

УДК 628.336.42

СПОСОБ РАСЧЕТА СПЕКТРА МОЩНОСТИ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ТЬЮКИ

Горбачева Д.Н., студент гр.933701

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники¹

г. Минск, Республика Беларусь

Данейко Т.М. – старший преподаватель каф. ИКТ

Аннотация. Этот метод позволяет получать оценку спектральной плотности мощности через преобразование Фурье оценки корреляционной функции.

Ключевые слова. спектральной плотности, преобразование Фурье, корреляционная функцию, оценок спектральной плотности мощности, временной сдвиг, математическое ожидание, дисперсия оценки Тьюки.

Этот метод позволяет получать оценку спектральной плотности мощности через преобразование Фурье оценки корреляционной функции. Следует отметить, что метод Блэкмана-Тьюки (коррелограммный метод) был разработан в 1958 г., тогда как алгоритм БПФ для эффективного вычисления ДПФ не был опубликован до 1965 г. Кроме того, этот метод имеет некоторые преимущества по сравнению с методом периодограмм. Например, метод Блэкмана-Тьюки характеризуется большей добротностью. К тому же, корреляционную функцию теперь можно вычислять с помощью ДПФ посредством быстрой корреляции.

Одна из возможных оценок спектральной плотности мощности, получаемая на основе несмещённой оценки корреляционной функции $\hat{K}_x(m)$, которая вычисляется при временном сдвиге с максимальными значениями в интервале $\pm L$, определяется выражением

$$\hat{P}_{\text{BT}}(f) = \Delta t \sum_{m=-L}^L \hat{K}_x(m) \exp(-j2\pi f m \Delta t).$$

Данная оценка определяется для интервала частот $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$. Максимальное значение временного сдвига L , как правило, меньше числа отсчетов N выборки исходных данных. Использовать максимальное значение $L \approx N/10$ было предложено Блэкманом и Тьюки. Выбор такого максимального значения основывался на стремлении исключить большие значения дисперсии, связанные с оценками корреляционной функции при больших временных сдвигах, поскольку такие значения дисперсии давали менее устойчивую оценку СПМ.

Математическое ожидание оценки (1.246) можно вычислить обычным образом:

$$M[\hat{P}_x(f)] = \Delta t \sum_{m=-L}^L M[\hat{K}_x(m)] \exp(-j2\pi f m \Delta t) = \Delta t \sum_{m=-L}^L K_x(m) \exp(-j2\pi f m \Delta t) = P_x(f) * W_L(f),$$

(1.247)

где $W_L(f)$ – преобразование Фурье прямоугольного окна (ядро Дирихле).

Несмотря на то, что оценка СПМ вычисляется с использованием несмещённых оценок корреляционной функции, она будет смещённой оценкой истинной спектральной плотности мощности. Неявное присутствие прямоугольного окна при конечной корреляционной последовательности приводит к оценке, которая, по сути, является сверткой истинной спектральной плотности мощности с преобразованием Фурье дискретно-временного прямоугольного окна.

Для уменьшения эффекта просачивания из-за неявного присутствующего прямоугольного окна, а следовательно, и для уменьшения смещения оценки необходимо использовать $(2L + 1)$ -точечное корреляционное окно $w(n)$ нечетной длины на интервале $-L \leq m \leq L$, симметричное относительно начала отсчета. Наиболее общая форма корреляционного метода оценивания СПМ в этом случае принимает следующей вид:

$$\hat{P}_{BT}(f) = \Delta t \sum_{m=L}^L \hat{K}_x(m) w(n) \exp(-j2\pi f m \Delta t)$$

где должна использоваться несмещенная оценка корреляционной функции.

Выражение (1.248) определяет оценку, которая была предложена Блэкманом и Тьюки, о чем свидетельствует подсрочный индекс *BT*. Окно здесь нормируется так, чтобы $w(0) = 1$, поэтому оценка $\hat{K}_x(0)$ будет несмещенной, мощность отсчетов сохраняется, а следовательно, оценка $\hat{P}_{BT}(f)$ будет правильно промасштабирована как оценка СПМ. Если необходимо, чтобы не площадь под кривой оценки Блэкмана и Тьюки была пропорциональна мощности истинной СПМ, а пики этой оценки были пропорциональны мощности импульсов в спектре, то выражение (1.248) следует промасштабировать величиной $1/N\Delta t$. Не следует применять корреляционные окна, Фурье-образ которых меньше нуля, поскольку это приводит к получению отрицательных значений СПМ, что противоречит ее физическому смыслу. Не все весовые функции удовлетворяют данным критериям. Например, им не удовлетворяют функции Хемминга и Ханна, Кайзера и прямоугольное окно. С увеличением числа значений оценки $\hat{K}_x(m)$ коррелограммный метод дает асимптотически несмещенные оценки СПМ. Блэкман и Тьюки рекомендовали использовать число оцениваемых значений корреляционной последовательности примерно равным 10 % числа имеющихся отсчетов данных.

Дисперсия оценки Блэкмана и Тьюки определяется выражением:

$$D[\hat{P}_{BT}(f)] \approx \left[\frac{1}{N} \sum_{m=L}^L w^2(m) \right] \cdot P_x^2(f).$$

Очевидно, что при $N/L \rightarrow \infty$ $D[\hat{P}_{BT}(f)] \rightarrow 0$, так что при данных условиях оценка Блэкмана и Тьюки является состоятельной.

Для вычисления оценки СПМ, определяемой выражением (1.248), на сетке из $(N + 1)$ частот $f_k = k/N\Delta t$, где используют алгоритмы БПФ. Значение N здесь может быть произвольным, но обычно $N \gg L$, а это значит, что полученная оценка будет сохранять тонкие детали спектра. При использовании значений временного сдвига от $L + 1$ до N отсчеты имеющихся данных необходимо дополнить нулями.

+Сравнивая процедуру Блэкмана и Тьюки с периодограммным методом, нетрудно заметить, что в этом случае сглаживание достигается не за счет усреднения нескольких периодограмм, а за счет усредняющего эффекта процесса корреляции.

UDC 628.336.42

METHOD FOR CALCULATION OF THE POWER SPECTRUM OF SIGNALS BY THE TUKEY METHOD

Gorbacheva D.N. st.933701

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics¹, Minsk, Republic of Belarus

Daneyko T.M. - scientific director

Annotation. This method allows to obtain an estimate of the power spectral density through the Fourier transform of the correlation function estimate.

Keywords. spectral density, Fourier transform, correlation function, power spectral density estimates, time shift, mathematical expectation, Tukey estimate variance.