УДК 519.8

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПАРЕТО

Ершов О.В., студент гр.153501, Скворцов А.В., студент гр.153501

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лущакова И. Н. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. В работе излагаются идеи оптимизации по Парето, линейной свёртки, метода идеальной точки и метода контрольных показателей. Приведены алгоритмы определения принадлежности к множеству границы Парето и определения лучшего варианта по методу идеальной точки. В качестве примера рассмотрена многокритериальная задача выбора игроков в футбольный клуб.

Ключевые слова. Оптимизация по Парето, метод идеальной точки, метод контрольных показателей.

Многокритериальная оптимизация — это раздел математического программирования, а также метод решения задач, которые состоят в поиске наилучшего (оптимального) решения, удовлетворяющего нескольким несводимым друг к другу критериям [1,2,3]. Существует 3 основных типа задач многокритериальной оптимизации. Рассмотрим их на примере задачи с двумя критериями f_1 и f_2.

1) В задаче критерий f_1 приоритетнее, чем критерий f_2, или критерий f_2 приоритетнее, чем f_1.
2) Задача сводится к минимизации функции вида $\alpha * f_1 + \beta * f_2$, где $\alpha + \beta = 1$. Данный метод носит название линейной свёртки.
3) Критерии f_1 и f_2 равнозначны в условиях рассматриваемой задачи.

При равнозначности критериев f_1 и f_2 задача решается оптимизацией по Парето, а также используются метод идеальной точки и метод контрольных показателей. Решению этой задачи мы уделим наибольшее внимание, как самой трудной среди указанных трёх типов задач. Сначала рассмотрим алгоритм оптимизации по Парето на примере двухкритериальной задачи, а потом приведём пример задачи оптимизации для семи критериев на основе нашей первой задачи.

Задача 1: необходимо выбрать лучших нападающих в футбольный клуб по критериям максимальной личной результативности (количество забитых голов) и командной сыгранности (выполненные голевые передачи).

Интерпретируем задачу в математическую запись: из множества игроков $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ выбрать лучших игроков по критериям:

1) Наибольшего количества забитых голов: $W_1 = f_1(x_k) \to max$
2) Выполненных голевых передач: $W_2 = f_2(x_k) \to max$

Решением задачи является оптимальное по Парето множество игроков $\{x_1, x_3, x_4, x_6, x_8\}$, доставляющее максимум критериям W_1 и W_2.

Таблица 1 – Футболисты и их показатели для задачи с двумя критериями

№ футболиста	Фамилия	Голы	Передачи
1	Зинченко	12 шт.	12 шт.
2	Яшин	10 шт.	2 шт.
3	Соловьев	6 шт.	13 шт.
4	Попов	14 шт.	0 шт.
5	Косьмин	0 шт.	12 шт.
6	Уткин	13 шт.	10 шт.
7	Дзюба	12 шт.	6 шт.
8	Брежнев	2 шт.	15 шт.
9	Медведев	2 шт.	5 шт.

Целью оптимизации по Парето является поиск оптимальных (доминирующих) точек. Оптимальными точками являются не улучшаемые значения – точки, лучше которых нельзя подобрать по всем критериям. Это означает, что без уточнения приоритетности критериев, при дальнейшем выборе будут рассматриваться варианты из множества оптимальных точек. Если в угле, ограниченном лучами, берущими начало в точке и направленными вдоль осей по направлению улучшения полезности, не найдется ни одной точки, то данная точка является оптимальной. В данном примере оптимальными точками являются футболисты с номерами 1, 3, 4, 6, 8 (см. рисунок 1). Указанные точки образуют границу Парето, которая была названа американскими экономистами «Северо-восточная стена». Для любой точки, не входящей в границу Парето, всегда найдется точка на «Северо-восточной стене», превосходящая ее по всем критериям.

Рассмотрим алгоритм для решения данной оптимизационной задачи.

Алгоритм 1:

Шаг 1: Пусть $P = \{(x_i, y_j)\}$, где $0 \leq i < n$ и $0 \leq j < n$. Пусть $x = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ - это множество футболистов, упорядоченное по голам $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_{n-1}$. Пусть $y = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ - множество футболистов, упорядоченное по пасам $y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_{n-1}$.

Шаг 2: Создадим массив, в котором мы будем хранить имена футболистов, прошедших отбор. Обозначим их через G.

Шаг 3:

```
bool flag = true;
for (int k = 0; k < i && flag; k++){
    for (int t = 0; t < j; t++){
        if( (x[k],y[t]) consists P){
          flag = false;
          break;
        }
       else {
        G = (x[i],y[j]);
       }
    }
}
```

Пояснение:

На шаге 1 футболисты упорядочиваются по количеству забитых голов и по количеству передач (в общем случае упорядочивание происходит по всем критериям). Это нужно для того, чтобы знать, какие футболисты сделали больше голов/пасов и число этих футболистов. Каждого футболиста зададим парой значений (координат), где индексы i и j обозначают число футболистов, которые забили больше голов и пасов, соответственно, чем данный футболист. Если в процессе сортировки встречаются два одинаковых значения, то проверяем их на Парето и худший элемент удаляем из множества. Когда каждому футболисту присвоена пара значений (x_i, y_i), можем переходить к шагу 2. В результате работы циклов из шага 3 мы получим множество G, в котором хранятся отобранные футболисты. Идея метода состоит в том, чтобы сперва упорядочить исходное множество по критериям, а потом сравнивать футболистов, которые забили больше голов с теми, кто дал больше пасов, и если эти множества пересекутся, то проверяемый игрок не входит во множество границы Парето.

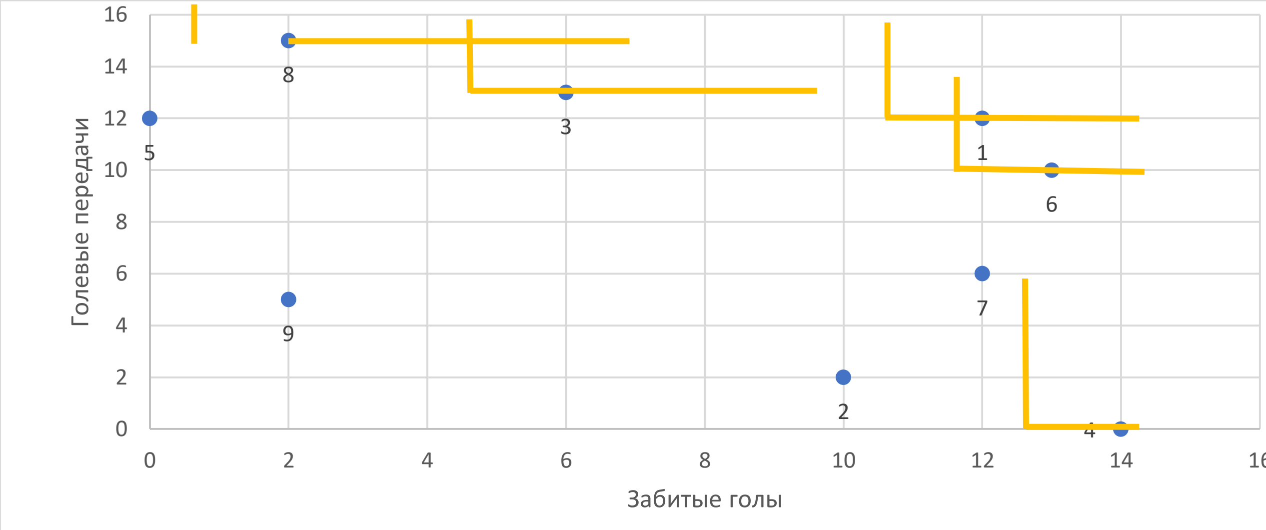

Рисунок 1 - Диаграмма отобранных футболистов

На примере двухкритериальной задачи можно рассмотреть ещё один интересный и удобный метод выделения практически полного множества Парето, а именно метод линейной свёртки. Данный метод "сворачивает" критерии нашей задачи в один мультикритерий, по которому и будем делать выборку игроков. Напомним условие наших критериев.

1) Заданы критерии:

$$W_1 = f_1(x_k) \to max, \; W_2 = f_2(x_k) \to max. \quad (1)$$

2) Производим «сворачивание» этих критериев в один критерий:

$$W = \alpha f_1(x_k) + \beta f_2(x_k) \to max \quad (2)$$

где $\alpha + \beta = 1$.

Далее решаем классическую задачу с одним критерием. Самое сложное в данном методе - это выбрать значения α и β. Обычно это делает человек, работающий с задачей, или нейросеть, которая заменяет человека. Для двух критериев есть удобный способ расстановки значений α и β, позволяющий отследить изменение множества лучших футболистов по мультикритерию в зависимости от самих весовых коэффициентов, которые отражают значимость критериев.

Пусть $\alpha = 1 - \gamma$, а $\beta = \gamma$, где γ - шаг свёртки, который мы определяем в начале решения.

$$W^{(k)} = \gamma f_1(x) + (1 - \gamma) f_2(x) \to max \quad (4)$$

Тогда параметр γ свертки последовательно принимает значения от 0 до 1:

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = 1. \quad (5)$$

Значимость критериев $f_1(x)$ и $f_2(x)$ постепенно меняется от одного к другому. Из-за постепенного изменения значимости критериев мы можем отследить, какой футболист лучший в зависимости от каждого критерия. Такой метод позволяет частично определить множество точек границы Парето. Это связано с тем, что линейная свёртка упускает "вогнутые" точки, а лучшими выборами в таком случае являются выпуклые точки.

Рассмотрим многокритериальную оптимизацию по Парето на примере задачи с 7 критериями.

Таблица 2 – Футболисты и их показатели для задачи с семью критериями

№	Фамилия	Гол, ед.	Пас, ед.	Скор., м/с	Выносл., мин	Опыт, лет	Возраст, лет	Цена, $М
1	Зинченко	12	12	4.6	80	7	24	10.2

2	Я шин	1 0	2	4. 3	6 6	2 0	3 5	9 .9
3	С оловьев	6	1 3	5. 5	7 9	5	2 2	8 .6
4	П опов	1 4	0	5. 5	6 1	9	2 6	1 1.4
5	Ко сьмин	0	1 2	3. 9	6 3	5	2 2	1 1.8
6	Ут кин	1 3	1 0	5. 5	6 5	2 1	3 6	1 2.2
7	Дз юба	1 2	6	2. 6	8 4	1 7	3 3	1 0.8
8	Бр ежнев	2	1 5	3. 5	5 9	1 5	3 0	7 .1
9	М едведев	2	5	4. 2	6 9	6	2 3	6 .8

При такой задаче мы сталкиваемся с проблемой интерпретации в графическом виде, поэтому можно использовать так называемую лепестковую диаграмму (см. рисунок 2).

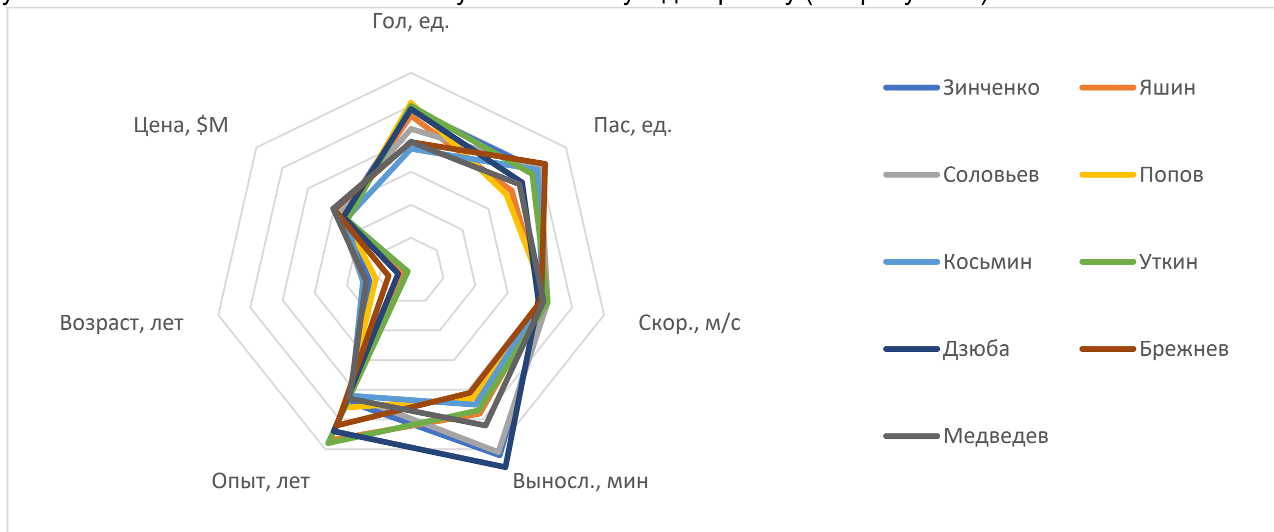

Рисунок 2 - Лепестковая диаграмма для задачи с 7 критериями.

В данной задаче будем определять точки, принадлежащие границе Парето, следующим образом: точка 1 доминирует над точкой 2, если график точки 2 полностью входит в график точки 1 и не пересекает его. Но для этого нужно изменить направление увеличения полезности по некоторым осям, а именно по осям возраста и цены, потому что чем моложе и дешевле футболист – тем лучше.

На примере этой задачи видно, что одним графическим методом уже не обойтись, и даже лепестковая диаграмма не так удобна и может привести к ошибкам. Поэтому для задач с большим количеством критериев лучше использовать обобщенный алгоритм оптимизации по Парето из первой задачи на двух критериях.

В продолжение многокритериальной оптимизации по Парето рассмотрим метод идеальной точки. Идеальной точкой или точкой абсолютного максимума называют точку в критериальном пространстве, в которой все критерии достигают своих максимальных значений. Если эта точка принадлежит достижимому множеству, то все эффективное (паретовское) множество состоит из этой единственной точки, и проблемы как таковой в этом случае нет. Однако идеальная точка обычно лежит вне множества и поэтому нереализуема. В связи с этим ее иногда называют утопической. Идея метода состоит в том, чтобы на множестве найти точку, наиболее близкую к идеальной. Следующий алгоритм описывает процедуру выбора наиболее предпочтительного объекта.

Алгоритм 2:

Шаг 1: Формирование «идеального объекта».

$$f_1^{max} = x_0, f_2^{max} = y_0, f_3^{max} = z_0, \dots, f_n^{max} = h_0 \quad (6)$$

Шаг 2: Определение для каждого объекта многокритериальной метрики (расстояния) до «идеального объекта».

$$W_j = \sqrt{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{f_i(x_j) - f_i^{max}}{f_i^{max}}\right)^2}$$

(7)

где W – глобальный критерий, который минимизирует расстояние до идеальной точки, $f_i(x)$ – это значение *i*-ого критерия, *x*– номер элемента, f_i^{max} – максимальное значение -ого критерия.

Шаг 3: Анализ множества объектов на соответствие (степень близости) «идеальному объекту».

$$W_j = \sqrt{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{f_i(x_j) - f_i^{max}}{f_i^{max}}\right)^2} \rightarrow min$$

(8)

Пояснение:

В данной формулировке задачи идеальная точка может иметь координаты x_0, y_0 и т.д. в зависимости от количества критериев. x_0 , y_0 – это максимальные значения забитых голов, отданных пасов, лучшей скорости, выносливости и т.д. Не обязательно брать за максимальные значения именно x_0, y_0, z_0, h_0 и т.д., можно взять любые достаточно большие значения, но в данной формулировке такие значения удобны. На шаге 3 находим минимальное значение W. В зависимости от задачи можем искать ещё и близкие к минимальному значения в случае, если нужно найти, например, пятерку лучших игроков. Для этого один раз пройдём по множеству W и найдём самое маленькое значение. В результате работы алгоритма по нахождению минимального значения будем знать минимальное расстояние, которое хранится в переменной min и номер объекта,

```
for(int j = 0; j < n; j++)
{
    for(int i = 0; i < k; k++)
    {
        W[j] ^ 2 +=  ((f[i](x[j]) - max(f[i]))/(max(f[i]))) ^ 2;
    }
    W[j] = √(W[j] ^ 2 );
}
```

соответствующего данному расстоянию.

Осталось рассмотреть метод контрольных показателей. Данный метод используется для поиска сбалансированного решения, которое наиболее удалено от минимальной границы по всем показателям. В общем виде идея выглядит следующим образом:

Пусть имеется n-критериальная задача:

$$W_i = f_i(x) \rightarrow max, i = \overline{1, n}$$

(9)

Назначим каждой функции $f_i(x)$ её контрольный показатель – нижнюю границу:

$$f_i(x) \geq f_i^*$$

(10)

Введём глобальный критерий W, который максимизирует минимальное расстояние от функции $f_i(x)$ до нижней границы f_i^*:

$$W = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{f_i(x)}{f_i^*}\right\} \rightarrow \max_x$$

(11)

Исходя из очевидного неравенства (слева) получаем ограничение задачи (справа):

$$\min_{1 \le i \le n}\left\{\frac{f_i(x)}{f_i^*}\right\} \le \frac{f_i(x)}{f_i^*} \Rightarrow f_i(x) \ge f_i^* W \quad (12)$$

Решая задачу, находим такое W, при котором все функции $f_i(x)$ принимают значения, наиболее удаленные от своих нижних границ f_i^*.

Таблица 3 – перерасчёт данных для метода контрольных показателей

k	Фамилия x	Гол, ед. $f_1(x)/f_1^*$	Пас, ед. $f_2(x)/f_2^*$	Скор., м/с $f_3(x)/f_3^*$	Выносл., мин $f_4(x)/f_4^*$	Опыт, лет $f_5(x)/f_5^*$	Возраст, лет $f_6(x)/f_6^*$	Цена, $M $f_7(x)/f_7^*$	Min
	Зинченко	12	12	4.6	80	7	24	10.2	1,47
	Яшин	10	2	4.3	66	20	35	9.9	1,02
	Соловьев	6	13	5.5	79	5	22	8.6	1,2
	Попов	14	0	5.5	61	9	26	11.4	
	Косьмин	0	12	3.9	63	5	22	11.8	
	Уткин	13	10	5.5	65	21	36	12.2	1
	Дзюба	12	6	2.6	84	17	33	10.8	1,04
	Брежнев	2	15	3.5	59	15	30	7.1	
	Медведев	2	5	4.2	69	6	23	6.8	

В результате оценки методом контрольных показателей получаем, что Зинченко самый «безопасный» футболист, максимально удалённый от минимальных границ критериев.

В данной работе рассмотрены проблемы многокритериальных задач и некоторые способы их решения, а именно, многокритериальная оптимизация по Парето, метод линейной свёртки, метод контрольных показателей и метод идеальной точки. Все эти методы работают при любом количестве критериев в задаче и при правильном использовании могут значительно сократить количество вариантов, из которых делается выбор. Логичнее всего сразу оптимизировать заданное множество по Парето, тем самым сократив его в разы или даже до пары значений, а затем, применив метод идеальной точки уже для усеченного множества, найти самый лучший, взвешенный вариант или найти сразу несколько удовлетворяющих нас вариантов, указав предварительно интервал отклонения от самого лучшего варианта. Отметим, что даже для поиска одного варианта следует рассмотреть не только самую близкую к идеальной точку, но и близкие к ней.

Список использованных источников:

1. *Мир математики: Висенц Торра, Математика и выборы. Принятие решений. / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014 – 160 с.*
2. *Ehrgott, M. Multicriteria Optimization. / M. Ehrgott // Springer; 2nd edition, 2005*
3. *T'kindt,V. Multicriteria Scheduling. Theory, Models and Algorithms/ V.T'kindt, J.-C. Billaut – Springer, 2nd edition 2006.- 359p.*

UDC 519.8

MULTI-CRITERIA PARETO OPTIMIZATION

Ershov O.V., Skvortsov A.V.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Lushchakova I. N. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. We consider the ideas of Pareto optimization, linear aggregation method, the ideal point method and the benchmark method. Algorithms for determining whether the element belongs to the Pareto boundary set and for determining the best option by the ideal point method are given. As an example, we consider the multi-criteria problem of selecting players for a football club.

Keywords. Pareto optimization, ideal point method, benchmark method.