Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Постоянный электрический ток

Бурцева Вера Петровна

доцент кафедры физики

Минск, 2022

Постоянный электрический ток

Электрический ток;

Уравнение непрерывности;

Закон Ома для однородного участка цепи;

Закон Ома для неоднородного участка цепи;

Закон Джоуля-Ленца;

Классическая теория электропроводности металлов.

Условия существования электрического тока

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов.

Для существования электрического тока необходимо:

наличие свободных носителей заряда;

электрическое поле;

замкнутая цепь (в случае постоянного тока).

Характеристики тока

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока - численно равная заряду, переносимому через заданную поверхность S *(или через поперечное сечение проводника),* ***в единицу времени****, т.е.:*

$$I = \frac{dq}{dt}$$

За направление тока принято направление движения положительных зарядов.

Электрический ток может быть распределен по сечению проводника неравномерно. Поэтому для детальной характеристики тока вводят вектор плотности тока $\vec{j}$.

Модуль плотности тока численно равен заряду, переносимому через единичную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей, за единицу времени

$$|\vec{j}| = \frac{dq}{dSdt} = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

Если обозначить через $\langle \vec{u} \rangle$ среднюю скорость упорядоченного движения зарядов, то

$$\vec{j} = q_+ n_+ \langle \vec{u}_+ \rangle + q_- n_- \langle \vec{u}_- \rangle = \rho_+ \langle \vec{u}_+ \rangle + \rho_- \langle \vec{u}_- \rangle$$

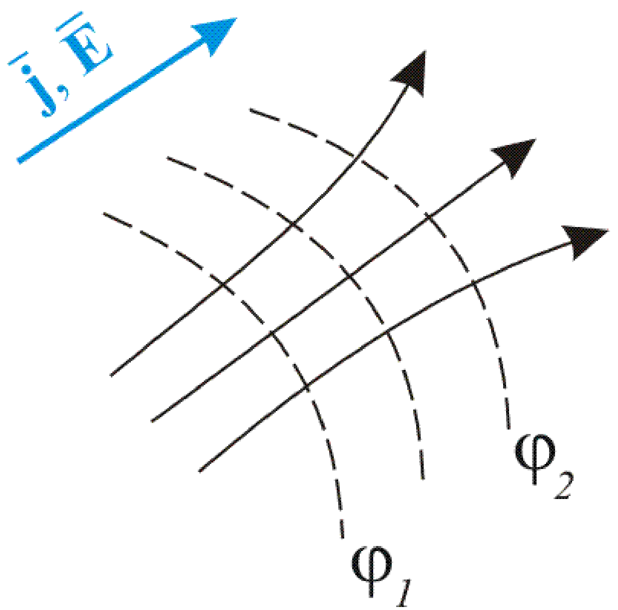
ρ_+, ρ_- - объемные плотности положительного и отрицательного зарядов,

n_+, n_- - количество положительных и отрицательных носителей в единице объема.

Плотность тока и сила тока связаны соотношением

$$I = \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$

Поле вектора $\vec{j}$ можно изобразить графически с помощью линий тока, которые проводятся так же как и линии напряженности $\vec{E}$.



Уравнение непрерывности

Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность S. Для замкнутых поверхностей положительной нормалью считается внешняя нормаль, поэтому

$\oint_S \vec{j} d\vec{S}$ дает заряд, выходящий за единицу времени из объема V, ограниченного поверхностью S.

Из закона сохранения заряда следует, что этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени из объема V.

Т.е.

$$\oint \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \qquad (*)$$

Данное равенство называется ***уравнением непрерывности.***

В случае стационарного (постоянного) тока

$$\oint \vec{j}\, d\vec{S} = 0,$$

так как $\frac{dq}{dt} = 0.$

Преобразуем уравнение (*)

$$\oint \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int \rho dV$$

$$\oint \vec{j}d\vec{S} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Введем среднюю плотность заряда, тогда

$$\oint \vec{j}d\vec{S} = -\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t}\int dV \ , \ \oint \vec{j}d\vec{S} = -\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} V$$

Стянув поверхность в точку, получим

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \vec{j}\,d\vec{S} = -\lim_{V\to 0}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}$$

$\nabla\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ - ***уравнение непрерывности в дифференциальной форме.***

В точках, которые являются источниками $\vec{j}$ происходит убывание заряда.

Для постоянного тока $\nabla\cdot\vec{j} = 0.$

Уравнение

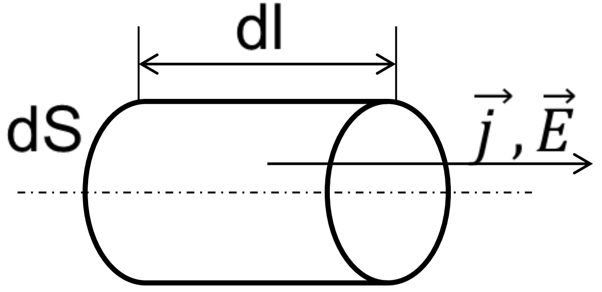
$$\nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

означает, что в случае постоянного тока поле

вектора $\vec{j}$ не имеет источников. Это означает, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, следовательно - замкнуты.

Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме

Установим связь между плотностью тока и напряженностью поля в проводнике.



Воспользуемся законом Ома

для участка цепи

$$I = \frac{U}{R} = \frac{E \cdot dl}{\rho \cdot {dl}/{dS}} = \frac{EdS}{\rho}.$$

$$jdS = \frac{EdS}{\rho}, \quad \vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Соотношение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

называется законом Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

Где σ – удельная электрическая проводимость

$$[\sigma] = \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

$$\langle \vec{u} \rangle \sim \vec{E} \sim \vec{F}$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электростатических сил $e\vec{E}$, сторонние силы $e\vec{E}^*$, которые способны также вызывать упорядоченное движение носителей тока, как и силы электростатические. Из этого следует $\langle\vec{u}\rangle \sim \left(e\vec{E} + e\vec{E}^*\right)$, соответственно $\vec{j} \sim \left(\vec{E} + \vec{E}^*\right)$, в этих же точках.

Закон Ома в случае действия полей $\vec{E}^*$ и $\vec{E}$ запишется в виде $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$.

Это обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

Из закона Ома в дифференциальной форме перейдём к интегральной форме:

$$\frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = \vec{E}d\vec{l} + \vec{E}^* d\vec{l}, \qquad \int_1^2 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}.$$

В случае постоянного тока

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\cdot d\vec{l}}{\sigma} = I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = IR.$$

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = \varepsilon_{12}.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

Классическая теория электропроводности металлов. Теория Друде.

Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями электроны движутся свободно, пробегая в среднем некоторый путь λ. В отличие от молекул газа, которые сталкиваются между собой, электроны преимущественно сталкиваются не между собой, а с ионами, расположенными в узлах кристаллической решетки металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Распространяя на электроны результаты МКТ газов, можно оценить среднюю скорость теплового движения электронов:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 10^5 \, \frac{\text{м}}{\text{с}} \; (\sim 300K).$$

При включении поля на тепловое движение накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью $\langle u \rangle \approx 10^{-3} \, \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Так как $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$, то $\left|\vec{v}_{\text{р}}\right| \approx |\vec{v} + \vec{u}| \approx |\vec{v}|$

Средняя кинетическая энергия электронов:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m\langle \upsilon_p^2 \rangle}{2} = \frac{m\langle (\vec{\upsilon}+\vec{u})^2 \rangle}{2} = \frac{m\langle \upsilon^2 \rangle}{2} + \frac{m\langle u^2 \rangle}{2}$$

$\frac{m\langle u^2 \rangle}{2}$ - обусловлено полем $\vec{E}$.

$\frac{m\langle \upsilon^2 \rangle}{2}$ - обусловлено тепловым движением е.

По предположению Друде, электрон, столкнувшись с кристаллической решеткой (ионом), передает всю обусловленную полем энергию и скорость упорядоченного движения электрона обращается в нуль.

Закон Ома в дифференциальной форме

За время свободного пробега $\tau = \dfrac{\lambda}{\upsilon}$ электрон, ускоренный внешним однородным электрическим полем, приобретает скорость

$$ma = eE, \qquad a = \frac{eE}{m}$$

При этом максимальная скорость упорядоченного движения равна:

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$$

Среднее значение модуля скорости при равноускоренном движении равно половине максимальной

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\frac{eE\tau}{m}$$

Для модуля плотности тока получаем выражение

$$j = en\langle u \rangle = \frac{1}{2}\frac{ne^2E\tau}{m} = \frac{1}{2}n\frac{e^2\lambda}{m\upsilon}E$$

Закон Ома в дифференциальной форме принимает вид:

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$, где

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}$$

Если бы электроны не сталкивались с узлами решетки, то их длина свободного пробега

$$\lambda \to \infty.$$

и

$$\sigma \to \infty.$$

Таким образом, согласно классическим представлениям, сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Скорость электрона равна сумме скоростей теплового движения $\vec{\upsilon}$ и упорядоченного движения $\vec{u}$. Среднее значение квадрата результирующей скорости равно

$$\left\langle \left(\vec{\upsilon} + \vec{u} \right)^2 \right\rangle = \upsilon^2 + \left\langle u^2 \right\rangle$$

Средняя кинетическая энергия электрона, обусловленная полем:

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} m u^2{}_{\max} = \frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon^2} E^2$$

Эту энергию электрон отдает при каждом соударении с кристаллической решеткой.

Т.к. каждый электрон претерпевает в среднем

$\frac{1}{\tau} = \frac{\upsilon}{\lambda}$ соударений. Поэтому в единице объема за секунду выделяется количество теплоты:

$$Q_{уд} = n\frac{v}{\boldsymbol{\lambda}}\Delta\varepsilon = \frac{ne^2\boldsymbol{\lambda}}{2mv}E^2 = \sigma E^2$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$Q_{уд} = \sigma E^2$$

Итак, на длине свободного пробега электрон приобретает под действием эл. поля скорость упорядоченного движения, равную в конце пробега u_{max}. При соударении с ионом электрон теряет скорость. При этом энергия упорядоченного движения электрона преобразуется во внутреннюю энергию проводника, который нагревается при прохождении по нему электрического тока.

Недостатки классической теории электропроводности металлов

1. Невозможность объяснить экспериментально $\sigma \sim \frac{1}{T}$

Так как из формулы Друде $\sigma = \dfrac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}$ следует,

что $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, так как $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \sqrt{T}$.

2. Невозможность объяснения отсутствия электронной составляющей теплоемкости металлов.

Согласно теории Друде, молярная теплоемкость металла (9 кал/моль К) складывается из теплоемкости ионной кристаллической решетки (6 кал/моль К) и теплоемкости одноатомного электронного газа (3 кал/моль К).

Однако, из закона Дюлонга и Пти (эксперимента) теплоемкость металлов составляет $\approx$ 6 кал/моль К.