Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для практических занятий по математике
для специальностей, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2015

УДК 517.3(076)
ББК 22.161.1я73
Д50

А в т о р ы:
В. В. Цегельник, Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
Л. А. Конюх, Е. Н. Конюх

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики №1 Белорусского национального
технического университета
(протокол №2 от 25.09.2014 г.);

заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий
учреждения образования «Частный институт управления
и предпринимательства», кандидат физико-математических наук,
доцент Ю. В. Минченков

Д50 **Дифференциальные** уравнения. Кратные интегралы. Теория поля : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2015. – 99 с. : ил.
ISBN 978-985-543-131-3.

Приводятся задачи по темам: дифференциальные уравнения, кратные интегралы, теория поля – разделам курса высшей математики, изучаемым в высших технических учебных заведениях в первом семестре.

Предлагаются задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

Пособие входит в состав методического комплекса вместе со сборниками задач в десяти частях.

УДК 517.3(076)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-985-543-131-3

Содержание

Занятие 1
Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1

Покажите, что данная функция является решением (интегралом) заданного дифференциального уравнения:

а) $y = 3\sin x - 4\cos x, \quad y'' + y = 0;$

б) $y = x\left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx\right), \quad x\frac{dy}{dx} - y = xe^x;$

в) $y = \operatorname{arctg}(x+y), \quad (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1;$

г) $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}, \quad y' + \frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$

$\triangle$ а) последовательно находим:

$y' = 3\cos x + 4\sin x,$

$y'' = -3\sin x + 4\cos x.$

Подставляя в заданное уравнение y и y', получим

$-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x \equiv 0.$

Таким образом, эта функция обращает заданное уравнение в тождество, т. е. является его решением;

б) вычислим производную данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \int \frac{e^x}{x} dx + x \cdot \frac{e^x}{x} = 1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Имеем $x\frac{dy}{dx} - y = x\left(1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx\right) - x\left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx\right) = xe^x.$

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения;

в) применяя к данному соотношению правило дифференцирования неявной функции, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 + (x+y)^2}$. Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в данное дифференциальное уравнение, получим тождество;

г) предполагаемое решение задано параметрическими уравнениями. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t.$$

Подставляя в исходное уравнение x, y, y'_x, получим $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t + \frac{b^2 a \sin t}{a^2 b \cos t} \equiv 0.$ ▲

Пример 2

Составьте дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $x^2 + y^2 - cx = 0;$

б) $y = \sin x + c\cos x.$

△ а) рассматривая в данном соотношении y как неявную функцию от x и дифференцируя по x, имеем $2x + 2y\frac{dy}{dx} - c = 0.$ Отсюда $c = 2x + 2y\frac{dy}{dx}.$

Подставляя в исходное соотношение вместо c последнее выражение, получим

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0;$$

б) дифференцируя данное равенство по x, имеем $\frac{dy}{dx} = \cos x - c\sin x.$ Умножим обе части исходного уравнения на $\sin x$, а последнего – на $\cos x$ и, сложив почленно, получим $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x - 1 = 0.$ ▲

Пример 3

С помощью изоклин постройте приближенно интегральные кривые уравнения $x\frac{dy}{dx} = 2y.$

△ Очевидно, ось абсцисс является интегральной кривой данного уравнения. Интегральные кривые расположены симметрично относительно оси абсцисс и относительно оси ординат (при замене x на $-x$ или y на $-y$ уравнение не изменяется). Поэтому исследуем поведение интегральных кривых только в I четверти.

Семейство изоклин определяется уравнением $k = \frac{2y}{x}$, $y = \frac{k}{2}x.$ Для любого $k > 0$ касательные к интегральным кривым данного уравнения, проведенные в точках прямой $y = \frac{k}{2}x,$ образуют с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} k.$ Нарисовав несколько изоклин и поле направлений, построим приближенно интегральные кривые уравнения (рис. 1).

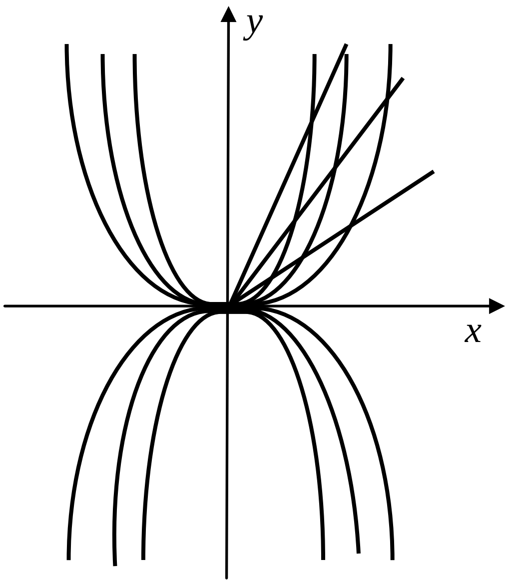

Рис. 1 ▲

Пример 4

Решите уравнение $ydx - x^2dy = 0$.

△ Очевидно, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\dfrac{1}{x} + \ln|c|$, $(c \neq 0)$.

$y = ce^{-1/x}$.

Решение $y = 0$ можно получить из последнего соотношения при $c = 0$. Таким образом, $y = 0$ является частным решением.

Решение $x = 0$ не может быть получено из общего решения. Это особое решение.

Ответ: $y = ce^{-1/x}$, $(c \in R)$, $x = 0$. ▲

Пример 5

Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$.

△ Перепишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = xy(y+2)$.

Функции $x = 0$ и $y = -2$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем разделив переменные и проинтегрировав его:

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0,\ \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0,\ \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy - \int xdx = 0,$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| - x^2 = \ln c_1, \quad \frac{|y|}{|y+2|} = c_1 e^{x^2}, \; c_1 > 0,$$

$$\frac{y}{y+2} = ce^{x^2}, \quad (c \in R) \text{ или } y = \frac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}.$$

Решения $y = 0$ и $y = -2$ могут быть получены из общего решения при $c = 0$ и $c = \infty$.

Ответ: $y = \dfrac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}$. ▲

Пример 6

Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = k\dfrac{y}{x}$ и постройте интегральные кривые этого уравнения.

△ Правая часть заданного уравнения определена во всей плоскости xOy, за исключением точек прямой $x = 0$. Очевидно, функция $y = 0$ при $x < 0$ и при $x > 0$ является решением данного уравнения. Остальные решения определим из соотношения $\int \dfrac{dy}{y} = k\int \dfrac{dx}{x}$.

Отсюда $\ln|y| = k\ln|x| + k\ln c_1$, $\quad |y| = c_1|x|^k$, $\quad c_1 > 0$.

Присоединяя к этим функциям решение $y = 0$, все решения можно записать формулой $y = c|x|^k$, $\quad c \in R$. Интегральные кривые в зависимости от параметра k изображены на рис. 2.

Пример 7

Решите задачу Коши $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x + 1$, $\quad y(0) = 0$.

△ Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $y - 2x - 1 = z$.

Имеем $\dfrac{dy}{dx} - 2 = \dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx} = -z - 2$, $z \neq -2$, так как $y(0) = 0$.

Разделив переменные, интегрируем уравнение:

$\dfrac{dz}{z+2} = -dx$, $\ln|z+2| = -x + \ln c$, $|z+2| = ce^{-x}$, $z = -2 + ce^{-x}$, $c \in R$ или $y = 2x - 1 + ce^{-x}$.

Подставив в последнее соотношение $x = 0$, $y = 0$, получим $c = 1$.

Ответ: $y = 2x - 1 + e^{-x}$. ▲

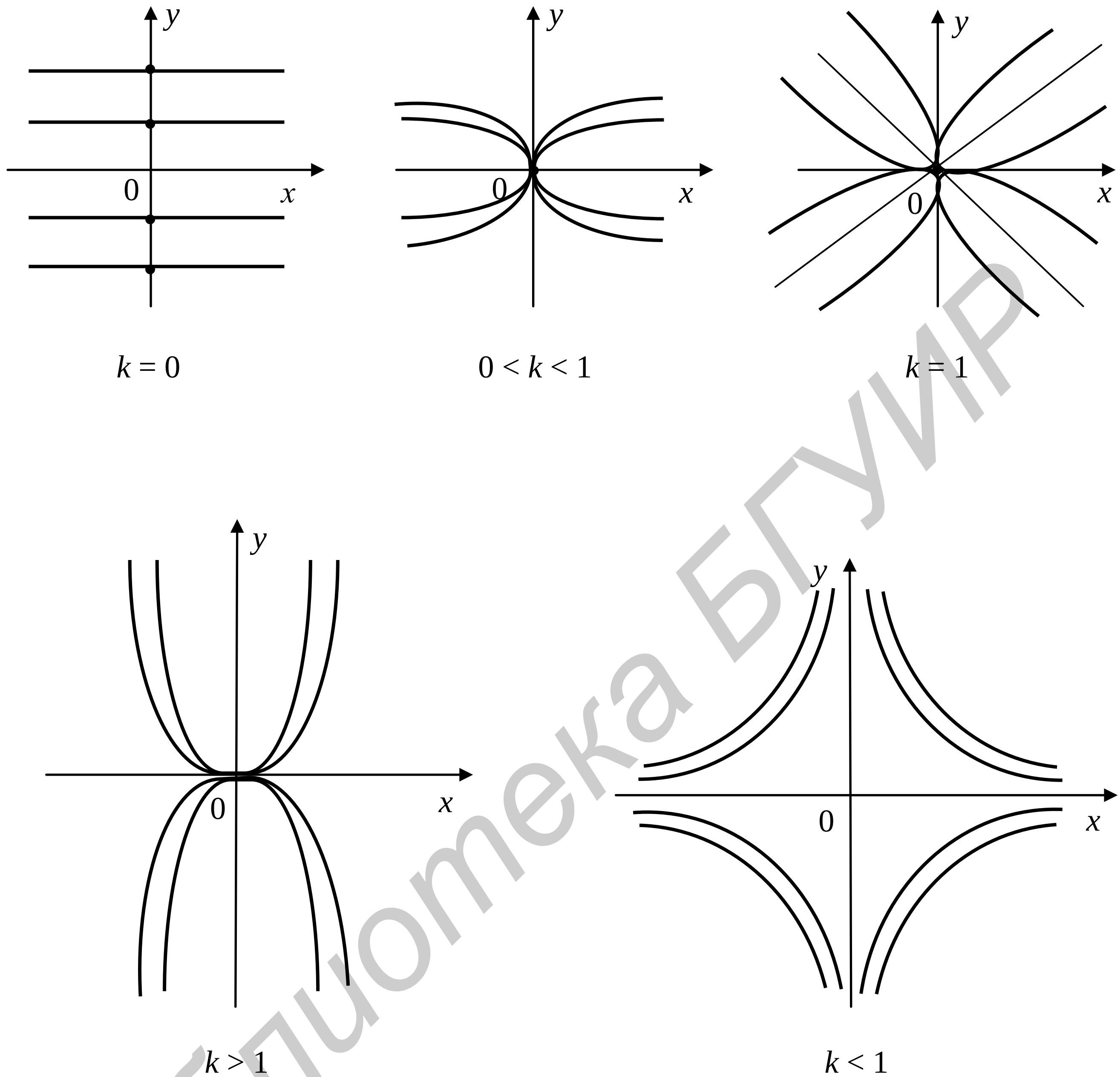

Рис. 2

▲

Дополнительные задачи

1. Покажите, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

а) $(x-2y)y' = 2x - y,\ \ x^2 - xy + y^2 = c^2$;

б) $(x-y+1)y' = 1,\ \ y = x + ce^y$.

2. Составьте дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром $A(0;\ 1)$.

Ответ: $(y-1)\dfrac{dy}{dx} + x = 0.$

3. Составьте дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

Ответ: $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

4. Решите уравнение $(xy-x)dx + (xy+x-y-1)dy = 0.$

Ответ: $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = c.$

5. Решите задачу Коши $(1+e^x)yy' = e^x,\ \ y(0)=1.$

Ответ: $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x).$

6. Решите уравнение $(2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0.$

Ответ: $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = c.$

Занятия 2–3
Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1

Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

$\triangle$ Правая часть уравнения – однородная функция нулевой степени, поэтому данное уравнение однородное.

Положим $y = ux$. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \quad \text{или} \quad xdu = \frac{1-u^2}{2u}dx.$$

Функции $u = \pm 1$ являются решениями. Пусть $u \neq \pm 1$. Разделим переменные $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем $-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| - \ln|c|$ или

$x(1-u^2) = c, \quad c \in R$. Так как $u = \dfrac{y}{x}$, окончательно получаем $y^2 = x^2 - cx$.

Решения $u = \pm 1$, т. е. $y = \pm x$ являются частными решениями. ▲

Пример 2

Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

$\triangle$ Это однородное уравнение. Положим $y = ux$. Тогда $\dfrac{du}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ и

после подстановки получим $x\dfrac{du}{dx} = \operatorname{sign} x\sqrt{1-u^2}$, $x \neq 0$.

Очевидно, функции $u = \pm 1$ или $y = \pm x$ являются решениями полученного уравнения. Другие решения найдем разделяя переменные. Имеем $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{\operatorname{sign} x}{x}dx$, $\arcsin u = \operatorname{sign} x \ln|x| + c$. Заменяя u на $\dfrac{y}{x},$ получим

$$\arcsin\frac{y}{x} = \operatorname{sign} x \ln|x| + c, \quad y = x, \quad y = -x. \quad ▲$$

Пример 3

Решите уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

Из всех решений выделите то, которое удовлетворяет условию $y(1) = 1$.

$\triangle$ Данное уравнение приводится к однородному. Произведем замену переменных $x = t + \alpha$, $y = s + \beta$. Получим

$$(2t + 2\alpha - s - \beta + 1)dt + (2s + 2\beta - t - \alpha - 1)ds = 0.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ -\alpha + 2\beta - 1 = 0 \end{cases}$ находим $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\quad \beta = \dfrac{1}{3}$. получим однородное уравнение $(2t - s)dt + (2s - t)ds = 0.$

В последнем уравнении положим $s = ut$.

Имеем $(2t - ut)dt + (2ut - t)(udt + tdu)du = 0,$

$(2t - ut + 2u^2t - ut)dt + (2ut^2 - t^2)du = 0,\ \ (2u^2 - 2u + 2)dt + (2u - 1)tdt,$ или

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2u-1}{u^2 - u + 1}du = -\frac{dt}{t},\ \ \ln(u^2 - u + 1) + \ln t^2 = \ln c,\ \ \left(\frac{s^2}{t^2} - \frac{s}{t} + 1\right)t^2 = c,$$

$s^2 - st + t^2 = c.$

Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = c,\quad x^2 + y^2 - xy + x - y = c_1.$$

Это общий интеграл уравнения. Положив $x = 1$, $y = 1$, находим $c_1 = 1$.

Ответ: $\quad x^2 + y^2 - xy + x - y = 1.$ $\blacktriangle$

Пример 4

Решите уравнение $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = e^{-\sin x}$.

$\triangle$ Решим соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0.$$

Функция $y = 0$ является решением этого уравнения. Другие его решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\cos x,\ \ \ln|y| = -\sin x + \ln|c|,\ \ y = ce^{-\sin x},\ \ c \neq 0.$$

Решение $y = 0$ можно получить из последней формулы при $c = 0$, поэтому все решения однородного уравнения выражаются формулой $y = c(x)\cdot e^{-\sin x}$, $c \in R$.

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = c(x)\cdot e^{-\sin x}$. Подставив это выражение в заданное уравнение, получим

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\sin x} - \cos x e^{-\sin x}c(x) + c(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x},$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=1,\ \ c(x)=x+c.$$

Ответ: $y=(x+c)e^{-\sin x}$. ▲

Пример 5

Проинтегрируйте уравнение $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$ методом Бернулли, решите задачу Коши при начальном условии $y(1)=1$.

△ Сделав подстановку Бернулли, получим

$$u'v+uv'+\frac{3}{x}uv=\frac{2}{x^3},\ \ \ u'v+u\left(v'+\frac{3}{x}v\right)=\frac{2}{x^3}.$$

Находим частное решение уравнения $v'+\frac{3}{x}v=0$:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{3}{x}dx,\ \ \ \ln|v|=-3\ln|x|+c.$$

В качестве частного решения можно взять $v=\frac{1}{x^3}$, тогда для отыскания u получим уравнение $u'\frac{1}{x^3}=\frac{2}{x^3}$. Отсюда находим $u=2x+c$.

Общее решение исходного уравнения: $y=(2x+c)\frac{1}{x^3}$. Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=1$: $1=(2+c)-1$, откуда $c=-1$. Подставляя $c=-1$ в общее решение, получаем частное решение

$$y=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}.\quad ▲$$

Пример 6

Найдите общее решение уравнения $2ydx+(y^2-2x)dy=0$.

△ Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией x:

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-\frac{y}{2},\ \ (y\neq 0).$$

Решим его методом подстановки Бернулли:

$$u'v+uv'-\frac{1}{y}uv=-\frac{y}{2},\ \ \ u'v+u\left(v'-\frac{1}{y}v\right)=-\frac{y}{2}.$$

Находим частное решение уравнения $\frac{dv}{dy}-\frac{1}{y}v=0.$ Разделив переменные, получим $\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}$, $v=y.$

Для отыскания u получим уравнение $\frac{du}{dy}y=-\frac{y}{2}.$ Отсюда находим $u=-\frac{1}{2}y+c.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения $x=cy-\frac{y^2}{2}.$ ▲

Пример 7

Приведите уравнение Бернулли $y'-2xy=2x^3y^2$ к линейному уравнению.

△ Разделим обе части уравнения на y^2: $y^{-2}y'-2xy^{-1}=2x^3.$ Положим $y^{-1}=z,$ тогда $-y^{-2}y'=z'.$ Умножив обе части уравнения на –1 и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение
$z'+2xz=-2x^3.$ ▲

Пример 8

Решите уравнение $x^2y^2y'+xy^3=1.$

△ Разделив обе части уравнения на $x^2y^2\neq 0,$ получим уравнение Бернулли $y'+\frac{y}{x}=y^{-2}\frac{1}{x^2}.$ Сделав подстановку Бернулли $y=uv,$ получим

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2u^2v^2} \quad \text{или} \quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Находим частное решение уравнения $\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=0.$ Разделив переменные, получим $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$, $\ln|v|=-\ln|x|$, $v=\frac{1}{x}.$

Для отыскания u получим уравнение $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1\cdot x^2}{x^2u^2}$, $\frac{u^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{3}$, $u=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+c}.$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y=uv=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{c}{x^3}}.$ ▲

Пример 9

Решите уравнение $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$.

△ Для того чтобы уравнение $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x;y)}{\partial x}.$$

В данном случае $M(x;y)=2xy+3y^2$, $\quad N(x;y)=x^2+6xy-3y^2$;

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+6y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x+6y.$$

Таким образом, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, т. е. левая часть данного уравнения действительно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x;y)$.

Для искомой функции $u(x;y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2.$$

Из первого уравнения получаем

$$u(x;y)=\int(2xy+3y^2)dx=x^2y+3xy^2+\varphi(y).$$

Дифференцируем последнее равенство по y:

$$x^2+6xy+\frac{d\varphi}{dy}=x^2+6xy-3y^2,\ \text{т. е.}\ \frac{d\varphi}{dy}=-3y^2.$$

Отсюда $\varphi(y)=-y^3+c_1$. Поэтому $u(x;y)=x^2y+3xy^2-y^3+c_1$.

Решение уравнения запишется в виде $x^2y+3xy^2-y^3=c$. ▲

Пример 10

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0.$$

△ Так как $\frac{\partial M}{\partial y}=1+\cos y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=1+\cos y$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно найти по одной из формул:

$$\int_{x_0}^{x}M(x;y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0;y)dy=c,$$

$$\int_{x_0}^{x}M(x;y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0;y)dy=c.$$

Подставив в первую формулу для простоты $x_0 = y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y (e^y + x + x\cos y)dy = c,$$

$$e^x - 1 + (e^y + xy + x\sin y)\Big|_{y=0}^{y=y} = c,$$

$$e^x - 1 + e^y + xy + x\sin y - 1 = c, \qquad e^x + e^y + xy + x\sin y = c_1. \ \blacktriangle$$

Пример 11

Решите уравнение $(x + y^2)dx - 2xydy = 0.$

$\triangle$ Если левая часть уравнения $M(x;y)dx + N(x;y)dy$ не является полным дифференциалом и выполнены все условия теоремы Коши, то существует такая функция $\mu(x;y)$, называемая интегральным множителем, что $\mu(Mdx + Ndy) = du.$

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

1) $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F(x)$, тогда $\mu = \mu(x)$;

2) $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = F_1(y)$, тогда $\mu = \mu(y)$.

В нашем случае $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = 2y + 2y = 4y,$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = F(x).$$

Следовательно, $\mu = \mu(x)$.

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x)(x + y^2)\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2\mu(x)xy)$ или

$\mu(x)2y = -2\dfrac{dM}{dx}(xy) - 2\mu(x)y$, то $\dfrac{dM}{\mu} = -\dfrac{2}{x}dx$ и $\mu = \dfrac{1}{x^2}$.

Умножая уравнение на $\mu = \dfrac{1}{x^2}$, получим

$\dfrac{x + y^2}{x^2}dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения найдем по формуле

$$\int_{x_0}^{x} M(x; y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x; y)dy = c, \ \ (x_0 = 1,\ y_0 = 0),$$

$$\int_{1}^{x} \frac{1}{x}dx - \int_{0}^{y} \frac{2y}{x}dy = c, \ \ \ln|x| - \frac{1}{x}y^2 = c. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Решите задачу Коши $ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0,\ \ y(1) = 1.$

Ответ: $2 - \ln|y| = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

2. Решите уравнение $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0.$

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = c.$

3. Решите задачу Коши $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x},\ \ y(\pi) = 5.$

Ответ: $y = -5\cos x + \sin x.$

4. Решите уравнение $y^3dx - (2xy + 3)dy = 0.$

Ответ: $x = cy^2 - \dfrac{1}{y}.$

5. Решите задачу Коши $y' - \dfrac{y}{x-3} = \dfrac{y^2}{x-3},\ \ y(-1) = -2.$

Ответ: $y = \dfrac{x-3}{1-x}.$

6. Решите уравнение $(2x + e^{x/y})dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0.$

Ответ: $x^2 + ye^{x/y} = c.$

7. Решите уравнение $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$

Ответ: $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = c.$

8. Решите уравнение $y(1 + xy)dx - xdy = 0,$ если известно, что оно имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y).$

Ответ: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = c.$

Занятия 4–5
Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Пример 1

Докажите существование и единственность решения задачи Коши

$$y'' = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$$

△ Правая часть уравнения – функция $F(x, y, y') = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x$ – непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_y = 2y - \frac{y'^2}{y^2}$, $F'_{y'} = \frac{2y'}{y}$ в окрестности точки (0; 1; 2). Поэтому в силу теоремы существования и единственности искомое решение существует и единственно. ▲

Пример 2

Покажите, что функция $y = y(x)$, неявно заданная уравнением $x = y^2 + y$, является решением уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

△ Находим y', y'', y'''. Имеем $y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y+1}$, так как $\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$.

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2y+1}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3};$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dy}\left(-\frac{2}{(2y+1)^3}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2y+1)^5}.$$

Подставив y', y'', y''' в левую часть уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$, получим

$$\frac{1}{2y+1} \cdot \frac{12}{(2y+1)^3} - 3\frac{4}{(2y+1)^5} \equiv 0. \quad ▲$$

Пример 3

Найдите общее решение уравнения $y'' = xe^{-x}$ и выделите решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 4$, $y' = 0$ при $x = 0$.

△ Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y' = \int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} x = u, \;\; du = dx \\ e^{-x}dx = dv, \;\; v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1,$$

$y = -\int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx + c_1x = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.$

Воспользуемся начальными условиями $\begin{cases} -1 + c_1 = 0 \\ 2 + c_2 = 4 \end{cases}$, $c_1 = 1,\ c_2 = 2.$

Следовательно, частное решение имеет вид $y = (x+2)e^{-x} + x + 2.$ ▲

Пример 4

Решите уравнение $(x-3)y'' + y' = 0.$

△ Полагая $y' = z,$ получим уравнение первого порядка

$(x-3)\dfrac{dz}{dx} + z = 0.$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x-3};$

$\ln|z| + \ln|x-3| = \ln|c|,\ c \neq 0;\ z(x-3) = c,\ \dfrac{du}{dx}(x-3) = c;\ y = c\ln|x-3| + c.$

Функция $z = 0\ \ (y = c)$ является решением.

Поэтому $y = c\ln|x-3| + c_1,\ c, c_1 \in R.$ ▲

Пример 5

Найдите общее решение уравнения $y'' + 2xy' = 0.$

△ Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = -2xz;\quad \dfrac{dz}{z} = -2xdx;\quad z = c_1e^{-x^2}$. Решение $z = 0$ не потеряно. Следовательно, $y = c_1\int e^{-x^2}dx + c_2.$ ▲

Пример 6

Решите задачу Коши $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right),\ y = \dfrac{1}{2},\ y' = 1$ при $x = 1.$

△ Полагая $y' = z,$ получим $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}\left(1 + \ln\dfrac{z}{x}\right).$ Это однородное уравнение. Проинтегрируем его с помощью подстановки $z = ux.$ Имеем

$\dfrac{du}{dx}x + u = u(1 + \ln u);\ \dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x};\ \ln|\ln u| = \ln|cx|;\ u = e^{cx};\ z = xe^{cx}.$

Полагая $x = 1,$ находим $c = 0.$ Согласно произведенной замене $\dfrac{dy}{dx} = x,\ y = \dfrac{1}{2}x^2 + c_1.$

Полагая $x = 0,$ находим $c_1 = 0.$ Окончательно имеем $y = \dfrac{1}{2}x^2.$ ▲

Пример 7

Решите уравнение $2(y')^2=(y-1)y''$.

$\triangle$ Положим $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Уравнение примет вид

$p\left(2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}\right)=0$. Функция $p=0$ $(y=c)$ является решением.

Пусть $p\neq 0$, тогда $\dfrac{dp}{2p}=\dfrac{dy}{y-1}$ или $\dfrac{1}{2}\ln|p|=\ln|y-1|+\ln|c_1|$, откуда $p=c_1^2(y-1)^2$. Но $p=\dfrac{dy}{dx}$. Следовательно, $\dfrac{dy}{dx}=c_1^2(y-1)^2$ или $\displaystyle\int\frac{dy}{c_1^2(y-1)^2}=\int dx+c_2$, откуда $\dfrac{-1}{c_1^2}=(x+c_2)(y-1)$.

Функция $y=c$ является особым решением. $\blacktriangle$

Пример 8

Найдите решение задачи Коши $y''=-\dfrac{y'^2+y'^4}{2y}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

$\triangle$ Функция $F(x;y;z)=-\dfrac{y'^2+y'^4}{2y}$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $F'_y=\dfrac{y'^2+y'^4}{2y^2}$, $F'_{y'}=\dfrac{-(y'+2y'^3)}{y}$ в окрестности точки (0; 1; 2). Поэтому в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Положим $y'=p$, где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция.

Тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Относительно $p=p(y)$ мы получим уравнение

$$p\frac{dp}{dy}=-\frac{p^2+p^4}{2y}.$$

Для искомого решения $p\neq 0$. Разделяя переменные, получим

$-\dfrac{d(p)^2}{p^2(p^2+1)}=\dfrac{dy}{y}$ или $\dfrac{d(p^2+1)}{p^2+1}-\dfrac{d(p^2)}{p^2}=\dfrac{dy}{y}$, откуда

$\ln\dfrac{p^2+1}{p^2}=\ln c|y|$ $(c>0)$, $\dfrac{p^2+1}{p^2}=c_1y$ $(c_1\neq 0)$.

Используя начальные условия находим $c_1 = \frac{5}{4}$.

Имеем $\frac{p^2+1}{p^2} = \frac{5}{4}y$, $p^2 + 1 = \frac{5}{4}p^2 y$, $p = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y - 1}}$.

Согласно произведенной замене, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y-1}}, \ \sqrt{\frac{5}{4}y-1}\,dy = dx, \ \frac{8}{15}\left(\frac{5}{4}y-1\right)^{3/2} = x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем $c_2 = \frac{1}{15}$.

Поэтому $y = \frac{1}{15}(15x+1)^{2/3} + \frac{4}{5}$. ▲

Пример 9

Найдите кривую, проходящую через точку (1; 1), у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

△ В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 3).

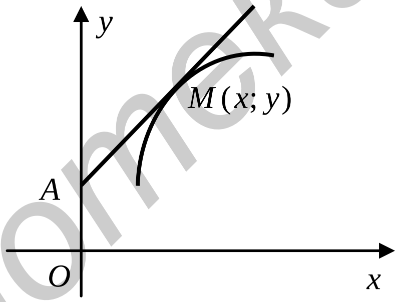

Рис. 3

$Y - y = y'(X - x)$.

Полагая $X = 0$, находим ординату точки *A*: $Y = y - y'x$. Получаем дифференциальное уравнение $Y - y'x = x$, или $y' - \frac{1}{x}y = -1$. Это линейное уравнение.

Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u''v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -1.$$

Находим частное решение уравнения: $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}v = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\ln v = \ln x$, $v = x$.

Далее ищем общее решение уравнения: $\dfrac{du}{dx}x=-1.$

Имеем $du=-\dfrac{dx}{x}$, $u=\ln c_1-\ln|x|=\ln\dfrac{c_1}{|x|}.$

Искомое общее решение принимает вид $y=x\cdot\ln\dfrac{c}{x}.$

Используя начальное условие, получим $1=\ln c$, $c=e.$

Уравнение кривой будет $y=x\ln\dfrac{e}{x}=x(\ln e-\ln x)=x(1-\ln x).$ ▲

Пример 10

Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100 °С до 60 °С за 20 мин. Температура воздуха 25 °С. Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до 30 °С?

△ Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет

$$\frac{dT}{d\tau}=k(T-t),$$

где T – температура хлеба;

t – температура окружающего воздуха;

k – коэффициент пропорциональности;

$\dfrac{dT}{d\tau}$ – скорость охлаждения хлеба.

Пусть τ – искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим $\dfrac{dT}{T-\tau}=kd\tau$.

Для условий задачи $\dfrac{dT}{T-25}=kd\tau.$ Интегрируя, получаем

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25}=k\int d\tau,\ \ln(T-25)=k\tau+\ln c,\ T-25=ce^{k\tau}.$$

Произвольную постоянную c определяем из начального условия: при $\tau=0$ $T=100$ °С. Отсюда $c=100-25=75$. Подставив в полученное уравнение $T=60$ и $\tau=20$, получим $e^k=\left(\dfrac{35}{75}\right)^{1/20}=\left(\dfrac{7}{15}\right)^{1/20}.$

Уравнение охлаждения хлеба примет вид $T=75\cdot\left(\dfrac{7}{15}\right)^{\tau/20}+25.$

Отсюда $5 = 75 \cdot \left(\dfrac{7}{15}\right)^{\tau/20}$, или $\tau = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ мин. ▲

Пример 11

Найдите форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

△ Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которого параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось Ox и найдем уравнение кривой, вращением которой образуется искомая поверхность (рис. 4).

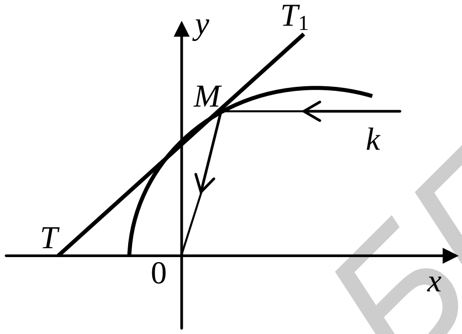

Рис. 4

Пусть kM – падающий луч, MO – отраженный луч. В точке M проведем касательную TT_1 к искомой кривой. Так как $\angle T_1MK = \angle TM_0 = \angle MTO,$ то треугольник MTO является равнобедренным. Следовательно, $|OM| = |OT|,$ но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной.

$Y - y = y'(X - x)$, полагая $Y = 0$, имеем $X = x - \dfrac{y}{y'}$.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \dfrac{y}{y'}$, или $(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0.$ Это однородное уравнение. Здесь более целесообразно считать x функцией, а y – аргументом. Применим подстановку $\dfrac{x}{y} = t.$ Тогда получим $(\sqrt{t^2y^2 + y^2} + ty)dy - y(tdy + ydt) = 0,$ или $\sqrt{t^2 + 1}dy - ydt = 0.$ Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},\quad \ln y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \ln c_1 \quad (y > 0).$$

Возвращаясь к переменным x и y, имеем

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{c} \quad \text{или} \quad y^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right).$$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения $y^2+z^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right)$. ▲

Пример 12

Среднее геометрическое координат точки касания кривой равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1; 1).

△ В точке $M(x;\ y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 5).

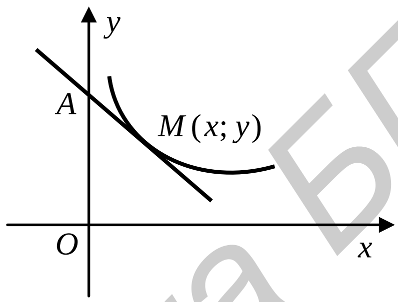

Рис. 5

$Y-y=y'(X-x)$.

Полагая $X=0$, находим ординату точки *A*: $Y=y-y'x$.

Получаем дифференциальное уравнение

$\sqrt{xy}=\dfrac{y-y'x}{2y}$, или $y'-\dfrac{1}{x}y=2x^{-1/2}y^{3/2}$. Это уравнение Бернулли.

Сделав подстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, получим

$$u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=2x^{-1/2}u^{3/2}v^{3/2},\ \ u'v+u\left(v'-\frac{1}{x}v\right)=2x^{-1/2}u^{3/2}v^{3/2}.$$

Находим частное решение уравнения $v'-\dfrac{1}{x}v=0$, $v=x$.

Находим общее решение уравнения

$$u'x=2x^{-1/2}u^{3/2}x^{3/2},\quad \frac{1}{2}du\cdot u^{-3/2}=dx,\ \ u=\frac{1}{(x+c)^2}.$$

Искомое общее решение принимает вид $y=uv=\dfrac{x}{(x+c)^2}$.

Используя начальное условие $y(1)=1$, получаем две интегральные кривые $xy=1$ и $x-y(x-2)^2=0$. ▲

Самостоятельная работа к занятиям 4–5

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}.$ Ответ: $y(\ln y - 1) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + c.$

2. $y' = \dfrac{y(x+y)}{x^2}.$ Ответ: $y = \dfrac{-x}{\ln|cx|}.$

3. $y' + \dfrac{1}{x}y = e^{-x^2}, \; y(1) = \dfrac{1}{2e}.$ Ответ: $y = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}.$

4. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x\cos y)dy = 0.$ Ответ: $x^3 + 3y + 3x\sin y = c.$

5. $y'' + \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{1}{x^3}.$ Ответ: $y = c_1 \ln x + \dfrac{1}{x} + c_2.$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $(1+e^x)y \cdot y' = e^x.$ Ответ: $y^2 = 2\ln\left|c(e^x+1)\right|.$

2. $y' = \dfrac{y^2 + 2x^2}{xy}.$ Ответ: $y^2 = 4x^2 \ln|cx|.$

3. $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}, \; y(0) = 0.$ Ответ: $y = \dfrac{1}{3}x^3 e^{x^3}.$

4. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0.$ Ответ: $x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = 0.$

5. $y'' - \dfrac{1}{x}y' = x.$ Ответ: $y = \dfrac{x^3}{3} + c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2.$

Дополнительные задачи

1. Решите уравнение $y''' = x \ln x.$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{24}\ln x - \dfrac{13}{288}x^4 + c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$

2. Решите уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

Ответ: $y = c_1 \ln x + \dfrac{1}{x} + c_2.$

3. Решите уравнение $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}.$

Ответ: $y = -\sin x - c_1 \cos x + c_2 x + c_3.$

4. Решите задачу Коши: $y'' = \dfrac{1}{y^3}, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$

Ответ: $x = y^2 - 1.$

5. Запишите уравнение линии, проходящей через точку $A(1;\ 0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси Oy, равен расстоянию от точки касания до начала координат.

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}(1 - x^2).$

Занятия 6–7

Линейные уравнения высших порядков

Пример 1

Найдите определитель Вронского систем функций:

а) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x;\ \ J=(-\infty;+\infty)$;

б) $3, \cos^2 x, \sin^2 x;\quad J=(-\infty;+\infty)$;

в) $x^2, x\cdot|x|;\quad J=(-\infty;+\infty)$.

Исследовать данные функции на линейную зависимость.

$\triangle$ а) находим $W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=2e^{3x}.$$

Поскольку $W(x)\neq 0,$ данные функции линейно независимы на *J*;

б) $W(x)=\begin{vmatrix} 3 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=0.$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Но так как $\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\sin^2 x\equiv 0$ при $\alpha_1=-\dfrac{1}{3},\ \alpha_2=\alpha_3=1,$ данные функции являются линейно зависимыми на *J*;

в) для функции $f(x)=x\cdot|x|$ при $x>0\quad f'(x)=2x=2|x|,$ при $x<0\ \ f'(x)=-2x=2|x|,$ при $x=0\ \ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot|x|-0}{x}=0=2|x|\Big|_{x=0}$.

Таким образом, $(x\cdot|x|)'=2x,\ \ x\in J.$

Находим $W(x)=\begin{vmatrix} x^2 & x\cdot|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix}=0.$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Данные функции линейно независимы на *J*, так как тождество $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \cdot |x| \equiv 0 \quad (x \in J)$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, при $x = 1$ получаем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; при $x = -1$ имеем

$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Эта система имеет решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. ▲

Пример 2

Покажите, что функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения второго порядка, и найдите решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $y(1) = 1,\ y'(1) = -2$.

△ Находим определитель Вронского $W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6$.

Следовательно, функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными функциями при $x \neq 0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = c_1 x^2 + c_2 x^5$, где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

Для решения поставленной задачи Коши необходимо определить значения постоянных c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись заданные начальные условия.

Имеем $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 5c_2 = -2 \end{cases}$, откуда $c_1 = \frac{7}{3}$, $c_2 = -\frac{4}{3}$.

Поэтому решение данной задачи Коши имеет вид

$y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^5$. ▲

Пример 3

Покажите, что функции $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составьте это уравнение.

△ Найдем $W(y_1; y_2; y_3)$:

$$W(y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \neq 0 \quad \forall x \in R.$$

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка с коэффициентами непрерывными на $(-\infty; +\infty)$.

Это уравнение имеет вид: $W(y; y_1; y_2; y_3) = 0.$

$$W(y; y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} y & 1 & x & e^x \\ y' & 0 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -e^x \begin{vmatrix} y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 1 \\ y''' & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} y'' & 1 \\ y''' & 1 \end{vmatrix} = e^x (y'' - y''').$$

Искомое уравнение имеет вид $e^x (y'' - y''') = 0,$ или $y''' - y'' = 0.$ ▲

Пример 4

Найдите общие решения уравнений:

а) $y'' + 5y' + 6y = 0;$ б) $y'' - 6y' = 0;$

в) $y'' + 4y' + 4y = 0;$ г) $y'' + 2y' + 7y = 0.$

△ а) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ – числа $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}, e^{-3x}.$

Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x};$

б) корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ – числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 6.$ Фундаментальную систему решений образуют функции 1 и e^{6x}. Общее решение имеет вид $y = c_1 + c_2 e^{6x};$

в) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ – числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -2.$ Фундаментальную систему решений образуют функции e^{-2x} и xe^{-2x}. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x};$

г) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 7$ – числа $\lambda_{1,2} = 0 - 1 \pm i\sqrt{6}.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-x} \cos\sqrt{6}x$ и $e^{-x} \sin\sqrt{6}x.$ Общее решение имеет вид

$$y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{6}x + c_2 \sin\sqrt{6}x).$$ ▲

Пример 5

Найдите общие решщения уравнений:

а) $y^{(4)} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0;$ б) $y''' + 8y = 0;$

в) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0;$ г) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0;$

д) $y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 4y' - 4y = 0.$

△ а) находим корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0.$$

Имеем $\lambda(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6)=\lambda(\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+5\lambda+6\lambda-6)=$
$=\lambda(\lambda^2(\lambda-1)-5\lambda(\lambda-1)+6(\lambda-1))=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$

Откуда $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2,\ \lambda_4=3.$ Фундаментальную систему решений образуют функции $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$. Общее решение имеет вид

$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+c_4e^{3x}$;

б) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3+8=0$. Имеем $(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)=0$. Откуда $\lambda_1=-2,\ \lambda_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}x$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x},\ e^x\cos\sqrt{3}x,\ e^x\sin\sqrt{3}x$. Общее решение имеет вид $y=c_1e^{-2x}+e^x(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x)$;

в) находим корни характеристического уравнения $\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2=0$. Имеем $\lambda^2(\lambda-1)^3=0$. Откуда $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_{3,4,5}=1$. Фундаментальную систему решений образуют функции $1,\ x,\ e^x, x\,e^x,\ x^2e^x$. Общее решение имеет вид $y=c_1+c_2x+e^x(c_3+c_4x+c_5x^2)$;

г) находим корни характеристического уравнения $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$. Имеем $(\lambda^2+1)^2=0$. Откуда $\lambda_{1,2}=i,\ \lambda_{3,4}=-i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x$. Общее решение имеет вид

$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$;

д) находим корни характеристического уравнения

$\lambda^5-\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-4=0$.

Имеем $\lambda^4(\lambda-1)+4\lambda^2(\lambda-1)+4(\lambda-1)=0,\ (\lambda-1)(\lambda^2+2)^2=0$. Откуда $\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}\,i,\ \lambda_{4,5}=-\sqrt{2}\,i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^x,\ \cos\sqrt{2}x,\ \sin\sqrt{2}x,\ x\cos\sqrt{2}x,\ x\sin\sqrt{2}x$. Общее решение имеет вид $y=c_1e^x+(c_2+c_3x)\cos\sqrt{2}x+(c_4+c_5x)\sin\sqrt{2}x$. ▲

Пример 6

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решите уравнение

$$y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

△ Решим соответствующее однородное уравнение $y''-y=0$. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2-1=0$. Откуда $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$. фундаментальную систему решений образуют функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-x}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Общее решение имеет вид $y=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}$.

Составим систему $\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1}. \end{cases}$

Решая ее, находим $c_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1}$, $c_2'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^x+1}$.

Интегрируя, имеем $c_1(x) = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \left|e^x = t\right| =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c_1;$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{e^x+1-1}{e^x+1}de^x = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c_2.$$

Общее решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2}((x - \ln(e^x+1))e^x + (-1 + \ln(e^x+1))e^{-x}) + c_1e^x + c_2e^{-x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7

Укажите вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$;

б) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

в) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;

г) $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x + xe^{2x}$;

д) $y''' + 6y'' + 10y' = xe^{-3x}\cos x + x$;

е) $y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x}\sin 2x$.

$\triangle$ а) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = x(A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{2x};$$

б) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3x^2e^{2x};$$

в) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Частное решение имеет вид

$$y^* = e^x(A_1 \sin x + A_2 \cos x);$$

г) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Частное решение имеет вид

$$y^* = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x + x(A_4x + A_5)e^{2x};$$

д) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3 \pm i$. Частное решение имеет вид

$$y^* = xe^{-3x}((A_1x + A_2)\cos x + (A_3x + A_4)\sin x) + x(A_5x + A_6);$$

е) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 4\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1x + A_2xe^{2x} + e^{2x}(A_4\sin 2x + A_5\cos 2x). \quad ▲$$

Пример 8

Найдите общее решение уравнения $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 5$.

△ Так как характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет укорни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$, то общим решением соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ является функция $Y_{o.o} = c_1 + c_2x + c_3e^x$. Частное решение уравнения определяется формулой

$$y^* = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Находим

$$y^{*'} = 4A_1x^3 + 3A_2x^2 + 2A_3x;$$

$$y^{*''} = 12A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3;$$

$$y^{*'''} = 24A_1x + 6A_2.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$24A_1x + 6A_2 - 12A_1x^2 - 6A_2x - 2A_3 \equiv 3x^2 - 2x + 5$$ или

$$(3 + 12A_1)x^2 + (6A_2 - 24A_1 - 2)x + (5 + 2A_3 - 6A_2) \equiv 0,$$

откуда $\begin{cases} 3 + 12A_1 = 0, \\ 6A_2 - 24A_1 - 2 = 0, \\ 5 + 2A_3 - 6A_2 = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -\frac{2}{3}$, $A_3 = -\frac{9}{2}$.

Общее решение имеет вид $Y_{o.н} = c_1 + c_2x + c_3e^x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2$. ▲

Пример 9

Решите уравнение $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.

△ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $Y_{o.o} = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$. Частное решение уравнения определяется формулой $y^* = A_1\cos 3x + A_2\sin 3x$. Подставляя функцию y^* и ее производные $y^{*'} = -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x, \quad y^{*''} = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A_1 - 6A_2)\cos 3x + (6A_1 + A_2)\sin 3x = 37\cos 3x,$$

откуда $\begin{cases} A_1 - 6A_2 = 37, \\ 6A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим $A_1 = 1, \; A_2 = -6.$

Следовательно, $Y_{о.н} = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x.$ ▲

Пример 10

Решите уравнение $y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}.$

△ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i,$ поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{о.о} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$ Пользуясь принципом суперпозиции (наложения), частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^{*} = y_1^{*} + y_2^{*} = (A_1 x + A_2)e^{x} + A_3 e^{-x}.$

Итак,

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & y^{*} = (A_1 x + A_2)e^{x} + A_3 e^{-x}, \\ 0 & y^{*'} = A_1 e^{x} + (A_1 x + A_2)e^{x} - A_3 e^{-x}, \\ 1 & y^{*''} = 2A_1 e^{x} + (A_1 x + A_2)e^{x} + A_3 e^{-x}, \end{array}\right.$$

$$y^{*''} + y^{*} = 2A_1 xe^{x} + (2A_1 + 2A_2)e^{x} + 2A_3 e^{-x} \equiv xe^{x} + 2e^{-x}.$$

Отсюда $\begin{cases} 2A_1 = 1, \\ 2A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_3 = 2, \end{cases} \quad A_1 = \dfrac{1}{2}, \; A_2 = -\dfrac{1}{2}, \; A_3 = 1.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$Y_{о.н} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^{x} + e^{-x}. \quad ▲$$

Пример 11

Решите уравнение $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$

△ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$ поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $Y_{о.о} = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}.$ Так как число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y^{*} = x^2(A_1 x + A_2)e^{x} = (A_1 x^3 + A_2 x^2)e^{2x}.$

Находим

$$y^{*'} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x},$$

$$y^{*''} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}.$$

Таким образом,

$$+\left|\begin{array}{r} 4 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right|\begin{array}{l} y^{*} = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}, \\ y^{*'} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x}, \\ y^{*''} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}, \end{array}$$

$$y''^{*} - 4y^{*'} + 4y^{*} = 6A_1xe^{2x} + 2A_2e^{2x} \equiv xe^{2x}.$$

Отсюда $A_1 = \frac{1}{6},\ A_2 = 0.$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$Y_{о.н} = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{x^3}{6}e^{2x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 12

Решите задачу Коши $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,\ y(0) = \frac{1}{8},\ y'(0) = 1.$

$\triangle$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$ поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{о.о} = c_1 + c_2e^{2x}.$ Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^{*} = y_1^{*} + y_2^{*} = A_1xe^{2x} + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x.$

Подставляя функцию y^{*} и ее производные

$$y^{*'} = 2A_1e^{2x} + 2A_1xe^{2x} + 3A_2x^2 + 2A_3x + A_4,$$

$$y^{*''} = 6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x + 2A_3 - 4A_1e^{2x} - 4A_1xe^{2x} - 6A_2x^2 - 4A_3x - 2A_4 \equiv$$

$$\equiv e^{2x} + x^2 - 1, \text{ откуда } \begin{cases} 2A_1 = 1, \\ -6A_2 = 1, \\ -6A_2 - 4A_3 = 0, \\ 2A_3 - 2A_4 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -\frac{1}{6},\ A_3 = -\frac{1}{4},\ A_4 = \frac{1}{4}.$

Следовательно, $Y_{о.н} = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$

Для того чтобы решить задачу Коши находим

$$Y'_{о.н} = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Используя начальные условия, получаем систему для определения c_1 и c_2:

$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{1}{8} \\ 2c_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases}$, откуда находим $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{8}$.

Таким образом, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x.$ ▲

Дополнительные задачи

1. Решите уравнения:

а) $y'' - y' + y = 0$; б) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$; в) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$.

Ответ: а) $y = e^{x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

б) $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$;

в) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$.

2. Решите уравнение методом вариации произвольных постоянных:

а) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$; б) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

Ответ: а) $y = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + c_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + c_1\right)\sin 2x$;

б) $y = c_1 + c_2 e^x - \cos(e^x)$.

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' + y = x\cos x$; б) $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$;

в) $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$.

Ответ: а) $y = x((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$;

б) $y = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$;

в) $y = e^x(A\cos x + B\sin x) + x(Cx^2 + Dx + F)$.

4. Решите уравнения:

а) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$; б) $y''' - y'' = -3x + 1$; в) $y'' - y = \cos^2 x$.

Ответ: а) $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + c_1 + c_2 e^{3x}$;

б) $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + c_1 e^x + c_2 + c_3 x$;

в) $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Занятия 8–9

Системы дифференциальных уравнений

Пример 1

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{\cos t}. \end{cases}$

$\triangle$ Первое уравнение решаем независимо от второго. Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = \sin t dt,\ \ \ln|x| = c - \cos t,\ \ x = c_1 e^{-\cos t} \quad (c_1 \in R).$$

Подставляем найденное значение $x(t)$ во второе уравнение $\dfrac{dy}{dt} = c_1.$

Отсюда $y = c_1 t + c_2.$ ▲

Пример 2

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \end{cases} \quad t > 0.$

$\triangle$ Сложив почленно данные уравнения, получим

$$\frac{d}{dt}(x+y) = -\frac{1}{t}(x+y), \text{ откуда } \ x + y = \frac{c_1}{t}.$$

Вычитая почленно исходные уравнения, имеем

$$\frac{d}{dt}(x-y) = \frac{1}{t}(x-y), \text{ откуда } \ x - y = c_2 - t.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{c_1}{t}, \\ x - y = c_2 t, \end{cases}$ находим

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{t} + c_2 t\right),\ \ y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{t} - c_2 t\right). \quad ▲$$

Пример 3

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$

$\triangle$ Умножив обе части первого уравнения на y, а второго – на x и сложив почленно полученные уравнения, имеем $y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{xy}{t}$ или $d(xy)=\dfrac{xy}{t}$.

Отсюда $xy=c_1t$.

Заменяя в первом уравнении данной системы xy на c_1t, получим $\dfrac{dx}{dt}c_1tx.$

Интегрируя это уравнение, находим $x=c_2e^{c_1\frac{t^2}{2}}$. Если $c_2\neq 0,$ то $y=\dfrac{c_1t}{x}=\dfrac{c_1}{c_2}te^{c_1\frac{t^2}{2}}$.

Если $c_2=0,$ т. е. $x=0,$ то $y=ct;$ если $y=0,$ то $x=c.$ ▲

Пример 4

Найдите общее решение системы $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y-4z=0,\\ \dfrac{dz}{dx}+y-3z=3x^2\end{cases}$ и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-7,\ z(0)=-1\dfrac{3}{4}$.

$\triangle$ Дифференцируем по x первое уравнение $y''+2y'-4z'=0$. Подставляем в это уравнение $z'=3x^2-y+3z,$ а затем $z=\dfrac{1}{4}(y'+2y)$. В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y: $y''-y'-2y=12x^2$.

Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-2=0,$
$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2.$

$Y_{о.о}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x};\ Y_{ч.н}=A_1x^2+A_2x+A_3;\ Y'_{ч.н}=2A_1x+A_2;\ Y''_{ч.н}=2A.$

Находим неизвестные коэффициенты A_1, A_2, A_3:

$2A_1-2A_1x-A_2-2A_1x^2-2A_2x-2A_3\equiv 12x^2,\ A_1=-6,\ A_2=6,\ A_3=-9.$

Следовательно, $Y_{о.н}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-6x^2+6x-9,$

$Z_{о.н}=\dfrac{y'+2y}{4}=\dfrac{1}{4}c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-3x^2-3.$

Подставив в полученные соотношения $x=0,\ y=-7,\ z=-1\frac{3}{4}$, получим
$$\begin{cases} c_1+c_2-9=-7, \\ \frac{1}{4}c_1+c_2-3=-1\frac{3}{4}, \end{cases} \quad c_1=1,\ c_2=1.$$

Частное решение имеет вид $\begin{cases} y=e^{-x}+e^{2x}-6x^2+6x-9, \\ z=\frac{1}{4}e^{-x}+e^{2x}-3x^2-3. \end{cases}$ ▲

Пример 5

Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=-y-2z, \\ \frac{dz}{dx}=3y+4z, \end{cases}$ найдите ее частные решения, удовлетворяющее начальным условиям: $y=-1,\ z=2$ при $x=0$.

△ Частные решения этой системы ищем в виде $y=\alpha e^{\lambda x},\ z=\beta e^{\lambda x}$.

Составляем характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-3\lambda+2=0.$ Оно имеет корни $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. При $\lambda=\lambda_1=1$ система уравнений для нахождения α и β имеет вид
$$\begin{cases} -2\alpha-2\beta=0, \\ 3\alpha+3\beta=0. \end{cases}$$

Она эквивалентна уравнению $\alpha+\beta=0$, одно из решений которого: $\alpha=1, \beta=-1$. Поэтому характеристическому числу $\lambda=1$ соответствует частное решение $y_1=e^x,\ z_1=-e^x$.

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2=2$:
$$\begin{cases} -3\alpha-2\beta=0, \\ 3\alpha+2\beta=0. \end{cases}$$

Одно из решений этой системы: $\alpha=2,\ \beta=-3$.

Таким образом, $y_2=2e^{2x},\ z_2=-3e^{2x}$.

Общим решением системы уравнений будет $\begin{cases} y=c_1e^x+2c_2e^{2x}, \\ z=-c_1e^x-3c_2e^{2x}. \end{cases}$

Найдем частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 0,\ y = -1,\ z = 2,$ имеем $\begin{cases} -1 = c_1 + 2c_2, \\ 2 = -c_1 - 3c_2. \end{cases}$ откуда $c_1 = 1, c_2 = -1.$

Поэтому частным решением будет $\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x}, \\ z = -e^x + 3e^{2x}. \end{cases}$ ▲

Пример 6

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

△ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 2$ кратностью два, частные решения системы ищем в виде $x = (\alpha + \gamma t)e^{2t}$, $y = (\beta + \delta t)e^{2t}$. Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\begin{cases} \gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\ \delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + \beta = 0, \\ \gamma + \delta = 0. \end{cases}$$

Полученная алгебраическая система имеет два линейно независимых решения, так как она содержит четыре неизвестных и ранг матрицы системы не равен нулю.

Очевидно, что в качестве таких решений можно взять, например, $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \delta = 0$ и $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1.$ Следовательно, найдены два линейно независимых решения исходных уравнений:

$$x_1 = e^{2t},\ y_1(t) = -e^{2t} \text{ и } x_2 = (1+t)e^{2t},\ y_2(t) = -te^{2t}.$$

Все решения начальной системы уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2(1+t)e^{2t}, \\ y = -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t}. \end{cases}$$ ▲

Пример 7

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

$\triangle$ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \ \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $y = \alpha e^{(2+i)x}$, $z = \beta e^{(2+i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2 \pm i$. Числа α и β определяем из уравнения $-i\alpha - \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = -i$, так что

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x) \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i \cos x) \end{cases}.$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x} \cos x, \\ z_1 = e^{2x} \sin x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = e^{2x} \sin x, \\ z_2 = -e^{2x} \cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет $\begin{cases} y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \\ z = e^{2x}(c_1 \sin x - c_2 \cos x). \end{cases}$ ▲

Пример 8

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases}$

$\triangle$ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1.$$

Частные решения системы будем искать в виде $x_1 = \alpha e^{\lambda t}$, $x_2 = \beta e^{\lambda t}$, $x_3 = \gamma e^{\lambda t}$.

Корню $\lambda_1 = 0$ соответствует система из двух уравнений (третье есть следствие первых двух): $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 2,\ \beta = -4,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем одно решение исходной системы:

$x_1^{(1)} = 2e^{0t} = 2,\ x_2^{(1)} = -4e^{0t} = -4,\ x_3^{(1)} = -1e^{0t} = -1.$

Корню $\lambda_2 = 1$ соответствует система $\begin{cases} 2\gamma = 0, \\ -\alpha - 3\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0.$

Получаем второе решение исходной системы: $x_1^{(2)} = 0,\ x_2^{(2)} = e^t,\ x_3^{(2)} = 0.$

Корню $\lambda = -1$ соответствует система $\begin{cases} 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$

Одно из решений: $\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = -1.$

Отсюда получаем третье решение исходной системы: $x_1^{(3)} = e^{-t},\ x_2^{(3)} = -2e^{-t},\ x_3^{(3)} = -e^{-t}.$

Общее решение имеет вид

$$x = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 2c_1 + c_3e^{-t}, \\ x_2 = -4c_1 + c_2e^t - 2c_3e^{-t}, \\ x_3 = -c_1 - c_3e^{-t}. \end{cases} \quad ▲$$

Пример 9

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$:

а) методом вариации произвольных постоянных;

б) методом неопределенных коэффициентов.

△ а) рассмотрим однородную систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Ее решение ищем в виде $x = \alpha e^{\lambda t},\ y = \beta e^{\lambda t}$, где λ – корень уравнения $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.$

Соответствующие корню $\lambda_1 = 1$ значения α и β определяем из уравнения $2\alpha + 2\beta = 0$. Одно из решений этого уравнения есть $\alpha = 1,\ \beta = -1$. Поэтому $x_1 = e^t,\ y_1 = -e^t$ – решение однородной системы. Значения α и β, соответствующие второму корню $\lambda = 4$, определяются из уравнения $-\alpha + 2\beta = 0$. Числа $\alpha = 2,\ \beta = 1$ удовлетворяют этому уравнению, поэтому $x_2 = 2e^{4t},\ y_2 = e^{4t}$ – решение однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = c_1(t)e^t + 2c_2(t)e^{4t}, \\ y = -c_1(t)e^t + c_2(t)e^{4t}. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в начальную систему уравнений, получим $\begin{cases} c_1'(t)e^t + 2c_2'(t)e^{4t} = 3e^{2t}, \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{4t} = e^{2t}. \end{cases}$ Отсюда $c_1'(t) = \dfrac{1}{3}e^t,\ c_2'(t) = \dfrac{4}{3}e^{-2t}$ или

$$c_1(t) = \frac{1}{3}e^t + c_1,\ c_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + c_2\ .$$

Подставляем найденные значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в решение неоднородной системы. Окончательно получим

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}; \end{cases}$$

б) общее решение линейной неоднородной системы имеет вид

$$X_{о.н} = X_{о.о} + X_{ч.н}.$$

Найдем $X_{ч.н} = \begin{pmatrix} x_{ч.н} \\ y_{ч.н} \end{pmatrix}$.

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, частное решение системы ищем в виде: $x = \alpha e^{2t},\ y = \beta e^{2t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов α и β:

$$\begin{cases} 2\alpha = 3\alpha + 2\beta + 3, \\ 2\beta = \alpha + 2\beta + 1, \end{cases} \quad \alpha = -1,\ \beta = -1.$$

Таким образом, искомое частное решение есть $x_{ч.н} = -e^{2x}$, $y_{ч.н} = -e^{2x}$, а общее решение системы имеет вид $\begin{cases} x = c_1e^t + 2c_2e^{4t} - e^{2t} \\ y = -c_1e^t + c_2e^{4t} - e^{2t} \end{cases}$. ▲

Пример 10

Для системы неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

запишите структуру его частного решения.

△ Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Так как число 1 является простым корнем характеристического уравнения, а число 4 не является корнем характеристического уравнения, частное решение данной системы имеет вид

$$x_{ч.н} = (A_1 + A_2t)e^t + A_3e^{4t},\ y_{ч.н} = (B_1 + B_2t)e^t + B_3e^{4t}.\ ▲$$

Пример 11

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

△ Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $x = \alpha e^{it}$, $y = \beta e^{it}$. Числа α и β определяем из уравнения $i\alpha + \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = i$.

Таким образом, $x = e^{it} = \cos t + i\sin t$, $y = ie^{it} = -\sin t + i\cos t$.

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} x_1 = \cos t, \\ y_1 = -\sin t. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sin t, \\ y_2 = \cos t. \end{cases}$$

Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Решение неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Отсюда $c_1'(t) = -\cos t$, $c_2'(t) = \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$.

Интегрируя, находим $c_1(t) = -\int \cos t dt = c_1 - \sin t$,

$$c_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = -\int \frac{(1 - \cos^2 t) d \cos t}{\cos^2 t} = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Поэтому $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{cases}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Решите систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка.

Ответ: $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \ \ y = \dfrac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t).$

2. Решите систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ с помощью характеристического уравнения.

Ответ: $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}, \ \ y = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^{t}.$

3. Найдите общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$ методом вариации постоянных.

Ответ: $y = -2e^{-x} + c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}, \quad z = e^{-x} - c_1 e^{x} - 3c_2 e^{2x}.$

4. Найдите общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

Ответ: $x = 2c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}, \quad y = 3c_1 - 2c_3 e^{2t}, \ \ z = c_1 + c_2 e^{t} + 2c_3 e^{2t}.$

Занятие 10

Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите задачу Коши
$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 0.$

Ответ: $y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}.$

2. Найдите общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:
$y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x.$

Ответ: $y = 2\sin 2x \ln\left|\operatorname{tg} x\right| + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' + 4y' + 5y = 3xe^{-2x}\cos x;$

б) $y''' - 4y' = e^{2x}\cos 2x - 4x.$

Ответ: а) $y = e^{-2x}((Ax^2 + Bx)\cos x + (Dx^2 + Kx)\sin x);$

б) $y = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + (Dx^2 + Kx).$

4. Найдите общее решение уравнения
$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$

Ответ: $y = c_1e^{6x} + c_2xe^{6x} + 7x^2e^{6x}.$

5. Решите задачу Коши
$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 4.$

Ответ: $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x.$

6. Решите систему методом исключения: $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

Ответ: $y = 2e^{2x} + c_1e^{x} + c_2e^{-x}, \;\; z = 9e^{2x} + 3c_1e^{x} + c_2e^{-x}.$

7. Решите систему методом Эйлера: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 2z. \end{cases}$

Ответ: $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x), \;\; z = e^{2x}(c_1\sin 3x - c_2\cos 3x).$

Вариант 2

1. Решите задачу Коши

$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -14.$

Ответ: $y = e^{x} - 3xe^{x} - e^{-3x}.$

2. Найдите общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

$y'' + \dfrac{1}{4}y = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}.$

Ответ: $y = \sin\dfrac{x}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right| + c_1\cos\dfrac{x}{2} + c_2\sin\dfrac{x}{2}.$

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{x}\sin 2x;$

б) $y''' - 2y'' = e^{2x}\sin 2x + 3x.$

Ответ: а) $y = e^{x}((Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Dx^2 + Kx)\sin 2x);$

б) $y = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + (Dx^3 + Kx^2).$

4. Найдите общее решение уравнения

$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$

Ответ: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + 3x^2e^{-x}.$

5. Решите задачу Коши

$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$

Ответ: $y = e^{3x}(2\cos 4x - 3\sin 4x) + \sin 4x.$

6. Решите систему методом исключения: $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^{x}, \\ z' = 3y - 2z + 4e^{x}. \end{cases}$

Ответ: $y = xe^{x} + c_1e^{x} + c_2e^{-x}, \quad z = (x+1)e^{x} + c_1e^{x} + 3c_2e^{-x}.$

7. Решите систему методом Эйлера: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

Ответ: $x = e^{t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t), \quad y = e^{t}(c_1\sin 3t - c_2\cos 3t).$

Занятия 11–12

Кратные интегралы

Пример 1

Пользуясь определением двойного интеграла, вычислите $I = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2}} xy^2 dxdy.$

$\triangle$ Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки соответственно прямыми $x = \frac{k}{n}$, $y = \frac{2l}{n}$ $(k,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ n-1)$. При таком разбиении площади всех элементарных ячеек равны между собой и составляют $\frac{2}{n^2}$. При составлении интегральной суммы значения функции xy^2 будем брать в правой верхней вершине прямоугольника. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n^2}\cdot\frac{4kl^2}{n^3} = \frac{8}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{l=1}^{n}l^2$$

Как известно,

$$1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Отсюда, $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\cdot 2n^5} = \frac{4}{3}.$ ▲

Пример 2

Оцените интеграл $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 100}\frac{dxdy}{100+\cos x+\sin^2 x}.$

$\triangle$ Определим наибольшее и наименьшее значения функции в области интегрирования:

$$M = \max\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right) = \frac{1}{99};$$

$$m = \min\left(\frac{1}{100+\cos x+\sin^2 y}\right) = \frac{1}{102}.$$

Площадь интегрирования $S = 100\pi.$

Поэтому $\frac{100\pi}{102} \le I \le \frac{100\pi}{99}$, $\quad 3{,}08 \le I \le 3{,}17.$ ▲

Пример 3

Вычислите повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)dy$;

б) $\int\limits_0^{\sin 2} du \int\limits_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}dv$.

$\triangle$ а) $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)dy = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^x \cos(x+y)d(x+y) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=x} dx =$

$= \int\limits_0^{\pi/2} (\sin 2x - \sin x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0;$

б) $\int\limits_0^{\sin 2} du \int\limits_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}dv = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sin 2} u du \int\limits_0^u (u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}} d(u^2-v^2) =$

$= -\frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\sin 2} u\sqrt{u^2-v^2}\Big|_{v=0}^{v=u} du = -\int\limits_0^{\sin 2}(-u|u|)du = \int\limits_0^{\sin 2} u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^{\sin 2} = \frac{1}{3}\sin^3 2.$ ▲

Пример 4

Вычислите двойной интеграл $I = \iint\limits_D \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ по прямоугольной области $D: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$.

$\triangle$ С целью упрощения вычислений здесь целесообразно записать внутренний интеграл по переменной x:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (1+x^2+y^2)^{-3/2} d(1+x^2+y^2) =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\right)dy = \ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+2}}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$ ▲

Пример 5

Измените порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x;y)dy$;

б) $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x;y)dy.$

$\triangle$ а) в первом интеграле x изменяется от 0 до 1, а y от прямой $y = 0$ до кривой $y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

Область интегрирования изобразим на чертеже (рис. 6).

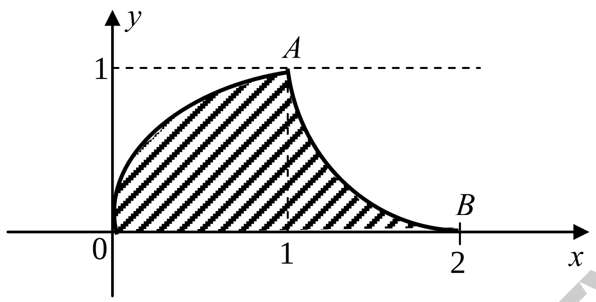

Рис. 6

Разрешим уравнения кривых OA и AВ относительно переменной x:

$y = x^{2/3} \Rightarrow x = y^{3/2};$

$y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2y - y^2}.$

Следовательно, $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x;y)dx;$

б) изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 7).

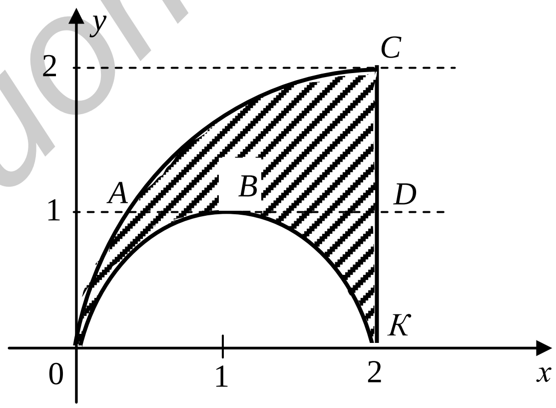

Рис. 7

Если к полуокружности $y = \sqrt{2x - x^2}$ провести касательную, параллельную оси Ox, то она разобьет данную область на три части: OAB, BDK и ACD.

Разрешим уравнения кривых OA, AC и BK относительно переменной x:

OA и AC: $y=\sqrt{2x} \Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2$;

OB: $y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x=1-\sqrt{1-y^2}$ $(x\le 1)$;

BK: $y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x=1+\sqrt{1-y^2}$ $(x\ge 1)$.

Уравнение прямой KC имеет вид $x=2$. В областях OAB и BDK y изменяется от 0 до 1, а в области ACD – от 1 до 2.

Таким образом,

$$I=\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x;y)dx+\int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x;y)dx+\int_1^2 dy \int_{y^2/2}^{2} f(x;y)dx. \blacktriangle$$

Пример 6

Вычислите $I=\int_D xydxdy$, если D: $y=x-4$, $y^2=2x$.

$\triangle$ Построим данные линии и найдем их точки пересечения (рис. 8)

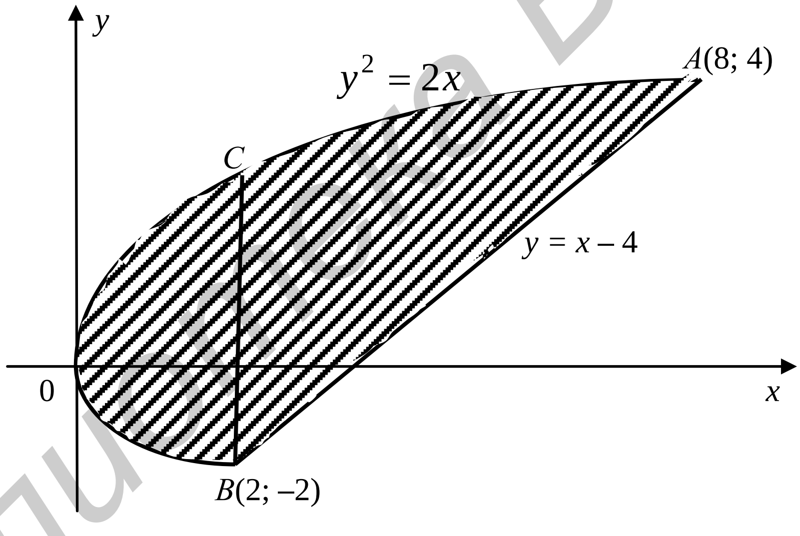

Рис. 8

Если внутренний интеграл записать по переменной x, то двойной интеграл по области D выразится одним двукратным интегралом:

$$I=\iint_{xy} dxdy=\int_{-2}^{4} ydy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} xdx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} yx^2\Big|_{x=\frac{1}{2}y^2}^{x=y+4}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left((y+4)^2-\frac{y^4}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90.$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по y, а затем по x, то нужно было бы область D предварительно разбить прямой BC на две части.

В этом случае $I = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy + \int_2^8 x dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y dx.$

Вычислив сумму этих двух интегралов, можно убедиться, что результат не зависит от порядка интегрирования. ▲

Пример 7

Вычислите $I = \iint\limits_D (\sin x - 2y) dxdy$, если $D: y = x^2,\ y = 2x + x^2,\ x = 0,$ $x = \dfrac{\pi}{2}.$

△ Начертим область интегрирования (рис. 9).

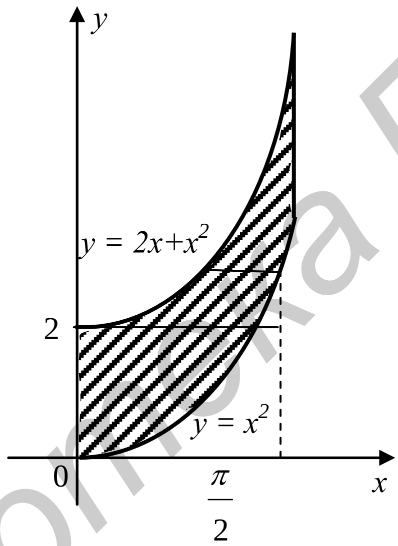

Рис. 9

Если интегрировать вначале по переменной x, то придется область D предварительно разбить прямыми, параллельными оси Ox, на три части. Поэтому целесообразно внутренний интеграл записать по переменной y.

Имеем:

$$I = \iint\limits_D (\sin x - 2y) dxdy = \int_0^{\pi/2} dx \int_{x^2}^{2+x^2} (\sin x - 2y) dy = \int_0^{\pi/2} (y \sin x - y^2) dx \Big|_{y = x^2}^{y = 2 + x^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} ((2 + x^2)\sin x - x^2 \sin x - (2 + x^2)^2 + x^4) dx = \int_0^{\pi/2} (2\sin x - 4x^2 - 4) dx =$$

$$= 2(1 - \pi) - \frac{\pi^3}{6}. \quad ▲$$

Пример 8

Вычислите $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,$ если $D: xy=1,\ xy=3,\ y=x,\ y=2x,\ x>0,\ y>0.$

$\triangle$ Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 10).

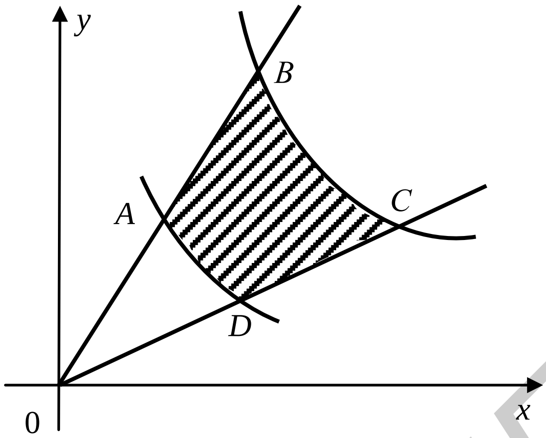

Рис. 10

Для вычисления этого интеграла в декартовой системе координат область $ABCD$ необходимо разбить прямыми, параллельными одной из координатных осей на три части. Затем вычислить интеграл по каждой частичной области и полученные результаты просуммировать. Однако существует более короткий путь вычисления этого интеграла. Осуществим переход к криволинейным координатам по формулам $xy=u,\ (1\le u\le 3),\ \ y=vx,\ (1\le v\le 2).$

Отсюда $x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ \ y=\sqrt{uv}.$

При этом, изображением области D является прямоугольник $D_1:\ 1\le u\le 3,\ 1\le v\le 2$ (рис. 11).

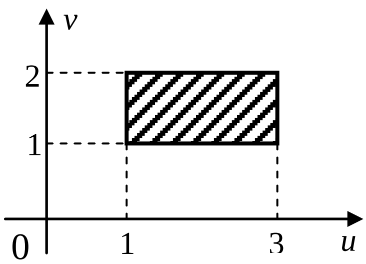

Рис. 11

Определяем якобиан преобразования:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy=\iint\limits_{D'}\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\dfrac{u}{v}}}\cdot\frac{1}{2v}\,dudv=\frac{1}{2}\int_1^3 du\int_1^2 dv=1.$$

▲

Пример 9

Переходя к полярным координатам, вычислите

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

△ Изобразим область интегрирования (рис. 12).

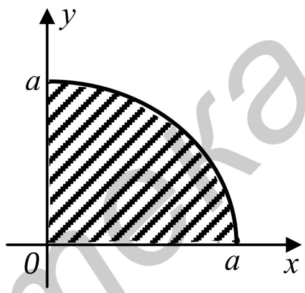

Рис. 12

Перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\;\; y=r\sin\varphi,\;\; \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right),\;\; I(r;\varphi)=r,\;\; \sqrt{x^2+y^2}=r.$$

Следовательно,

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r^2dr=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^a=\frac{1}{6}\pi a^3.$$

▲

Пример 10

Вычислите $\iint\limits_D\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, если $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

△ Из аналитического выражения подынтегральной функции и уравнения границы области D следует, что для решения этой задачи целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам. Положив $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi$, получим

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1-r^2},\ \ I(r;\varphi) = abr,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow\ r = 1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = ab\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 (1-r^2)^{1/2}d(1-r^2) =$$

$$= ab\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab. \qquad \blacktriangle$$

Пример 11

Приведите тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$ к трехкратному, если область интегрирования V ограничена поверхностями

$$z = x^2+y^2 \ \text{ и } \ z = 2-x^2-y^2.$$

$\triangle$ Очевидно, что тело ограничено снизу параболоидом $z = x^2+y^2$ и сверху – $z = 2-x^2-y^2$.

Найдем проекцию тела на плоскость *xOy* (рис. 13):

$$x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

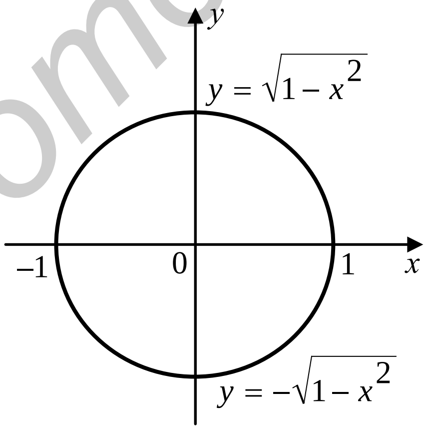

Рис. 13

Следовательно,

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x;y;z)dz\,. \quad \blacktriangle$$

Пример 12

Вычислите $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y}$, если $V: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

$\triangle$ Построим данные плоскости. Ограничения или область V есть тетраэдр $OABC$ (рис. 14).

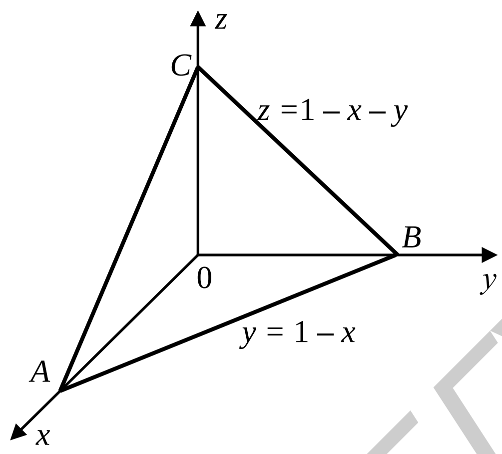

Рис. 14

Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси Oz пересекает его границу в двух точках. Уравнения плоскостей AOB и ACB имеют вид $z=0$ и $z=1-x-y$ соответственно.

Следовательно,

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1-x-y} = \iint\limits_{AOB} \frac{dxdy}{1-x-y}\int\limits_0^{1-x-y} dz = \iint\limits_{AOB} \frac{dxdy}{1-x-y}\left(z\Big|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \iint\limits_{AOB} dxdy = S_{AOB} = \frac{AO\cdot OB}{2} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 13

Вычислите $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, если область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ (первый октант).

$\triangle$ Область V ограничена снизу плоскостью $z=0$ и сверху – поверхностью $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Изобразим проекцию области V на плоскость xOy (рис. 15).

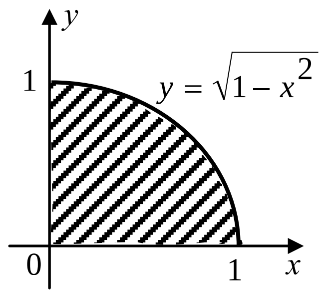

Рис. 15

Следовательно,

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - x^2y - y^3)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (2x - 2x^3 - 2x^3 + 2x^5 - x + 2x^3 - x^5)dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (x - 2x^3 + x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

▲

Пример 14

Вычислите $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, если $V: x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,\ z = 3.$

△ Проекция области V на плоскость xOy есть круг $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 16).

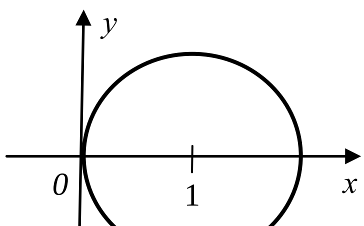

Рис. 16

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в этих координатах имеет вид

$$r = 2\cos\varphi,\ \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Якобиан преобразования

$$J(r,\varphi) = r,\ \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^3 zdz = \frac{9}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 12\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = 24\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi = 24\left.\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} =$$

$$= 24\cdot\frac{2}{3} = 16.$$ ▲

Пример 15

Вычислите $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, если $V: x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1.$

△ Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ $I(r,\varphi) = r,\ \sqrt{x^2 + y^2} = r.$

Область V снизу ограничена поверхностью $z = r$ (поверхностью конуса), сверху – плоскостью $z = 1.$

Проекцией области V на плоскость *xOy* является круг $r \le 1.$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_r^1 dz = 2\pi\int\limits_0^1 r^2(1-r)dr =$$

$$= 2\pi\left.\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$ ▲

Пример 16

Вычислите $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, если $V: x^2 + y^2 + z^2 = z.$

△ Каноническое уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$ имеет вид

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Изобразим сферу (рис. 17) и ее проекцию на плоскость *xOy* (рис. 18).

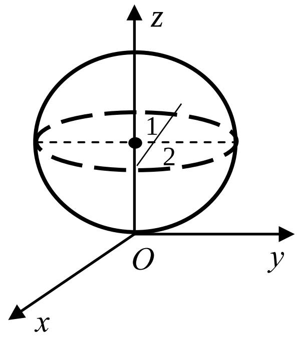

Рис. 17

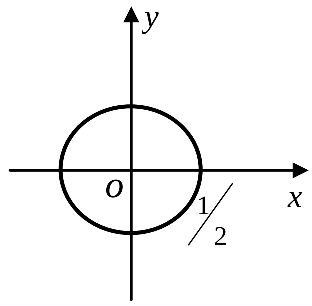

Рис. 18

Перейдем к сферическим координатам:

$x = z\cos\varphi\sin Q,$

$y = r\sin\varphi\sin Q,\ \ z = r\cos Q,\ \ I = r^2\sin Q,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = z\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ r = \cos Q,\quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r.$

В области V сферические координаты изменяются так:

$$0 \le r \le \cos Q,\ 0 \le Q \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

Поэтому

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin Q dQ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\cos Q} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 Q \sin Q dQ =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 Q d\cos Q = -\frac{\pi}{10}\cos^5 Q\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

▲

Дополнительные задачи

1. Вычислите повторные интегралы, изменив порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dy;$

б) $\int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

Ответ: а) $\frac{8}{15}$; б) 2.

2. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy, \;\; D: y = x,\; y = 2x,\; x = 2,\; x = 3;$

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}, \;\; D: \{9 \le x^2 + y^2 \le 25\}.$

Ответ: а) $\frac{76}{3}$; б) $\pi \ln 3$.

3. Вычислите $\iiint\limits_V (x+2y+3z)dxdydz,$ где V – призма, ограниченная плоскостями $y=0,\; z=0,\; z=2,\; x+y=2,$
$2x-y+2=0.$

Ответ: 28.

4. Вычислите $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,$ перейдя к цилиндрическим координатам, если $D = \left\{\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le z \le 2\right\}.$

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

5. Вычислите $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$ перейдя к сферическим координатам, если $D = \{1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8\}.$

Ответ: 63π.

Занятие 13

Приложения кратных интегралов

Пример 1

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1$.

△ Построим фигуру (рис. 19)

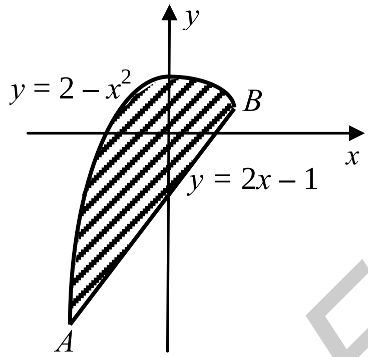

Рис. 19

Решив уравнение $y = 2 - x^2 = 2x - 1$, найдем абсциссы точек A и B: $x_A = -3,\ x_B = 1$.

Находим $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-3}^{1} y\Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-3}^{1} (2 - x^2 - 2x + 1)dx =$

$$= \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (-9 + 9 - 9) = 10\frac{2}{3}.$$

▲

Пример 2

Найдите площадь, ограниченную линией $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

△ Ввиду симметрии площадь всей фигуры $S = 4S_1$, где S_1 – площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Перейдем к обобщенным полярным координатам: $x = 2r\cos\varphi,\ \ y = 3r\sin\varphi,\ \ I = 6r$.

Найдем уравнение линии в обобщенной полярной системе:

$$\left(\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} + \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\right)^2 = \frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} - \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9};$$

$r_1 = 0,\ \ r_2 = \sqrt{\cos 2\varphi}.$

Отсюда следует, что в первой четверти полярные координаты изменяются так: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Таким образом,

$$S = 4\iint\limits_{D_1} dxdy = 4 \cdot 6 \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = 24 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi = 6 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 6. \quad \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите объем тела, ограниченного следующими поверхностями:
$y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

$\triangle$ Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – плоскостью $z = 6 - x$. Изобразим проекцию тела на плоскость *xOy* (рис. 20).

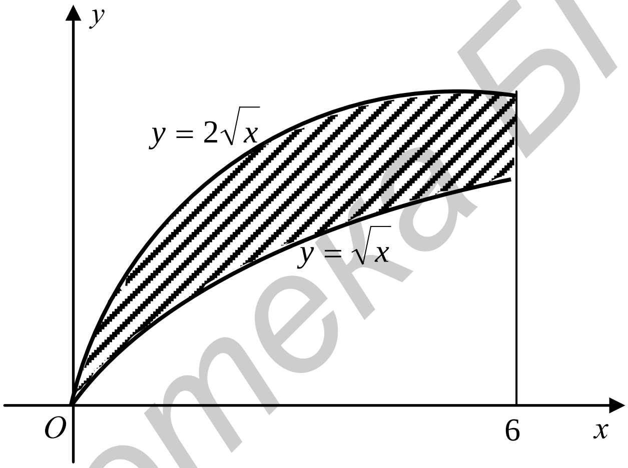

Рис. 20

Следовательно,

$$V = \int\limits_0^6 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x) dy = \int\limits_0^6 (6y - xy)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^6 ((12\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}) -$$

$$-(6\sqrt{x} - x\sqrt{x}))dx = \int\limits_0^6 (6x^{1/2} - x^{3/2})dx = \left(\frac{2}{3} \cdot 6x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^6 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 6^{5/2} - \frac{2}{5} \cdot 6^{5/2} = \frac{4}{15} \cdot 6^{5/2} = \frac{48}{5}\sqrt{6}. \quad \blacktriangle$$

Пример 4

Вычислите площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

$\triangle$ Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\le 1$. Из уравнения конуса имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тогда

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}S=\sqrt{2}\cdot\pi=\sqrt{2}\pi.$$

$\blacktriangle$

Пример 5

Вычислите массу неоднородной пластины D, ограниченной линиями $y=x^2$, $x=y^2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu=3x+2y+6$.

$\triangle$ Построим область, ограниченную кривыми $y=x^2$ и $x=y^2$ (рис. 21).

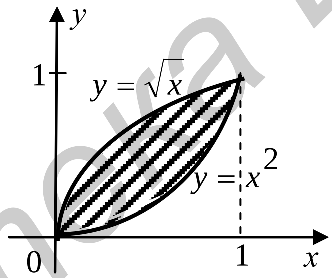

Рис. 21

Из физического смысла двойного интеграла следует, что искомая масса

$$m=\iint_D\mu(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(3x+2y+6)dy=\int_0^1(3xy+y^2+6y)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1(3x^{3/2}+x+6x^{1/2}-3x^3-x^4-6x^2)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{5}3x^{5/2}+\frac{x^2}{2}+6\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-2x^3\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}+4-\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-2=\frac{11}{4}.$$

$\blacktriangle$

Пример 6

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y = 2x^2 - 3$, $y = -7x^2 + 6$, $z = 1 - 5x^2 - 6y^2$, $z = -3 - 5x^2 - 6y^2$.

$\triangle$ Изобразим проекцию тела на плоскость Oxy (рис. 22).

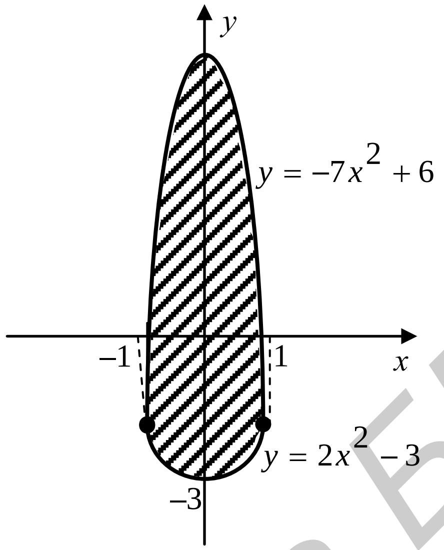

Рис. 22

Ввиду симметрии

$$V = 2\int_0^1 dx \int_{2x^2-3}^{-7x^2+6} dy \int_{-3-5x^2-6y^2}^{1-5x^2-6y^2} dz = 8\int_0^1 dx \int_{2x^2-3}^{-7x^2+6} dy = 8\int_0^1 (-7x^2 + 6 - 2x^2 + 3)dx =$$

$$= 8\int_0^1 (9 - 3x^2)dx = 8(9x - 3x^3)\Big|_0^1 = 48.$$

$\blacktriangle$

Пример 7

Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями

$z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3,\ z = 16x + 19.$

$\triangle$ Снизу тело ограничено параболоидом $z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3$, сверху – плоскостью $z = 16x + 19$.

Найдем проекцию тела на плоскость Oxy:

$8((x+1)^2 + y^2) + 3 = 16x + 19 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Это окружность радиусом 1 с центром в начале координат. Введем цилиндрические координаты: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,\ |I| = r.$

Тогда $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 8r^2 + 16r\cos\varphi + 11 \le z \le 16r\cos\varphi + 19$.

Имеем

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_{8r^2+16r\cos\varphi+11}^{16r\cos\varphi+19}dz\;=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(8r-8r^3)dr=$$

$$=2\pi(4r^2-2r^4)\Big|_0^1=4\pi. \qquad \blacktriangle$$

Пример 8

Вычислите объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и конусом $z^2=x^2+y^2$, внешнего по отношению к конусу.

$\triangle$ По заданным уравнениям поверхностей строим область V (рис. 23).

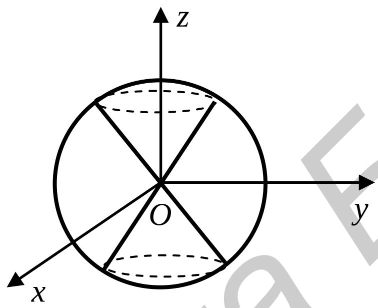

Рис. 23

Тело симметрично относительно плоскости Oxy. Поэтому $V{=}2V_1$, где V_1 – объем верхней половины тела.

Перейдем к сферическим координатам:

$x=r\sin Q\cos\varphi,\;\; y=r\sin Q\sin\varphi,\;\; z=r\cos Q,\;\; |I|=r^2\sin Q$.

В области V_1 сферические координаты изменяются так:

$0\le r\le a,\;\; \dfrac{\pi}{4}\le Q\le\dfrac{\pi}{2},\;\; 0\le\varphi\le 2\pi$.

Следовательно,

$$V=2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin Q\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^2dr=-2\cos Q\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^a=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 9

Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x=6(y^2+z^2),\;\; y^2+z^2=3,\;\; x=0.$

$\triangle$ Строим тело, ограниченное данными поверхностями (рис. 24).

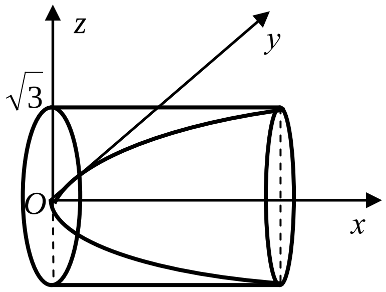

Рис. 24

Его проекция на плоскость Oyz представляет круг, ограниченный окружностью $y^2 + z^2 = 3$ радиусом $\sqrt{3}$. Вычислим вначале массу тела в цилиндрических координатах, считая, что его плотность $\delta = 1$:

$$m = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_0^{6r^2} dx = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 6r^3 dr = 3\pi r^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} = 27\pi.$$

Тогда

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_V xdxdydz = \frac{1}{27\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_0^{6r^2} xdx = \frac{2}{27} \int_0^{\sqrt{3}} 18r^5 dr =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 = 6.$$

Так как тело однородное и симметрично относительно оси Ox, то $y_c = x_c = 0$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найдите площадь области, ограниченной кривыми:

а) $y^2 = 10x + 25, \ \ y^2 = 9 - 6x$;

б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Ответ: а) $\frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{15}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

2. Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = x, \ \ x^2 + y^2 = 2x, \ \ z = x^2 + y^2, \ \ z = 0$;

б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2)$.

Ответ: а) $\frac{45\pi}{32}$; б) $\frac{\pi}{60}$.

3. Найдите координаты центра масс однородного тела

$\frac{1}{4}(y^2 + 2z^2) \le x \le 2$.

Ответ: $x_c = \frac{4}{3}, \ \ y_c = z_c = 0$.

Занятие 14

Контрольная работа. Кратные интегралы

Вариант 1

1. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ к повторному двумя способами, если D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;4)$, $B(2;6)$.

Ответ: $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x;y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/3}^{y/2} f(x;y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{y/3}^{2} f(x;y)dx.$

2. Вычислите $\iint\limits_D xdxdy,$ где D – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$.

Ответ: $-\dfrac{27}{4}.$

3. Вычислите площадь фигуры $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2$ (перейти к полярным координатам).

Ответ: $\dfrac{5\pi}{2}.$

4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 = 1 - y,$ $x + y + z = 3,$ $y \geq 0,$ $z \geq 0.$

Ответ: $\dfrac{52}{15}.$

5. Вычислите $\iiint\limits_V ydxdydz,$ если V – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0,$ $y = 0,$ $z = 0,$ $2x + y + z = 4.$

Ответ: $\dfrac{16}{3}.$

6. Вычислите $\iiint\limits_V ydxdydz,$ $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,$ $y \leq \sqrt{3}x,$ $y \geq 0,$ $z \geq 0$ с помощью сферических координат.

Ответ: $\dfrac{15\pi}{2}.$

7. Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V,$ ограниченную поверхностями $x^2 + z^2 = 4y,$ $y = 9.$

Ответ: (0; 6; 0).

Вариант 2

1. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ к повторному двумя способами, если D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;–1)$, $B(1;4)$.

Ответ: $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{4x} f(x;y)dy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y}^{1} f(x;y)dx + \int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/4}^{1} f(x;y)dx.$

2. Вычислите $\iint\limits_D \dfrac{y}{x^2}dxdy, \quad D = \left\{0 < x,\ x^3 \le y \le x^2\right\}.$

Ответ: $\dfrac{1}{15}$.

3. Вычислите площадь фигуры $(x^2+y^2)^3 = x^2y^2$ (перейти к полярным координатам).

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}$.

4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$, $x + y = 6,\ \ y = 2x,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0$.

Ответ: 4.

5. Вычислите $\iiint\limits_V xdxdydz,$ если V – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x - y + z = 1.$

Ответ: $\dfrac{1}{24}$.

6. Вычислите $\iiint\limits_v \dfrac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ \ y \le x,\ y \ge 0,$ $z \ge 0$ с помощью сферических координат.

Ответ: $\dfrac{13\sqrt{2}\pi}{12}$.

7. Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 2\sqrt{y^2+z^2},\ \ y^2+z^2 = 4,\ \ x = 0.$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};0;0\right)$.

Занятия 15–16

Криволинейные и поверхностные интегралы

Пример 1

Вычислите криволинейный интеграл $I=\int\limits_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

△ Уравнение прямой OA имеет вид $y=2x$ $(0\le x\le 1)$. Находим $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{5}dx.$

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{\frac{5}{5}}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{5}+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{\frac{4}{5}+x^2}\right)\Bigg|_0^1=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}. \quad ▲$$

Пример 2

Вычислите $I=\int\limits_C (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$ между точками $A(–1;0)$ и $B(0;1)$ по дуге астроиды $x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t.$

△ Находим $x'=-3\cos^2 t\sin t,\ y'=3\sin^2 t\cos t,$

$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=3|\sin t\cos t|dt=-3\sin t\cos t dt,$ так как $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$

Следовательно,

$$I=-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t})3\sin t\cos t dt=-12\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 t\sin t dt+$$

$$+9\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin^{5/2}\cos t dt=\frac{12}{3}\cos^3 t\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}+\frac{18}{7}\sin^{7/2} t\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=-\frac{46}{7}.$$

▲

Пример 3

Вычислите $I=\int\limits_C xydl,$ где C – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ лежащая в первом квадранте.

△ Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t\ \ \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Находим $x' = -a\sin t,\ \ y' = b\cos t,\ \ dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$

Следовательно,

$$I = \int_0^{\pi/2} a\cos t b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}\,d(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2(a^2-b^2)}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3) =$$

$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}. \quad ▲$$

Пример 4

Вычислите $I = \int\limits_C (x+z)dl$, где C – дуга кривой $x = t,\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3 \quad (0 \le t \le 1).$

△ Находим $x' = 1,\ \ y' = \dfrac{6t}{\sqrt{2}},\ \ z' = 3t^2,\ \ dl = \sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt.$

Следовательно,

$$I = \int_0^1 (t+t^3)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt = \frac{1}{36}\int_0^1 (1+18t^2+9t^4)^{1/2}\,d(1+18t^2+9t^4) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}(1+18t^2+9t^4)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1). \quad ▲$$

Пример 5

Найдите координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести первого полувитка винтовой линии C, заданного уравнениями $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt, 0 \le t \le \pi,$ если ее линейная плотность постоянная и равна ρ.

△ Масса $m = \int\limits_C \rho dl.$

Так как

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt,$$

то $m = \rho dl.$

Значения x_0, y_0, z_0 находим по формулам

$$x_0 = \frac{\rho}{m}\int_C xdl,\;\; y_0 = \frac{\rho}{m}\int_C ydl,\;\; z_0 = \frac{\rho}{m}\int_C zdl.$$

Таким образом,

$$x_0 = \frac{\rho}{m}\int_0^{\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}dt = 0,$$

$$y_0 = \frac{\rho}{m}\int_0^{\pi} a\sin t\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{2a}{\pi},$$

$$z_0 = \frac{\rho}{m}\int_0^{\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{b\pi}{2}. \quad ▲$$

Пример 6

Вычислите $I = \int\limits_{AB}(4x+y)dx+(x+4y)dy,$ где кривая AB задана уравнением $y = x^4$, $A(1;\,1)$, $B(-1;\,1)$.

△ Учитывая, что $y = x^4$, $dy = 4x^3dx$ и x изменяется от 1 до –1, получаем

$$I = \int_{+1}^{-1}(4x+x^4+(x+4x^4)\cdot 4x^3)dx = \int_{+1}^{-1}(16x^7+5x^4+4x)dx =$$

$$= (2x^8+x^5+2x^2)\Big|_{+1}^{-1} = -2. \quad ▲$$

Пример 7

Вычислите $I = \int\limits_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz,$ где C – кривая $x=t,\ y=t^2,$ $z=t^3,\ 0\le t\le 1,$ «пробегаемая» в направлении возрастания параметра t.

△ Так как $dx = dt,\ dy = 2tdt,\ dz = 3t^2dt,$ то

$$I = \int_0^1 (t^4-t^6+2t^2\cdot t^3\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2)dt = \int_0^1 (t^4-t^6+4t^6-3t^4)dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6-2t^4)dt = \left(\frac{3}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{35}. \quad ▲$$

Пример 8

Найдите работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ лежащую в первом квадранте.

△ Запишем параметрическое уравнение кривой: $x=a\cos t,\ \ y=b\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Точка движется под действием силы $\overline{F}=k(-a\cos t\bar{i}-b\sin t\bar{j}).$ Находим $dx=-a\sin tdt,\ \ dy=b\cos tdt.$

Работа силы $\overline{F}$ по пути AB вычисляется по формуле

$$A=\int\limits_{AB}F_x dx+F_y dy=k\int\limits_0^{\pi/2}(a^2\sin t\cos t+b^2\sin t\cos t)dt=$$

$$=-k\frac{(b^2-a^2)}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2tdt=\frac{k(b^2-a^2)}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{k(a^2-b^2)}{2}.$$ ▲

Пример 9

Применяя формулу Грина, вычислите

$I_1=\oint\limits_C -x^2ydx+xy^2dy,$ где C – окружность $x^2+y^2=R^2$, «пробегаемая» против часовой стрелки.

△ Находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2.$$

Следовательно,

$$I_1=\oint\limits_C -x^2ydx+xy^2dy=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy.$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\quad |I|=r,\ \ x^2+y^2=r^2,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

$$I_1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^R=\frac{\pi R^4}{2}.$$ ▲

Пример 10

Вычислите площадь S фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t,$ $y=b\sin^3 t,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

△ Пользуясь формулой $S=\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx,$ находим

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3ab\cos^4 t\sin^2 t+3ab\sin^4 t\cos^2 t)dt=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 tdt=$$

$$=\frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{16}ab\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3ab\pi}{8}.\quad ▲$$

Пример 11

Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислите интеграл

$$I=\int_{AB}(x^2+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy,$$

где $A(-2;-1)$, $B(3;0)$.

△ Здесь $P=x^2+4xy^3,\ Q=6x^2y^2-5y^4,\ \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2.$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $I=\int_{AB}Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную *AMB* (рис. 25).

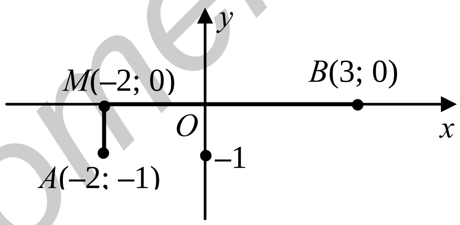

Рис. 25

Вдоль отрезка *AM* и $x=-2, dx=0, -1\le y\le 0,$ поэтому

$$\int_{AM}Pdx+Qdy=\int_{-1}^{0}(24y^2-5y^4)dy=(8y^3-y^5)\Big|_{-1}^{0}=7.$$

Вдоль отрезка *MB* имеем $y=0, dy=0, -2\le x\le 3$. Поэтому

$$\int_{MB}Pdx+Qdy=\int_{-2}^{3}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3}=\frac{35}{3}.$$

Искомый интеграл равен сумме вычисленных интегралов, т. е. $\frac{56}{3}$. ▲

Пример 12

Покажите, что дифференциальное выражение

$$du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции и найдите эту функцию.

△ Так как

$$P(x; y) = x^2 + 2xy - y^2,\ Q(x; y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

то $\dfrac{\partial P}{\partial y} 2x - 2y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$

Значит во всех точках плоскости Oxy данное дифференциальное выражение будет полным дифференциалом. Для нахождения функции $u(x; y)$ воспользуемся формулой

$$u(x; y) = \int_{x_0}^{x} P(x; y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x; y)dy + C,$$

где можно взять $x_0 = y_0 = 0.$

Имеем

$$u(x; y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)dy + C = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^x + (x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3})\Bigg|_{y=0}^{y=y} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$ ▲

Пример 13

Вычислите поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_S (6x + 4y + 3z)dS,$$

где S – часть плоскости $x + 2y + 3z = 6,$ расположенная в первом октанте.

△ Поверхность S однозначно проектируется на плоскость Oxy (рис. 26).

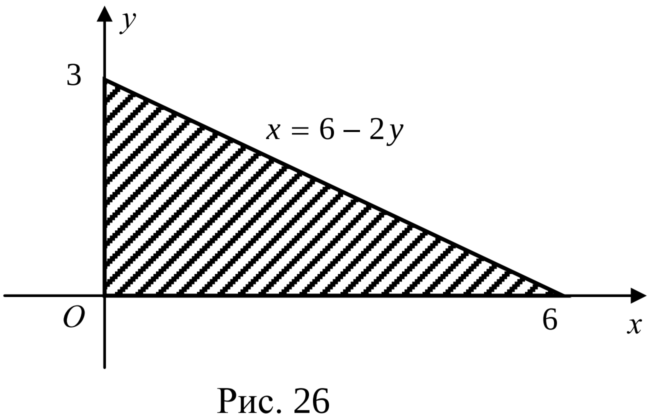

Рис. 26

Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностный интеграл в двойной:

$$z = \frac{1}{3}(6 - 2x - 2y),\ \ dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dxdy,$$

$$I = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{Dxy}(5x + 2y + 6)dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{6-2y}(5x + 2y + 6)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\left(\frac{5}{2}x^2 + 2xy + 6x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=6-2y} = 2\sqrt{14}\int\limits_0^3(y^2 - 10y + 21)dy =$$

$$= 2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y\right)\Bigg|_0^3 = 54\sqrt{14}.$$

▲

Пример 14

Вычислите поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint\limits_S zdS,$$

где S – часть гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 \le 4$.

△ Проекцией поверхности S на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \le 4$.

Находим $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$

Имеем $I = \iint\limits_S zdS = \iint\limits_{Dxy} xy\sqrt{1 + y^2 + x^2}\,dxdy.$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ находим

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2}\,dr = \int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\sin\varphi\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2}\,dr = 0.$$ ▲

Пример 15

Найдите массу поверхности куба $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,$ если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна xyz.

△ Ввиду симметрии масса поверхности куба равна утроенной массе верхней грани куба (масса трех граней куба равна нулю).

Найдем массу верхней грани куба $m_1 = \iint\limits_S \rho(x; y; z)dS.$

Проекция поверхности S на плоскость Oxy представляет собой квадрат $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$ поэтому

$$dS = dxdy \ \text{ и } \ m_1 = \int\limits_{Dxy} xy \cdot 1dxdy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 ydy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $m = 3m_1 = \dfrac{3}{4}$. ▲

Пример 16

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S dxdy,$$

где S – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$.

△ Нормаль к поверхности образует тупой угол с осью Oz. Проекцией данной части конуса на плоскость Oxy является круг $D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$. Сведем поверхностный интеграл к двойному: $I = \iint\limits_S dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} dxdy$.

Так как $\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = S_{\text{круга}} = \pi$, то $I = -\pi$. ▲

Пример 17

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S dxdy + ydxdz - x^2 zdydz,$$

где S – внешняя сторона части эллипсоида $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

△ Расчленяем данный поверхностный интеграл на три слагаемых интеграла

$$I = \iint\limits_S dxdy + \iint\limits_S ydxdz - \iint\limits_S x^2 zdydz.$$

Каждый из полученных интегралов преобразуем в двойной интеграл, учитывая, что нормаль к ориентированной поверхности образует острые углы с осями Ox, Oy, Oz.

Находим

$$I_1 = \iint\limits_S dxdy = \iint\limits_{Dxy} dxdy,$$

где Dxy – четверть области $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1$.

Этот интеграл равен четверти площади эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 2$, т. е. $I_1 = \dfrac{\pi ab}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$I_2 = \iint\limits_S ydxdz = 2\iint\limits_{Dxz} \sqrt{1 - x^2 - z^2}\, dxdz,$$

где Dxy – четверть круга $x^2 + z^2 \le 1$.

Переходя к полярным координатам, получим

$$I_2 = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r(1-r^2)^{1/2} dr = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 (1-r^2)^{1/r} d(1-r^2) = -\frac{\pi}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$I_3 = \int\limits_0^1 zdz \int\limits_0^{2\sqrt{1-z^2}} \left(1 - \frac{y^2}{4} - z^2\right) dy = \int\limits_0^1 z\left(y - \frac{y^3}{12} - z^2 y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{1-z^2}} dz =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{3/2} dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1-z^2)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

Следовательно, $I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{4}{15} = \frac{5}{6}\pi - \frac{4}{15}$. ▲

Пример 18

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

△ Рассмотрим интеграл $I_1 = \iint\limits_S zdxdy$. Его можно представить в виде суммы интегралов по верхней и нижней сторонам сферы, которые обозначим соответственно S_+ и S_-: $I_1 = \iint\limits_{S_+} zdxdy + \iint\limits_{S_-} zdxdy$.

На поверхности S_+

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

а на поверхности S_-

$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Но нормаль к поверхности S_+ образует острый угол с осью Oz, а нормаль к поверхности S_- образует тупой угол с осью Oz. С учетом того, что проекции S_+ и S_- на плоскость Oxy совпадают, имеем

$$I_1 = 2\iint\limits_{Dxy}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}dr = -\frac{4}{3}\pi(a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Из очевидных равенств $\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S ydzdx = I_1$ окончательно находим $I = 4\pi a^3$. ▲

Пример 19

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydxdz - 3zdxdy,$$

где S – часть внешней поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{Dxy} (\overline{a}, \overline{n})\Big|_{z = f(x;\, y)} dxdy.$$

В нашем случае $\overline{a} = (x; y; -3z)$, $\overline{n} = \pm(-z'_x; -z'_y; 1) = \pm(-2x; -2y; 1)$.

Так как внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz, $\overline{n} = (2x; 2y; 1)$. Находим $(\overline{a}; \overline{n}) = 2x^2 + 2y^2 + 3z$. Таким образом,

$$I = \iint\limits_{Dxy} (2x^2 + 2y^2 + 3z)\Big|_{z = x^2 + y^2} dxdy = 5\iint\limits_{Dxy} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \le 4$. Переходя к полярной системе координат, получим

$$I = 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr = 40\pi. \quad \blacktriangle$$

Пример 20

Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислите

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x = y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$\triangle$ Используя формулу Гаусса – Остроградского, получаем

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_V dV = 3V = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 21

Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислите

$$I = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\triangle$ Используя формулу Гаусса – Остроградского, находим

$$I = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin Q \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^4 dr = \frac{12}{5}\pi a^5. \quad \blacktriangle$$

Пример 22

Применяя формулу Стокса, вычислите

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

$\triangle$ По формуле Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

имеем

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS.$$

В качестве поверхности S можно взять круг радиусом a с центром в начале координат, лежащий в плоскости $z = -x - y$.

Найдем направляющие косинусы нормали к плоскости $z = -x - y$:

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \ \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \ \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

Так как нормаль к плоскости образует с осями острые углы, получаем

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$I = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3} \cdot S,$$

где $S = \pi a^2$.

Окончательно получим $I = -\sqrt{3}\pi a^2$.

Самостоятельная работа к занятиям 15–16

Вариант 1

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C (x-y)dl,$ где C – окружность $x^2+y^2=2x$ $(x=1+\cos t, \quad y=\sin t).$

Ответ: $2\pi.$

2. Вычислите $\int\limits_{OA} xydx - y^2dy,$ $O(0;0),$ $A(2;2),$ $y^2=2x.$

Ответ: $\dfrac{8}{15}.$

3. Вычислите $\iint\limits_S (2x+15y+z)dS,$ где S – часть плоскости $x+2y+2z=2,$ отсеченная координатными плоскостями.

Ответ: 10.

4. Вычислите $\iint\limits_S xdydz,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1.$

Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi.$

5. Вычислите с помощью формулы Гаусса – Остроградского $\iint\limits_S 3xdydz+(y+z)dxdz+(x-z)dxdy,$ где S – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью $x+3y+z=3$ и координатными плоскостями.

Ответ: $\dfrac{9}{2}.$

Вариант 2

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C (x^2 + y^2)dl,$ где C – окружность $x^2 + y^2 = 4x$ $(x = 2 + 2\cos t, \quad y = 2\sin t)$.

Ответ: 32π.

2. Вычислите $\int\limits_{OA} y(x - y) + xdy,$ $O(0;\, 0),$ $A(1;\, 2),$ $y^2 = 4x.$

Ответ: $-\dfrac{8}{15}$.

3. Вычислите $\iint\limits_S (4x - 4y - z)dS,$ где S – часть плоскости $x = 2y + 2z = 4,$ отсеченная координатными плоскостями.

Ответ: 44.

4. Вычислите $\iint\limits_S x^2 dydz,$ где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$ $x \le 0,$ $y \ge 0.$

Ответ: $-\dfrac{\pi R^4}{4}$.

5. Вычислите с помощью формулы Гаусса – Остроградского $\iint\limits_S (x + z)dydz + (z - x)dxdz + (x + 2y + z)dxdy,$ где S – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью $x + 3y + z = 2$ и координатными плоскостями.

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

Дополнительные задачи

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода по кривой C: $\int\limits_C (2x+y)dl,$ где C – ломаная $ABOA$, $A(1;\,0)$, $B(0;\,2)$, $O(0;\,0)$.

Ответ: $3+2\sqrt{5}.$

2. Вычислите $\int\limits_C (x+y)dl,$ где C – четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ y=x,$ расположенная в первом октанте.

Указание. $C: x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ z=a\sin t\quad (0\le t\le \dfrac{\pi}{2}).$

Ответ: $a^2\sqrt{2}.$

3. Вычислите $\int\limits_{AB} xydx-y^2dy,$ где AB – дуга параболы $y^2=2x,$ $A(0;\,0)$, $B(2;\,2)$.

Ответ: $\dfrac{8}{15}.$

4. Вычислите $\int\limits_C ydx+zdy+xdz$ в направлении возрастания параметра, где C – виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

Ответ: $-\pi a^2.$

5. Вычислите $\iint\limits_S z^2dS,$ где S – полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2.$

Ответ: $8\pi(2+\sqrt{2}).$

6. Вычислите $\iint\limits_S (2z-x)dydz+(x+2z)dzdx+3zdxdy,$ где S – верхняя сторона плоскости треугольника $x+4y+z,\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Ответ: $\dfrac{128}{3}.$

7. Вычислите $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdy+z^3dxdy,$ где S – внешняя сторона боковой поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1.$

Указание. Замкнуть поверхность плоскостью $z = 1$ и применить формулу Гаусса – Остроградского.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{10}.$

8. Применив формулу Стокса, вычислите

$\int\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$ где L – кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2,$ ориентирована положительно относительно вектора (1; 0; 0).

Ответ: -12π.

Занятия 17–18

Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Потенциальные поля

Пример 1

Найдите поток вектора $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму круга радиусом R, в положительном направлении оси Oz.

△ Согласно определению потока вектора через поверхность S, будем иметь $\Pi = \iint\limits_S (\overline{a}, \overline{n_0})dS$.

В нашем случае $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{n_0} = \overline{k}$, так что $(\overline{a}, \overline{n_0}) = 3$. Учитывая, что площадь круга равна πR^2, получим $\Pi = \iint\limits_S 3dS = 3\iint\limits_S dS = 3\pi R^2$. ▲

Пример 2

Найдите поток векторного поля $\overline{a} = \overline{r}$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор через прямой круговой цилиндр с высотой h, радиусом основания R и осью Oz $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}z\overline{k}$.

△ Поверхность S состоит из боковой поверхности S_1, верхнего основания S_2 и нижнего основания S_3 цилиндра. Искомый поток Π в силу свойств аддитивности равен $\Pi = \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3$, где Π_1, Π_2, Π_3 – потоки данного поля через S_1, S_2, S_3 соответственно.

На боковой поверхности S_1 $(\overline{a}, \overline{n_0}) = (\overline{r}, \overline{n_0}) = n\rho_{\overline{n}}\overline{r} = R$ (рис. 27).

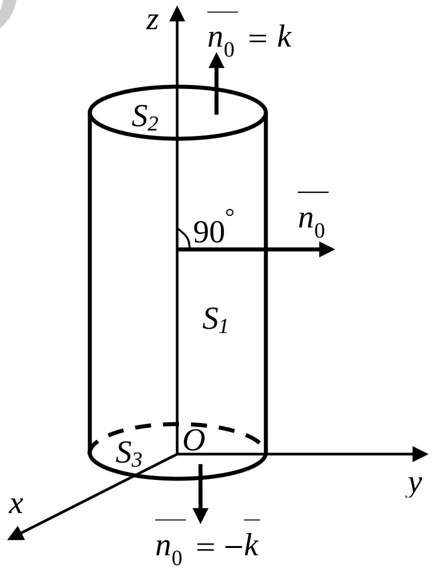

Рис. 27

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (\overline{a}, \overline{n_0}) dS = R \iint\limits_{S_1} dS = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h.$$

На верхнем основании $(\overline{a}, \overline{n_0}) = (\overline{r}, \overline{k}) = n\rho_{02}\overline{r} = h,$ и значит,

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S2} (\overline{a}, \overline{n_0}) dS = h \iint\limits_{S_2} dS = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании S_3 вектор $\overline{r}$ перпендикулярен вектору $\overline{n_0} = -\overline{k}$. Поэтому $(\overline{a}, \overline{n_0}) = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

Искомый поток равен $\Pi = \iint\limits_{S} (\overline{a}, \overline{n_0}) dS = 3\pi R^2 h.$ ▲

Пример 3

Вычислите поток вектора $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$ через внешнюю поверхность гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 3h^2$, ограниченную плоскостями $z = 0, z = h$ (рис. 28). Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в кольцо Dxy (рис. 29).

△

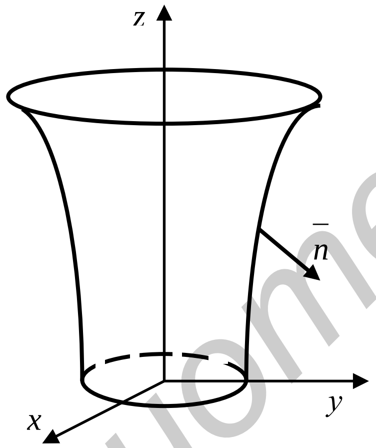

Рис. 28

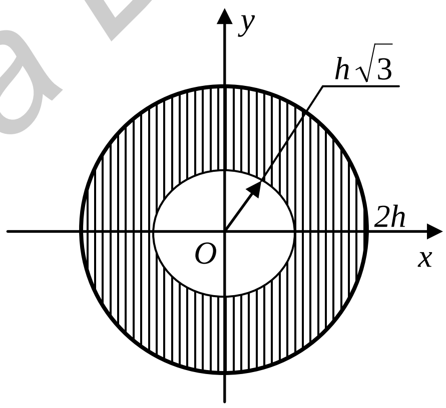

Рис. 29

Находим орт нормали $\overline{n_0}$ к поверхности S:

$$\overline{n_0} = \pm \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - z^2)}{\left|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - z^2)\right|} = \pm \frac{x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

По условию задачи нормаль $\overline{n_0}$ образует тупой угол с осью Oz, поэтому перед дробью надо взять знак плюс. Таким образом,

$$\overline{n_0} = \frac{x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отсюда $\cos\gamma = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} < 0$ и, значит,

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dxdy.$$

Находим скалярное произведение $(\overline{a},\overline{n_0}) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

$$\varPi = \iint_S (\overline{a},\overline{n}_0)dS = \iint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{z}dxdy = \iint_{Dxy} \left.\frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right|_{z=\sqrt{x^2+y^2-3h^2}} dxdy =$$

$$= \iint_{Dxy} \frac{(2x^2+2y^2-3h^2)}{\sqrt{x^2+y^2-3h^2}}dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int r\sqrt{r^2-3h^2}dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3dr}{\sqrt{r^2-3h^2}};$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} r\sqrt{r^2-3h^2}dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_{h\sqrt{3}}^{2h}(r^2-3h^2)^{1/2}d(r^2-3h^2) =$$

$$= \pi\cdot\frac{2}{3}(r^2-3h^2)^{3/2}\Big|_{h\sqrt{3}}^{2h} = \frac{2}{3}\pi h^3;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3dr}{\sqrt{r^2-3h^2}} = \begin{vmatrix} r^2-3h^2 = z^2 \\ rdr = zdz \\ r^2 = z^2+3h^2 \end{vmatrix} = 2\pi\int_0^h (z^2+3h^2)dz =$$

$$= 2\pi\int_0^h (z^2+3h^2)dz = 2\pi\left(\frac{z^3}{3}+3h^2z\right)\Big|_0^h = 2\pi\left(\frac{h^3}{3}+3h^3\right) = \frac{20}{3}\pi h^3;$$

$$\varPi = \frac{2}{3}\pi h^3 + \frac{20}{3}\pi h^3 = \frac{22}{3}\pi h^3. \quad \blacktriangle$$

Пример 4

Даны векторное поле $\overline{a} = (y-x+z)\overline{j}$ и плоскость $p: 2x-y+2z-2=0$, которая ограничена координатными плоскостями. Требуется вычислить поток векторного поля $\overline{a}$ через часть плоскости *P* в том направлении нормали к плоскости *P*, которая образует с осью *Oz* острый угол.

$\vartriangle$ Если поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то поток вектора $\overline{a} = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ через поверхность *S* можно записать так:

$$\Pi = \pm\iint_{Dyz} P(x(y;z),y;z)dydz \pm \iint_{Dxz} Q(x;y(x;z);z)dxdz \pm \iint_{Dxy} R(x;y;z(x;y))dxdy,$$

причем знак в каждой из формул выбирается таким, какой знак $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на поверхности *S*. В качестве нормального вектора плоскости *P* можно взять вектор $\bar{n} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ $(\cos\gamma > 0)$, откуда получим $\cos\gamma > 0, \cos\beta < 0$. Так как в нашем случае $P(x;y;z) = R(x;y;z) = 0$, будем иметь

$$\Pi = -\iint\limits_{Dxz} (y - x + z)\Big|_{y = 2x + 2z - 2} dxdz = -\iint\limits_{Dxz} (x + 3z - 2)dxdz,$$

где *Dxz* – проекция части плоскости *P* на плоскость *xOz* (рис. 30).

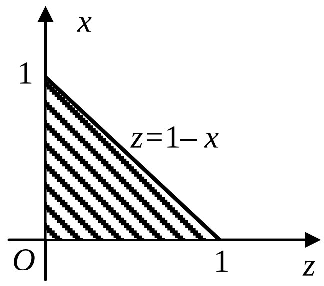

Рис. 30

$$\Pi = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + 3z - 2)dz = -\int_0^1 \left(xz + \frac{3}{2}z^2 - 2z\right)\Big|_{z=0}^{z=1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2xz + 3z^2 - 4z)\Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (2x - 2x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 4 + 4x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 1)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$ ▲

Пример 5

Пользуясь инвариантным определением вычислите дивергенцию вектора $\bar{a} = z\bar{k}$ в произвольной точке *M*, выбрав в качестве поверхностей *S*, окружающих точку *M*, поверхности куба с гранями, параллельными координатным плоскостям, и стороной куба, равной ε (рис. 31).

△

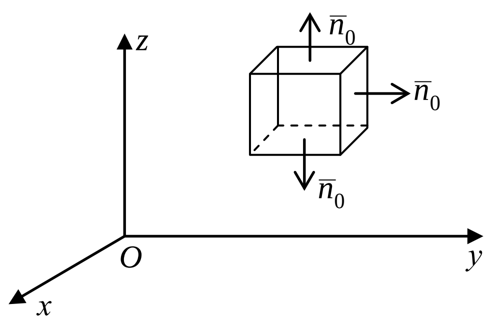

Рис. 31

По определению дивергенции в нашей точке имеем

$$\operatorname{div}\overline{a}(M) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\iint\limits_S(\overline{a},\overline{n}_0)dS}{V},$$

где V – объем куба.

Поверхность S состоит из боковой поверхности S_1, нижнего основания S_2 и верхнего основания S_3.

Пусть для определенности уравнение нижней грани – $z = h$. Тогда уравнение верхней грани – $z = h+\varepsilon$. Поток вектора $П_1$ через боковую поверхность S_1 равен нулю, так как $\overline{a}$ перпендикулярен $\overline{n}_0$.

$$П_2 = \iint\limits_{S_2}\left(\overline{a},\overline{n}_0\right)dS = \iint\limits_{S_2} -hdS = -h\varepsilon^2.$$

$$П_3 = \iint\limits_{S_3}\left(\overline{a},\overline{n}_0\right)dS = \iint\limits_{S_3}\left(h+\varepsilon\right)dS = h\varepsilon^2+\varepsilon^3.$$

$$П = П_1 + П_2 + П_3 = \varepsilon^3.$$

Следовательно, $\operatorname{div}\overline{a}(M) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{П}{V} = 1.$ ▲

Пример 6

Найдите дивергенцию векторного поля $\overline{a} = xy^2\overline{i} + x^2y\overline{j} + z^3\overline{k}$ в точке A(1;–1;3). Будет ли данная точка источником или стоком поля?

△ $\operatorname{div}\overline{a} = \dfrac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(z^3\right)}{\partial z} = x^2+y^2+3z^2$; $\operatorname{div}\overline{a}\left(A\right) = 29 > 0$.

Следовательно, точка A является источником векторного поля. ▲

Пример 7

Применяя формулу Гаусса – Остроградского, вычислите поток векторного поля $\overline{a} = (x-y)\overline{i} + (z-y)\,\overline{j} + (2z-x)\overline{k}$ через сферу $z^2+6x+y^2+z^2 = 0$.

△ Запишем уравнение сферы в виде $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Радиус сферы

$\operatorname{div}\overline{a}\left(M\right) = \dfrac{\partial\left(x-y\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(x-y\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(2z-x\right)}{\partial z} = 1-1+2 = 2$, равен 3.

Находим

$$П = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{a}\left(M\right)dV = 2\iiint\limits_V dV = 2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 72\pi.$$ ▲

Пример 8

Вычислите поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2k$ через боковую поверхность S_1 конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$ в сторону внешней нормали.

$\triangle$ Дополним заданную поверхность S_1 до замкнутой кусочно-гладкой поверхности S основанием конуса – кругом S_2: $x^2 + y^2 \le h^2, \quad z = h.$

Применим теперь формулу Гаусса – Остроградского к области V, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$\iint\limits_{S_1}(\bar{a}, \bar{n}_0)dS + \iint\limits_{S_2}(\bar{a}, \bar{n}_0)dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}dxdydz = 2\iiint\limits_V(x + y + z)dxdydz.$$

На круге S_2 имеем $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + h^2k, \ \bar{n}_0 = k,$ поэтому

$$\iint\limits_{S_2}(\bar{a}, \bar{n}_0) = \iint\limits_{S_2}h^2dS = \pi h^4.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r\cos\varphi, \ y = 2\sin\varphi, \ z = z.$ Уравнение конической поверхности примет вид $z = r.$

Таким образом,

$$2\iiint\limits_V(x + y + z)dxdydz = 2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h rdr\int\limits_r^h(r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z)dz =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h rdr\int\limits_r^h zdz = 2\pi\int\limits_0^h r(h^2 - r^2)dr = 2\pi\left(\frac{r^2h^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = \frac{\pi}{2}h^4.$$

Искомый интеграл по боковой поверхности равен

$$\iint\limits_{S_1}(\bar{a}, \bar{n}_0) = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

$\blacktriangle$

Пример 9

Вычислите линейный интеграл в векторном поле $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ в направлении от точки $A(0;0;0)$ до точки $B(1;1;1)$ вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

$\triangle$ Линейный интеграл имеет вид $\int\limits_{AB}(\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{AB}x^2dx + y^2dy + z^2dz.$

Запишем параметрическое уравнение прямой AB:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \ \ t \in [0;1]. \\ z = t, \end{cases}$$

Отсюда $dx = dy = dz = dt.$

Искомый линейный интеграл будет равен

$$\int_0^1 (t^2+t^2+t^2)dt = \frac{3}{3}t^3\Big|_0^1 = 1. \quad \blacktriangle$$

Пример 10

Вычислите циркуляцию вектора $\bar{a} = z^2\bar{i} + x\bar{j} + yk$ по контуру

$$L: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=y. \end{cases}$$

$\triangle$ Параметрическое уравнение линии L: $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi, \\ z=y=\sin t, \end{cases}$

так что $dx=-\sin t dt,\ dy=\cos t dt,\ dz=\cos t dt.$

$$Ц = \int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t + \sin t\cos t)dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi. \quad \blacktriangle$$

Пример 11

Для векторного поля $\bar{a} = z^3\bar{i} + y^3\bar{j} + x^3\bar{k}$ найдите вектор, направленный так, что для перпендикулярной к нему плоскости плотность циркуляции в точке $P(1; 2; 2)$ будет наибольшей. Найдите величину этой плотности циркуляции.

$\triangle$ Указанным условиям удовлетворяют векторы $rot\bar{a}(p)$ и $|rot\bar{a}(p)|$ соответственно:

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & x^3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & x^3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z^3 & y^3 \end{vmatrix}\bar{k} = 3(z^2-x^2)\bar{j};$$

$$rot\bar{a}(p) = 9\bar{j}; \quad |rot\bar{a}(p) = 9|. \quad \blacktriangle$$

Пример 12

Вычислите циркуляцию вектора $\bar{a} = xz\bar{i} + xy^2\bar{j} + yz^2\bar{k}$ по контуру

$L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=z^2 \quad (z>0) \end{cases}$ непосредственно и по теореме Стокса.

△ Для параметрического задания контура необходимо найти радиус окружности, являющейся пересечением конуса и сферы (рис. 32). Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases} \quad 2z^2=9, \quad z=\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad R=z=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

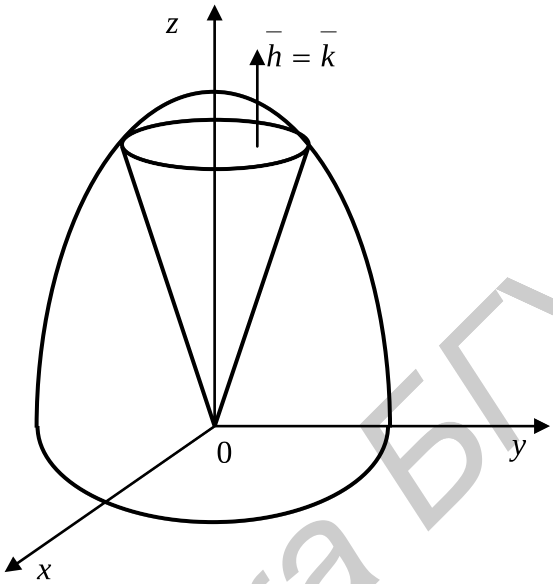

Рис. 32

Параметрическое уравнение контура $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi. \\ z=\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases}$

Отсюда

$$dx=-\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t, \quad dy=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t dt, \quad dz=0.$$

$$Ц=\int_L(\bar{a},d\bar{r})=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{27}{2\sqrt{2}}\sin t\cos t+\frac{81}{4}\cos^2 t\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{81}{16}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{81}{32}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{81}{32}\int_0^{2\pi}dt=\frac{81}{16}\pi.$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy^2 & z^2y \end{vmatrix}=z^2\bar{i}+x\bar{j}+y^2\bar{k}.$$

Натянем на контур L часть плоскости $z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\bar{n}_0=\bar{k}$.

$$Ц=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n}_0)dS=\iint\limits_S y^2dS=\left|dS=dxdy\right|=\iint\limits_{Dxy}y^2dxdy=\begin{vmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3/\sqrt{2}}r(r^2\sin^2\varphi)dr=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_0^{3/\sqrt{2}}r^3dr=\pi\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{81}{16}\pi.$$ ▲

Пример 13

Вычислите циркуляцию векторного поля $\bar{a}=y\bar{i}-x\bar{j}+(z-y)\bar{k}$ по контуру $L=\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ z=x\sqrt{3}, \end{cases}$ непосредственно и по теореме Стокса.

△ Найдем проекцию L на плоскость xOy (рис. 33).

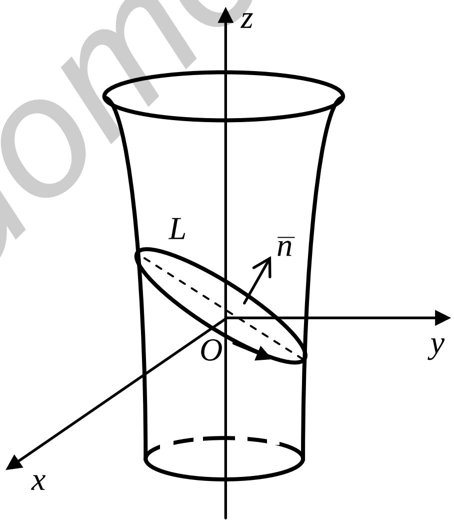

Рис. 33

$$x^2+y^2-\frac{3x^2}{4}=1,\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Проекцией контура на плоскость xOy является эллипс с полуосями a = 2 и $в$ = 1. Площадь этого эллипса равна 2π.

Запишем параметрическое уравнение контура:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,. \\ z = 2\sqrt{3}\cos\varphi, \end{cases}$$

Отсюда

$$dx = -2\sin\varphi d\varphi,\;\; dy = \cos\varphi d\varphi,\;\; dz = -2\sqrt{3}\sin\varphi d\varphi.$$

$$Ц = \int\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_0^{2\pi} (-2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi - 12\sin\varphi\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-2\frac{1-\cos^2\varphi}{2} - 2\frac{1+\cos^2\varphi}{2} + 2\sqrt{3}\frac{1-\cos^2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-1-1+\sqrt{3})d\varphi = (\sqrt{3}-2)\cdot 2\pi.$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z-y \end{vmatrix} = -\bar{i} + 0\,\bar{j} - 2\bar{k}.$$

На контур L натянем часть плоскости $z = x\sqrt{3}$:

$$\bar{n}_0 = \pm\frac{\operatorname{grad}\left(z - x\sqrt{3}\right)}{\left|\operatorname{grad}\left(z - x\sqrt{3}\right)\right|} = \pm\frac{-\sqrt{3}i + k}{2}, \qquad \bar{n}_0 = \frac{-\sqrt{3}i + k}{2}.$$

$$Ц = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}_0)dS = \iint\limits_S \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)dS = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\iint\limits_{Dxy} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= (\sqrt{3}-2)\iint\limits_{Dxy} dxdy = (\sqrt{3}-2)\cdot 2\pi.$$

▲

Пример 14

Докажите, что векторное поле $\bar{a} = (2xy + z)\bar{i} + (x^2 - 2y)\,\bar{j} + x\bar{k}$ является потенциальным, и найдите его потенциал.

Вычислите $\displaystyle\int\limits_{(1;1;1)}^{(1;2;4)} (2xy + z)dx + (x^2 - 2y)dy + xdz.$

△ Находим $\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2-2y & x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-2y & x \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2xy+z & x^2-2y \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$= 0\bar{i} - (1-1)\,\bar{j} + (2x-2x)\bar{k} \equiv 0,$ т. е. поле является потенциальным.

$$U(x;y;z) = \int_{x_o}^{x} P(x;y_0;z_0)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x;y;z_0)dy + \int_{z_o}^{z} R(x;y;z)dz + C.$$

За начальную фиксированную точку примем $O(0;0;0)$. Тогда получим

$$U(x;y;z) = \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2-2y)dy + \int_0^z xdz + C = x^2y - y^2 + xz + C.$$

$$\int_{(1;1;1)}^{(1;2;4)} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz = U(1;2;4) - U(1;1;1) =$$

$= (2+C) - (1+C) = 1.$ ▲

Дополнительные задачи

1. Найдите поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $y = x^2 + y^2$, ограниченную плоскостью $y = 1$ и лежащую в *I* октанте.

Ответ: $-\frac{1}{15}$.

2. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислите поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} - x\bar{j} + y\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

3. Вычислите поток векторного поля $\bar{a} = x^2z\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$ в сторону внешней нормали.

Указание. Дополнить заданную поверхность плоскостью $z = 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислите работу силового поля $\bar{F} = (x^2 + 2xy)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (0;0) до точки (1;1).

Ответ: $\frac{5}{3}$.

5. Найдите ротор вектора $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$.

Ответ: $-2(z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k})$.

6. Найдите циркуляцию вектора $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$ по контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = x \end{cases}$$

непосредственно и по теореме Стокса.

Ответ: $-\sqrt{2}\pi$.

7. Докажите, что векторное поле

$$\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2xz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$$

является потенциальным. Найдите его потенциал.

Ответ: $\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$.

Литература

1. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Высш. шк., 1983.

2. Карпук, А. А. Высшая математика. Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2008.

3. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея. – М. : Высш. шк., 1989.

4. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая. – М. : Высш. шк., 1988.

Св. план 2015, поз. 36

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович и др.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*

Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Д. Степусь*

Подписано в печать 24.06.2015. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,93. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ 467.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6