КОЛИЧЕСТВО ЦЕЛЫХ ТОЧЕК ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Шишко М.А.

Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Ламчановская М.В. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В начале XX века Герман Минковский построил новую математическую теорию, которую назвал геометрией чисел. В этой теории задачи теории чисел получили геометрическую интерпретацию и далее решались с помощью алгебраических, аналитических и вероятностных методов. В данной работе классическая задача о распределении дискриминантов произвольной степени решается геометрическими методами. Основное внимание уделено распределению дискриминантов второй степени. Результатов исследования могут быть использованы в таких направлениях теории информации как векторное квантование и цифровая обработка сигналов (помехоустойчивое декодирование кодов и эффективное кодирование).

В последние годы задача о распределении полиномов с заданными дискриминантами и результантами активно изучаются в теории диофантовых приближений [1, 2, 3, 4].

Дискриминантом многочлена $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ называется произведение $D(P) = a_2^2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = a_1^2 - 4a_0a_2$, где α_1, α_2 – корни многочлена.

Пусть Q – достаточно большое натуральное число. Далее будем рассматривать многочлены второй степени, коэффициенты которого целые числа, удовлетворяющие условию $\left|a_j\right| \le Q, 0 \le j \le 2.$ Для дискриминанта таких многочленов справедлива оценка: $\left|D(P)\right| \le 5Q^2$. Возьмём число $0 \le \upsilon \le \frac{1}{2}$. Рассмотрим многочлены $P_2(x)$ такие, что $\left|D(P)\right| \le Q^{2-2\upsilon}$. Множество таких многочленов обозначим P_υ.

Теорема. Количество многочленов $\#\left\{P_\upsilon\right\} \le cQ^{3-2\upsilon}$, где c – величина не зависящая от Q.

Доказательство: Имеем $\left|a_1^2 - 4a_0a_2\right| \le Q^{2-2\upsilon}$. Дадим геометрическую интерпретацию этого неравенства. Зафиксируем υ. Тогда мы рассматриваем множество точек пространства с целыми координатами $\left(a_0, a_1, a_2\right)$, удовлетворяющие этому неравенству. Сначала рассмотрим точки с действительными координатами, которые удовлетворяют неравенству $\left|y^2 - 4xz\right| \le Q^{2-2\upsilon}$. Определим, какие поверхности в пространстве задаёт уравнение $\left|y^2 - 4xz\right| = Q^{2-2\upsilon}$. Первая поверхность $y^2 - 4xz - Q^{2-2\upsilon} = 0$ – однополостный гиперболоид, вторая $y^2 - 4xz + Q^{2-2\upsilon} = 0$ – двуполостный гиперболоид.

Возьмём на плоскости xOz точку с координатами $\left(x, z\right)$. Проведём через эту точку прямую перпендикулярную плоскости xOz. Обозначим через A и B точки пересечения с однополостным и двуполостным гиперболоидами соответственно (рисунок 1).

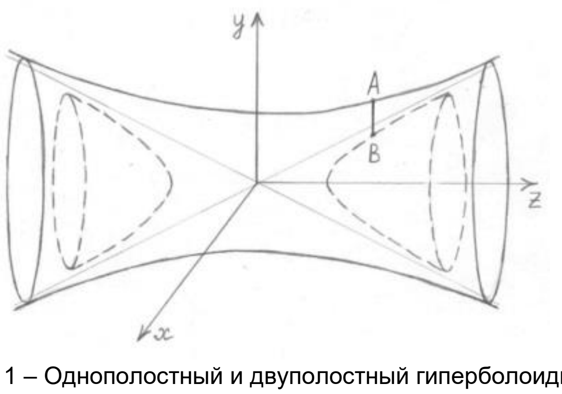

Рисунок 1 – Однополостный и двуполостный гиперболоиды

Неравенству $\left|y^2 - 4xz\right| \le Q^{2-2\upsilon}$ удовлетворяют точки, для которых y изменяется от $\sqrt{xz + Q^{2-2\upsilon}}$ (точка A) до $\sqrt{xz - Q^{2-2\upsilon}}$ (точка B). Найдём длину отрезка AB.

$$\left|AB\right| = \sqrt{xz + Q^{2-2\upsilon}} - \sqrt{xz - Q^{2-2\upsilon}} = \frac{2Q^{2-2\upsilon}}{\sqrt{xz + Q^{2-2\upsilon}} + \sqrt{xz - Q^{2-2\upsilon}}}.$$

Порядок величины в знаменателе дроби при больших x, z равен Q. Поэтому длина отрезка AB имеет порядок $Q^{1-2\upsilon}$. Количество целочисленных пар $\#\left(x, z\right) \copyright Q^2$. Поэтому количество целых точек, расположенных между поверхностями имеет порядок $Q^{1-2\upsilon} \cdot Q^2 = Q^{3-2\upsilon}$. Очевидно, что количество этих точек совпадает с количеством многочленов, принадлежащих множеству P_{υ}. Теорема доказана.

Результаты данного исследования находят применение в современной цифровой обработке сигналов и изображений. Формирование областей точек n-мерного пространства позволяет решать задачи эффективного декодирования помехоустойчивых кодов, а также решать задачи, связанные с эффективным описанием и представлением (сжатием) 2D сигналов (изображений).

Список использованных источников:

1. Volkmann, B. The real cubic case of Mahler’s conjecture / B. Volkmann // Mathematika. – 1961. – Vol. 8 № 1. – P. 55–57.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants //Advances in Mathematics. – 2016. – Vol. 298. – P. 393-412.

3. Davenport, H. A note on binary cubic forms / H. Davenport // Mathematika. – 1961. – Vol. 8 № 1. – P. 58–62.

4. Koleda, D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers / D Koleda // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. – 2017. – Vol. 29 № 1. – P. 179–200.