 2\pi e^{2i}.$$

Выделим действительные и мнимые части в обеих частях последнего равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+\frac{1}{4}}dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x^2+\frac{1}{4}}dx = 2\pi\cos 2 + i2\pi\sin 2.$$

Приравняв действительные части слева и справа, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+\frac{1}{4}}dx = 2\pi\cos 2.$$

Поскольку подынтегральная функция четная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx .$$

Итак, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + \frac{1}{4}} dx = \pi \cos 2 .$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1985.

2. Высшая математика. В 5 ч. – Минск : Выш. шк.: Ч. 3 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, 1985; Ч. 4 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, 1987; Ч. 5 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, 1988.

3. Герасимович, А. И. Математический анализ / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк – Минск : Выш. шк., 1989.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Изд. дом «Оникс 21 век»: Мир и Образование, 2002.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной : учеб. пособие для втузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997.

6. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1989.

7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2002.

9. Сборник задач по математике для втузов: специальные разделы математического анализа / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1982.

10. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 7. Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2007; Ч. 8. Ряды. Фурье-анализ / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2007; Ч. 10. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление и анализ / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2010.

11. Третьякова, Н. Н. Руководство к решению задач. Высшая математика. Кратные интегралы, векторный анализ, теория поля / Н. Н. Третьякова, В. А. Ранцевич, Н. В. Спичекова. – Минск : ФУАинформ, 2011.

Св. план 2021, поз. 17

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ

В трех частях

Часть 3

Черняк Жанна Альбертовна
Князюк Наталья Владимировна
Примичева Зоя Николаевна

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПОСОБИЕ

Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 05.04.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 15,46. Уч.-изд. л. 16,1. Тираж 100 экз. Заказ 40.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск