

СПОСОБ ОЦЕНИВАНИЯ СУММАРНОЙ ДАЛЬНОСТИ В БИСТАТИЧЕСКОЙ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНО-ДОПЛЕРОВСКОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Легкоступ В.В.

ОАО «АЛЕВКУРП»

д. Королев Стан, Минский район, Республика Беларусь

Маркевич В.Э. – канд. техн. наук

Аннотация. В данной работе рассмотрен способ оценивания суммарной дальности от подвижного объекта до двух навигационных точек с использованием разностно-дальномерных и доплеровских измерений, что использовано при решении задачи синтеза контура радиоуправления подвижным объектом по данным разностно-дальномерной навигационной системы в условиях ограниченного объема навигационной информации. Было получено выражение для оценки суммарной дальности между объектом и двумя навигационными точками, а также получены упрощенные выражения, описывающие основные статистические характеристики оцениваемой суммарной дальности.

Ключевые слова. Бистатическая система, разностно-дальномерная навигация, доплеровская навигация, наведение по гиперболе, измерение суммарной дальности, эллиптическая система координат, статистические характеристики, распределение Берра, беспилотный летательный аппарат.

Решению задачи высокоточной навигации подвижных управляемых средств в последние десятилетия уделяется большее внимание. Это обусловлено главным образом прецизионностью решаемых задач, а именно: навигация пассажирских транспортных средств и специальной техники на местности, обеспечение посадки и взлета беспилотной авиации, управление и наведение высокоточного оружия и так далее. Причем широкое распространение получили системы разностно-дальномерной навигации ввиду высокой пропускной способности, а также отсутствия необходимости иметь радиопередатчик в составе абонентского оборудования. Такowymi являются различные спутниковые навигационные системы (СНС) типа GPS и ГЛОНАСС, системы типа LORAN и РСДН-20 «Альфа».

Для решения навигационной задачи и определения местоположения абонента требуется определить навигационные сигналы по меньшей мере трех источников навигационного сигнала на

плоскости и четырех в пространстве в случае использования разностно-дальномерного метода навигации. В случае отсутствия данного количества информации оценка собственного местоположения с помощью данной навигационной системы становится, как правило, невозможной. В таком случае приходится использовать бортовую инерциальную навигационную систему (ИНС), либо другие источники навигационной информации. При этом, как известно [1], наиболее распространенный способ реализации бортовой навигационной системы – комплексирование информации от СНС, либо наземной радионавигационной системы с информацией от ИНС. У такого подхода имеется недостаток, связанный с неограниченным ростом ошибки оценки местоположения абонента с помощью инерциальной навигационной системы в случае отсутствия информации других навигационных систем. Данная проблема может привести к невозможности осуществить высокоточную навигацию на ответственных участках траектории движения транспортных и иных подвижных средств, например, при посадке воздушного средства на взлетно-посадочную полосу или при бомбардировке объектов инфраструктуры высокоточным оружием.

В [2–3] был предложен способ наведения управляемого средства в заданную точку с использованием меньшего количества разностно-дальномерной навигационной информации, чем это требует классический способ решения навигационной задачи. При этом дальность между подвижным средством и навигационной системой не оценивалась. В данной статье рассматривается способ оценки суммарной дальности между подвижным средством и двумя навигационными позициями разностно-дальномерной навигационной системы на плоскости в пассивном режиме. Это становится возможно при условии, если на борту подвижного средства производится оценка собственной скорости движения (используя доплеровский измеритель скорости, БИНС, измерения воздушного напора) и оцениваются доплеровские сдвиги частоты двух принимаемых радионавигационных сигналов.

Методика оценивания суммарной дальности до подвижного абонента в бистатической разностно-дальномерно-доплеровской навигационной системе

Рассмотрим бистатическую систему, образованную двумя навигационными позициями Π_1, Π_2 с известной длиной базы, равной $2c$. Данные навигационные точки синхронно излучают радионавигационные сигналы, принимаемые подвижным управляемым объектом Б, движущимся в направлении базы данной системы со скоростью V_0 вдоль гиперболы положения, образованной разностью измеряемых временных задержек Δt_n навигационного радиосигнала (рисунок 1) [3–4].

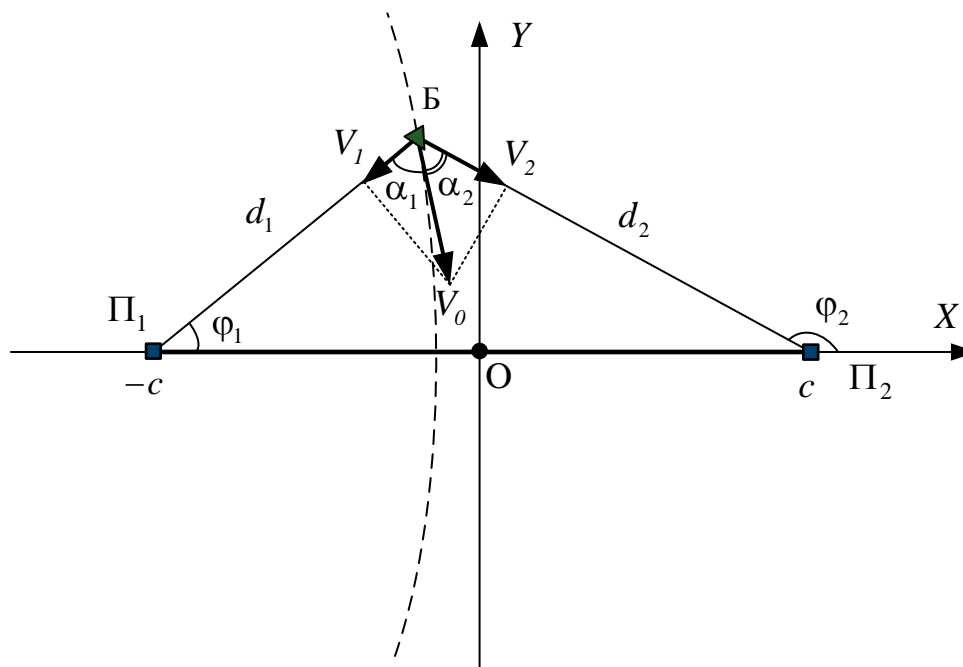


Рисунок 1 – Разностно-дальномерная навигационная система и подвижный объект, где c – фокусное расстояние или полубаза; d_1, d_2 – дальности от навигационных позиций до объекта; φ_1, φ_2 – углы визирования объекта по отношению к базе; V_1, V_2 – проекции вектора скорости объекта на линии дальности; α_1, α_2 – углы между вектором скорости и его проекциями соответственно.

Разность временных задержек $\Delta t_{\text{н}}$ зависит от разности расстояний между объектом и навигационными позициями в соответствии с выражением

$$\Delta t_{\text{н}} = \frac{d_1 - d_2}{c_0}, \quad (1)$$

где d_1, d_2 – расстояния от объекта Б до двух навигационных позициями Π_1, Π_2 соответственно;
 c_0 – скорость распространения навигационного сигнала.

Пусть также подвижный объект осуществляет измерения собственной скорости V_0 с помощью бортовой инерциальной навигационной системы и двух доплеровских сдвигов частот $\Delta f_1, \Delta f_2$ принимаемых навигационных радиосигналов. При этом измеряемые доплеровские сдвиги частот $\Delta f_1, \Delta f_2$ связаны с двумя проекциями V_1, V_2 вектора скорости движения V_0 объекта на радиус-векторы дальностей до навигационных позиций следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{V_1}{\lambda}, \\ \Delta f_2 &= \frac{V_2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2)$$

где λ – длина волны навигационного радиосигнала.

Ставится задача произвести оценку суммарного расстояния от объекта до бистатической навигационной системы пассивным способом. Изучение данной задачи удобнее осуществлять в эллиптической системе координат в альтернативном представлении [4]. В данной системе координат положение объекта задается двумя координатами: координата ρ определяет линию положения в виде эллипса и соответствует приведенной сумме расстояний d_1 и d_2 ; координата τ определяет линию положения в виде гиперболы и соответствует приведенной разности расстояний d_1 и d_2 . При этом описанные линии положения являются софокусными и взаимно ортогональными. Связь данных координат с радиус-векторами дальностей между позициями и объектам осуществляется выражениями

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{d_1 + d_2}{2c}, \\ \tau &= \frac{d_1 - d_2}{2c}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из рисунка 1 видно, что скорость объекта V_0 связана с радиальными скоростями V_1, V_2 соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_0} &= \cos \alpha_1, \\ \frac{V_2}{V_0} &= \cos \alpha_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_1, α_2 – углы между вектором скорости V_0 и проекциями V_1, V_2 соответственно.

Зависимость отношения проекции V_1 к вектору скорости V_0 объекта приведена на рисунке 2а. Из этого рисунка видно, что определение отношения данных проекций позволяет произвести оценку суммарной дальности ρ .

Угол, под которым наблюдается база навигационной системы со стороны подвижного объекта, задается выражением

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (5)$$

Тогда связь углов треугольника, образованного точками $\Pi_1, \Pi_2, Б$ можно описать равенством

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha, \quad (6)$$

где φ_1, φ_2 – углы визирования объекта по отношению к линии базы.

Зависимость угла α от суммарной дальности ρ представлена на рисунке 2б.

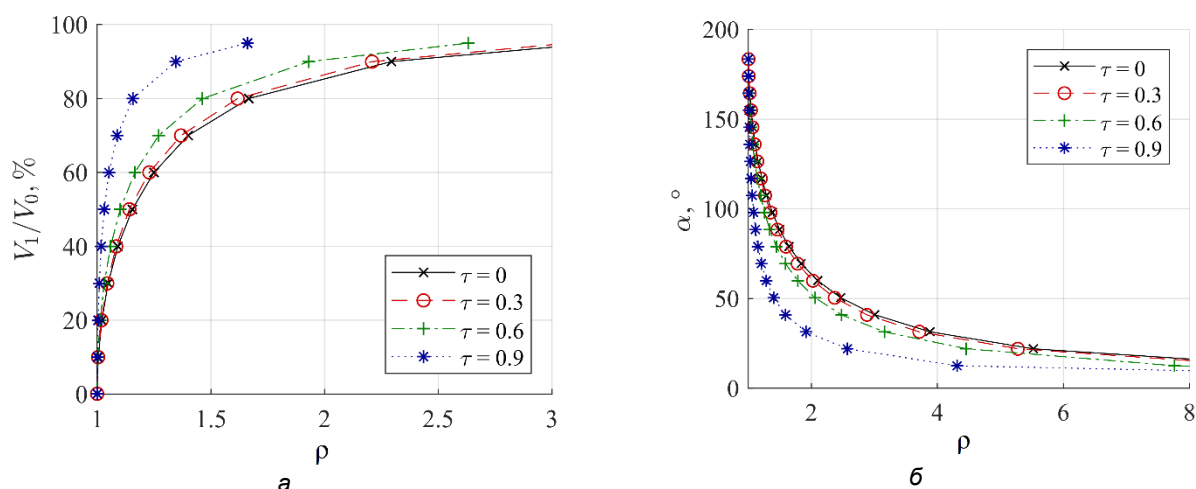


Рисунок 2 – Зависимость отношения V_1/V_0 (а) и угла α (б) от суммарной дальности ρ для разных значений параметра τ .

Дальности d_1, d_2 можно выразить, используя следующие соотношения [5]:

$$d_1 = \frac{c(1-\tau^2)}{\tau - \cos \varphi_1}, \quad d_2 = \frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_2}. \quad (7)$$

Собирая воедино второе выражение в (3) и (7) получим соотношение

$$\frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_1} + \frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_2} = 2c\tau, \quad (8)$$

а используя выражение (6) найдем выражения для определения углов φ_1, φ_2 визирования объекта (с точностью до знака):

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\tau}{2} \left(1 + \cos \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sgn} \tau \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\tau^2} - \cos \alpha - 1} \right), \\ \cos \varphi_2 &= \frac{\tau}{2} \left(1 + \cos \alpha - \sqrt{2} \operatorname{sgn} \tau \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\tau^2} - \cos \alpha - 1} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя выражение декартовой координаты x объекта через его эллиптические координаты $x = c\rho\tau$, (10)

а также через полярные координаты

$$x = d_1 \cos \varphi_1 - c, \quad (11)$$

найдем связь суммарной дальности ρ объекта через его угол визирования φ_1 :

$$\rho = \frac{\tau \cos \varphi_1 - 1}{\tau - \cos \varphi_1} \quad (12)$$

Методика получения основных статистических характеристик оценки суммарной дальности предлагаемым способом

Как указывалось выше, для оценки параметра ρ БЛА должен производить измерения скоростей V_0, V_1, V_2 . Будем полагать, что шумы данных оценок стационарны и распределены по закону Гаусса:

$$V_0 \square N(M_{V_0}, \sigma_{V_0}^2);$$

$$V_1 \square N(M_{V_1}, \sigma_{V_1}^2);$$

$$V_2 \square N(M_{V_2}, \sigma_{V_2}^2),$$

где $M_{V_0}, M_{V_1}, M_{V_2}$ – математические ожидания V_0, V_1, V_2 ;

$\sigma_{V_0}^2, \sigma_{V_1}^2, \sigma_{V_2}^2$, – дисперсии V_0, V_1, V_2 .

Для начала определим основные статистические характеристики угла α , задаваемого выражением (5). Как известно [6], математическое ожидание M_α и дисперсия σ_α^2 величины α , являющейся суммой двух случайных величин будут определяться выражениями

$$M_\alpha = M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2}, \quad (13)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + 2\text{cov}_{\alpha_1\alpha_2}, \quad (14)$$

где $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$ – математические ожидания углов α_1, α_2 ;

$\sigma_{\alpha_1}^2, \sigma_{\alpha_2}^2$ – дисперсии углов α_1, α_2 ;

$\text{cov}_{\alpha_1\alpha_2}$ – корреляционный момент углов α_1, α_2 соответственно.

Определим статистические характеристики безразмерных величин b_1 и b_2 , образуемых следующими отношениями:

$$b_1 = \frac{V_1}{V_0}; \quad (15)$$

$$b_2 = \frac{V_2}{V_0}.$$

Плотности распределения вероятностей b_1, b_2 образуются частными от деления нормально распределенных случайных величин. Плотность распределения вероятности b_1 при условии, что делимое и делитель между собой не коррелированы, описывается выражением [7]

$$p(b_1) = \frac{g_2(b_1) g_3(b_1)}{\sqrt{2\pi} g_1^3(b_1) \sigma_{V_1} \sigma_{V_0}} \left[\Phi\left(\frac{g_2(b_1)}{g_1(b_1)}\right) - \Phi\left(-\frac{g_2(b_1)}{g_1(b_1)}\right) \right] + \frac{1}{\pi g_1^2(b_1) \sigma_{V_1} \sigma_{V_0}} \exp\left(-\frac{g_c}{2}\right), \quad (16)$$

где $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$ – функция стандартного нормального распределения;

$$g_1(b_1) = \sqrt{\frac{1}{\sigma_{V_1}^2} b_1^2 + \frac{1}{\sigma_{V_0}^2}};$$

$$g_2(b_1) = \frac{M_{V_1}}{\sigma_{V_1}^2} b_1 + \frac{M_{V_0}}{\sigma_{V_0}^2};$$

$$g_3(b_1) = \exp\left(\frac{g_2^2(b_1) - g_c g_1^2(b_1)}{2g_1^2(b_1)}\right); \quad g_c = \frac{M_{V_1}^2}{\sigma_{V_1}^2} + \frac{M_{V_0}^2}{\sigma_{V_0}^2}.$$

Величина ξ_2 распределена по аналогичному закону.

Если коэффициент вариации δV_0 величины V_0 будет близок к единице или больше ее, то случайные величины ξ_1, ξ_2 будут иметь распределение, близкое к Коши, которое, как известно [6], не имеет конечных моментов. В данном же случае, будем полагать, что скорость движения управляемого объекта V_0 значительно больше СКО ее оценки, что накладывает ограничения на минимальную скорость движения объекта в рабочем диапазоне изменения скорости его движения, по отношению к максимальной величине СКО оценки скорости движения объекта. При таком условии закон распределения величины ξ_1 можно аппроксимировать нормальным [8] с математическим ожиданием

$$M_{b_1} = \frac{M_{V_1}}{M_{V_0}}$$

и дисперсией

$$\sigma_{b_1}^2 = M_{b_1}^2 (\delta V_1^2 + \delta V_0^2), \quad (17)$$

где $\delta V_0 = \frac{\sigma_{V_0}}{M_{V_0}}$, $\delta V_1 = \frac{\sigma_{V_1}}{M_{V_1}}$ – коэффициенты вариаций для V_0, V_1 соответственно.

Учитывая выражения (4), для получения оценок ξ_1, ξ_2 величины ξ_1, ξ_2 должны быть подвергнуты нелинейному преобразованию функцией аркосинуса. Поэтому необходимо, чтобы они располагались в диапазоне $[-1, 1]$. С этой целью значения величин ξ_1, ξ_2 , выходящие за пределы указанного диапазона отбраковываются, порождая величины ξ_1^*, ξ_2^* , имеющие закон распределения в виде усеченного нормального. Плотность распределения вероятности величины ξ_1^* в соответствии с [9] задается выражением

$$p(b_1^*) = \frac{1}{\sigma_{b_1}} \phi\left(\frac{b_1^* - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) \left[\Phi\left(\frac{1 - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - M_{b_1}}{\sigma_{b_1}}\right) \right]^{-1}, \quad (18)$$

где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ – плотность распределения вероятности стандартной нормальной случайной величины x ;

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) \text{ – ее функция распределения;}$$

$\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок.

Математическое ожидание закона распределение (18) имеет вид

$$M_{b_1^*} = M_{b_1} - \sigma_{b_1} \frac{\phi(1) - \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)}, \quad (19)$$

а дисперсия

$$\sigma_{b_1^*}^2 = \sigma_{b_1}^2 \left[1 - \frac{\phi(1) + \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} - \left(\frac{\phi(1) - \phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} \right)^2 \right] \quad (20)$$

После нелинейного преобразования

$$\alpha_1 = \arccos(b_1^*) \quad (21)$$

плотность распределения вероятности случайной величины α_1 примет вид

$$p(\alpha_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma_{b_1^*}} \phi \left(\frac{\cos \alpha_1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}} \right) \left[\Phi \left(\frac{1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}} \right) - \Phi \left(\frac{-1 - M_{b_1^*}}{\sigma_{b_1^*}} \right) \right]^{-1}. \quad (22)$$

Аналогично выводу выражения (22) для α_1 , плотность распределения вероятности угла α_2 примет вид

$$p(\alpha_2) = \frac{\sin \alpha_2}{\sigma_{b_2^*}} \phi \left(\frac{\cos \alpha_2 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}} \right) \left[\Phi \left(\frac{1 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}} \right) - \Phi \left(\frac{-1 - M_{b_2^*}}{\sigma_{b_2^*}} \right) \right]^{-1} \quad (23)$$

Математические ожидания $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$ углов α_1, α_2 определяются выражениями

$$\begin{aligned} M_{\alpha_1} &= \arccos(M_{b_1^*}), \\ M_{\alpha_2} &= \arccos(M_{b_2^*}), \end{aligned} \quad (24)$$

а их дисперсии примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}^2 &= \frac{\sigma_{b_1^*}^2}{1 - M_{b_1^*}^2}; \\ \sigma_{\alpha_2}^2 &= \frac{\sigma_{b_2^*}^2}{1 - M_{b_2^*}^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

На рисунке 3 приведены выборочное среднее \bar{M}_α угла α , полученное методом Монте-Карло и его математическое ожидание, вычисленное по формуле (13), в зависимости от соотношения измеряемых скоростей V_1/V_0 для различных коэффициентов вариации δV_0 . При этом предполагается, что $V_2 = V_1$.

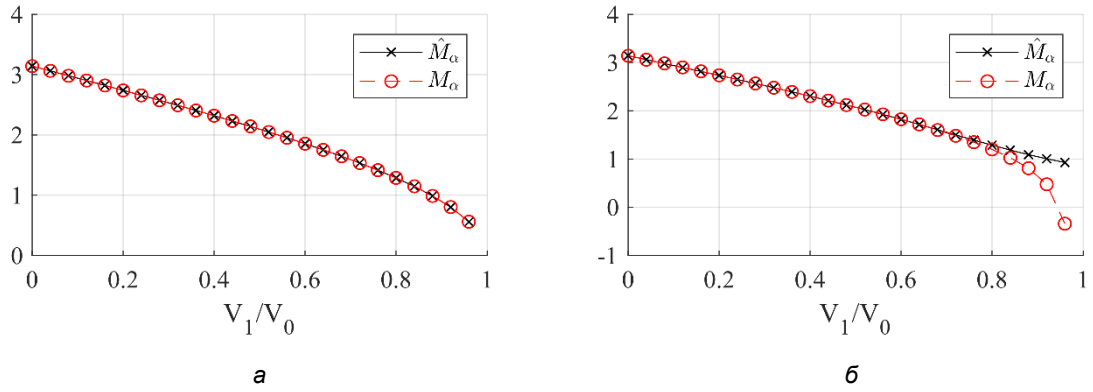


Рисунок 3 – Зависимость математического ожидания M_α (красным) и выборочного среднего \hat{M}_α (черным) угла α от соотношения скоростей V_1 / V_0 для $\delta V_0 = 0.01$ (а), $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Приведенные выше статистические моменты (24) и (25) позволяют найти математическое ожидание (13) и дисперсию (14) для случая некоррелированных углов α_1, α_2 , при котором $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = 0$. Однако, учитывая тот факт, что в формировании и угла α_1 и угла α_2 участвует одна и та же величина V_0 , входящая в знаменатели выражений (15), целесообразно рассмотреть случай корреляции между собой углов α_1, α_2 . Рассмотрим эту связь в предположении, что плотности распределения вероятностей величин ξ_1, ξ_2 близки к нормальным. Для вывода корреляционного момента $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ с целью повышения наглядности введем функции

$$\begin{aligned} f &= f(V_1, V_0) = \arccos\left(\frac{V_1}{V_0}\right), \\ \tilde{f} &= \tilde{f}(V_2, V_0) = \arccos\left(\frac{V_2}{V_0}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Искомый угол α является суммой функций (26). Корреляционный момент $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ определяется известным выражением [5]:

$$\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = M_{\alpha_1 \alpha_2} + M_{\alpha_1} M_{\alpha_2} \quad (27)$$

где $M_{\alpha_1 \alpha_2}$ – математическое ожидание произведения углов α_1, α_2 .

Для вычисления выражения (27) используем разложение функций (26) в ряд Тейлора в окрестности математических ожиданий $M_{V_0}, M_{V_1}, M_{V_2}$ с сохранением величин до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\approx f + f'_{V_1}(V_1 - M_{V_1}) + f'_{V_0}(V_0 - M_{V_0}) + \frac{1}{2} f''_{V_1 V_1}(V_1 - M_{V_1})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} f''_{V_0 V_0}(V_0 - M_{V_0})^2 + \frac{1}{2} f''_{V_0 V_1}(V_0 - M_{V_0})(V_1 - M_{V_1}); \\ \alpha_2 &\approx \tilde{f} + \tilde{f}'_{V_2}(V_2 - M_{V_2}) + \tilde{f}'_{V_0}(V_0 - M_{V_0}) + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_2 V_2}(V_2 - M_{V_2})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_0 V_0}(V_0 - M_{V_0})^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_0 V_2}(V_0 - M_{V_0})(V_2 - M_{V_2}). \end{aligned} \quad (28)$$

Соответственно приближенные значения математических ожиданий углов (28) равны

$$M_{\alpha_1} \approx f + \frac{1}{2} f''_{V_1 V_1} \sigma_{V_1}^2 + \frac{1}{2} f''_{V_0 V_0} \sigma_{V_0}^2; \quad (29)$$

$$M_{\alpha_2} \approx \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_2 V_2} \sigma_{V_2}^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_0 V_0} \sigma_{V_0}^2.$$

Произведение углов $\alpha_1 \alpha_2$ разложим в ряд Тейлора аналогичным образом:

$$\alpha_1 \alpha_2 \approx f \tilde{f} + f'_{V_1} \tilde{f} (V_1 - M_{\alpha_1}) + f \tilde{f}'_{V_2} (V_2 - M_{\alpha_2}) + (f'_{V_0} \tilde{f} + \tilde{f}'_{V_0} f) (V_0 - M_{\alpha_0}) +$$

$$+ \frac{1}{2} f''_{V_1 V_1} \tilde{f} (V_1 - M_{\alpha_1})^2 + \frac{1}{2} \tilde{f}''_{V_2 V_2} f (V_2 - M_{\alpha_2})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (f''_{V_0 V_0} \tilde{f} + 2f'_{V_0} \tilde{f}'_{V_0} + f''_{V_0 V_0} f) (V_0 - M_{\alpha_0})^2.$$

Тогда приближенное значение математического ожидания произведения углов $\alpha_1 \alpha_2$ примет вид

$$M_{\alpha_1 \alpha_2} \approx f \tilde{f} + \frac{\sigma_1^2}{2} f'_{V_1} \tilde{f} + \frac{\sigma_2^2}{2} f \tilde{f}'_{V_2} + \frac{\sigma_0^2}{2} (f'_{V_0} \tilde{f} + \tilde{f}'_{V_0} f). \quad (30)$$

Соотношение (27) при подстановке (29) и (30) переписывается в виде

$$\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = f'_{V_0} \tilde{f}'_{V_0} \sigma_{V_0}^2. \quad (31)$$

Учитывая производные $f'_{V_0} = \frac{V_1}{V_0 \sqrt{V_0^2 - V_1^2}}$, $\tilde{f}'_{V_0} = \frac{V_2}{V_0 \sqrt{V_0^2 - V_2^2}}$ и подставляя вместо величин V_0, V_1, V_2 их математические ожидания, получим окончательное выражение для корреляционного момента углов α_1, α_2 :

$$\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{M_{V_1} M_{V_2}}{M_{V_0}^2 \sqrt{M_{V_0}^2 - M_{V_1}^2} \sqrt{M_{V_0}^2 - M_{V_2}^2}} \sigma_{V_0}^2 \quad (32)$$

Зависимость $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ от угла α приведена на рисунке 4.

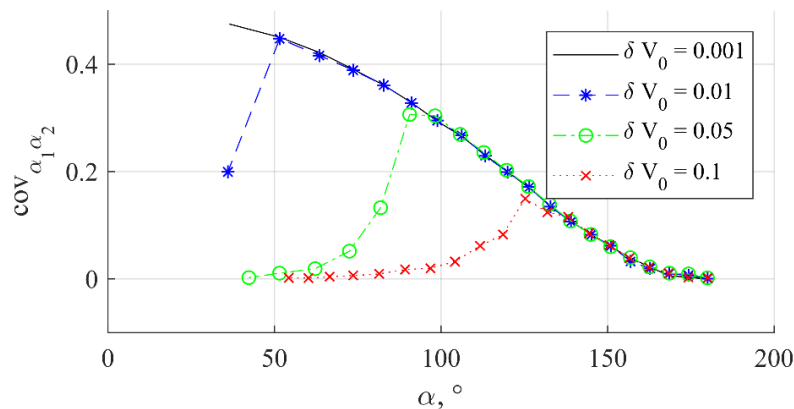


Рисунок 4 – Зависимость корреляционного момента $\text{cov}_{\alpha_1 \alpha_2}$ от угла α при различных коэффициентах вариации δV_0 .

Момент корреляции (32) позволяет найти дисперсию угла α для случая коррелированности оценок углов $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$. На рисунке 5 приведены зависимости выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\alpha^2$ оценки угла α и теоретической дисперсии σ_α^2 от соотношения измеряемых скоростей V_1/V_0 для различных коэффициентов вариации δV_0

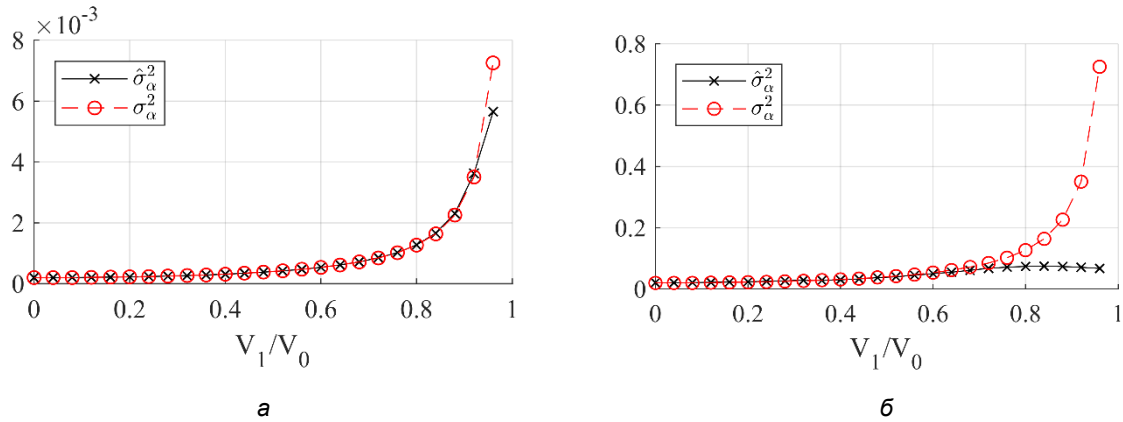


Рисунок 5 – Зависимость выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\alpha^2$ (черным) и теоретической дисперсии σ_α^2 (красным) угла α от соотношения скоростей V_1/V_0 для $\delta V_0 = 0.01$ (а), $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Используя угол α можно оценить параметр ρ в соответствии с выражением (12). Статистические характеристики величины ρ можно также попытаться найти методом линеаризации ρ как функции от угла α с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности математического ожидания M_α с сохранением первых трех членов разложения [6]. Выражение математического ожидания примет вид

$$M_\rho \approx \rho(M_\alpha) + \frac{1}{2} \rho''_{\alpha\alpha}(M_\alpha) \sigma_\alpha^2. \quad (33)$$

Дисперсию можно оценить посредством выражения

$$\sigma_\rho^2 = [\rho'_\alpha(M_\alpha)]^2 \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{4} [\rho''_{\alpha\alpha}(M_\alpha)]^2 (\mu_4 - \sigma_\alpha^4) + \rho'_\alpha(M_\alpha) \rho''_{\alpha\alpha}(M_\alpha) \mu_3 \quad (34)$$

где μ_3 – третий начальный момент случайной величины α ;

μ_4 – четвертый центральный момент случайной величины α .

Если сделать предположение о том, что плотность распределения вероятности α имеет гауссовский вид, то выражение (34) упроститься:

$$\sigma_\rho^2 = [\rho'_\alpha(M_\alpha)]^2 \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{2} [\rho''_{\alpha\alpha}(M_\alpha)]^2 \sigma_\alpha^4 \quad (35)$$

На рисунке 6 приведены гистограммы распределения частот для величины α , полученные методом Монте-Карло.

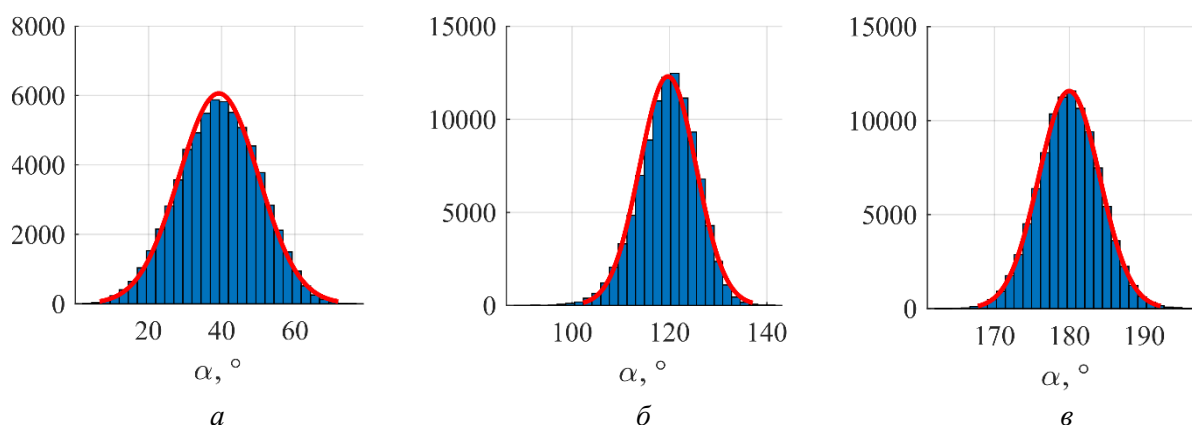


Рисунок 6 – Гистограммы распределения частот (синим) угла α и аппроксимация гауссовой кривой (красным) для различных значений M_α : $M_\alpha = 40^\circ$ (а); $M_\alpha = 120^\circ$ (б); $M_\alpha = 180^\circ$ (в).

Ввиду громоздкости производных по углу α выражения (12), входящих в (33) и (34), предлагается перейти к вычислению производных величины ρ^* , аппроксимирующей (12) как функцию $\rho = \rho(\alpha, \tau)$:

$$\rho^* = \rho^*(\alpha, \tau) = k_1 \coth[k_2 \alpha + k_3 \alpha \tau^2] - k_4 \sin(k_5 \alpha), \quad (36)$$

где $k_1 = 1.576$; $k_2 = 0.7848$; $k_3 = 0.5213$; $k_4 = 0.5922$; $k_5 = 0.5445$.

При этом выражения для первых двух производных $\rho^*(\alpha, \tau)$ по углу α выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha}^{*'}(\alpha) &= -\operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 k_1(k_2 + \tau^2 k_3) + k_4 k_5 \cos[\alpha k_5]; \\ \rho_{\alpha\alpha}^{*''}(\alpha) &= 2 \coth\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right] \operatorname{csch}\left[\alpha(k_2 + \tau^2 k_3)\right]^2 k_1(k_2 + \tau^2 k_3)^2 - k_4 k_5^2 \sin[\alpha k_5]. \end{aligned} \quad (37)$$

Для поиска аппроксимирующего выражения (36) использовалась множественная регрессия [10] по параметрам α, τ , причем параметр τ варьировался в диапазоне $[0, 0.5]$, а угол α в диапазоне $[40^\circ, 180^\circ]$. Оптимальность аппроксимации оценивалась по следующим полученным характеристикам: коэффициент детерминации $R^2 = 0.9999$, сумма квадратов регрессионных остатков $SSE = 2.008$, а их среднеквадратическое отклонение $\sigma_{SSE} = 0.014$. Зависимости $\rho(\alpha)$ и $\rho^*(\alpha)$ приведены на рисунке 7.

Также выражения для математического ожидания (33) и дисперсии (34) можно уточнить, если учесть случайный характер аргумента τ , входящего в (12) и в (36). Тогда математическое ожидание величины $\rho = \rho(\alpha, \epsilon)$ опишется выражением

$$M_\rho \approx \rho(M_\alpha, M_\tau) + \frac{1}{2} \rho_{\alpha\alpha}''(M_\alpha, M_\tau) \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{2} \rho_{\tau\tau}''(M_\tau, M_\tau) \sigma_\tau^2 \quad (38)$$

где M_τ – математическое ожидание ϵ ;

σ_τ^2 – дисперсия ϵ .

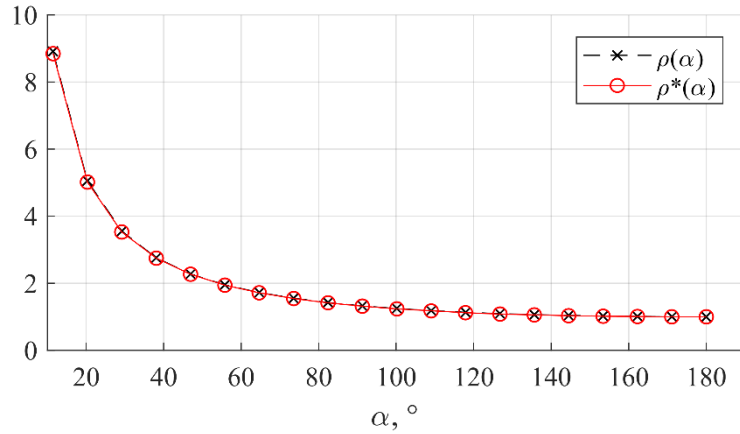


Рисунок 7 – Зависимости $\rho(\alpha)$ (черным) и $\rho^*(\alpha)$ (красным).

На рисунке 8 приведены зависимости математического ожидания M_ρ и выборочного среднего \hat{M}_ρ от угла α .

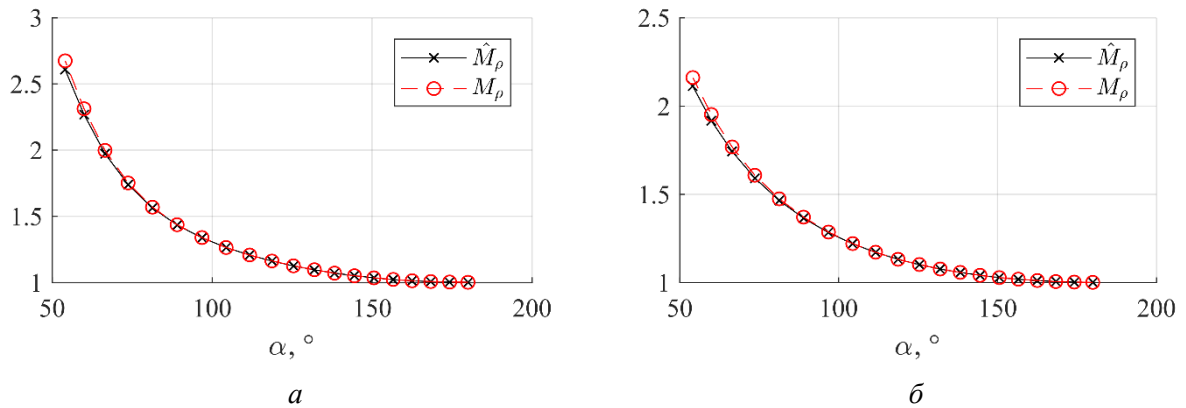


Рисунок 8 – Зависимости выборочного среднего \hat{M}_ρ (черным) и математического ожидания M_ρ (красным) угла α для различных значений δV_0 : $\delta V_0 = 0.01$ (а); $\delta V_0 = 0.1$ (б).

Окончательное выражение для дисперсии величины $\hat{\rho}(\alpha, \tau)$ в случае отсутствия статистической связи между величинами α и τ примет вид

$$\sigma_\rho^2 = [\rho'_\alpha(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\alpha^2 + [\rho'_\tau(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\tau^2 + \frac{1}{2} [\rho''_{\alpha\alpha}(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\alpha^4 + \frac{1}{2} [\rho''_{\tau\tau}(M_\alpha, M_\tau)]^2 \sigma_\tau^4 + \rho''_{\alpha\tau}(M_\alpha, M_\tau) \sigma_\alpha^2 \sigma_\tau^2 \quad (39)$$

Используемые в (38) и (39) производные величины $\rho = \rho(\alpha, \tau)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho'_\tau(\alpha, \tau) &= -2k_1 k_3 \alpha \tau \operatorname{csch} \left[\alpha (k_2 + \tau^2 k_3) \right]^2; \\ \rho''_{\tau\tau}(\alpha, \tau) &= 2k_1 k_3 \alpha \operatorname{csch} \left[\alpha (k_2 + \tau^2 k_3) \right]^2 \left(4k_3 \alpha \tau^2 \coth \left[\alpha (k_2 + \tau^2 k_3) \right] - 1 \right); \\ \rho''_{\alpha\tau}(\alpha, \tau) &= 2k_1 k_3 \tau \operatorname{csch} \left[\alpha (k_2 + \tau^2 k_3) \right]^2 \left(2\alpha \coth \left[\alpha (k_2 + \tau^2 k_3) \right] (k_2 + \tau^2 k_3) - 1 \right). \end{aligned}$$

На рисунках 9 а–г синим цветом приведены гистограммы распределения частот оценки ρ , которые достаточно точно характеризуются распределением Берра (Burr, 1942) [11–12], что отражено

на рисунках 8 в виде красной огибающей. Данная статистика проверялась методом хи-квадрат с уровнем значимости $q = 0.01$.

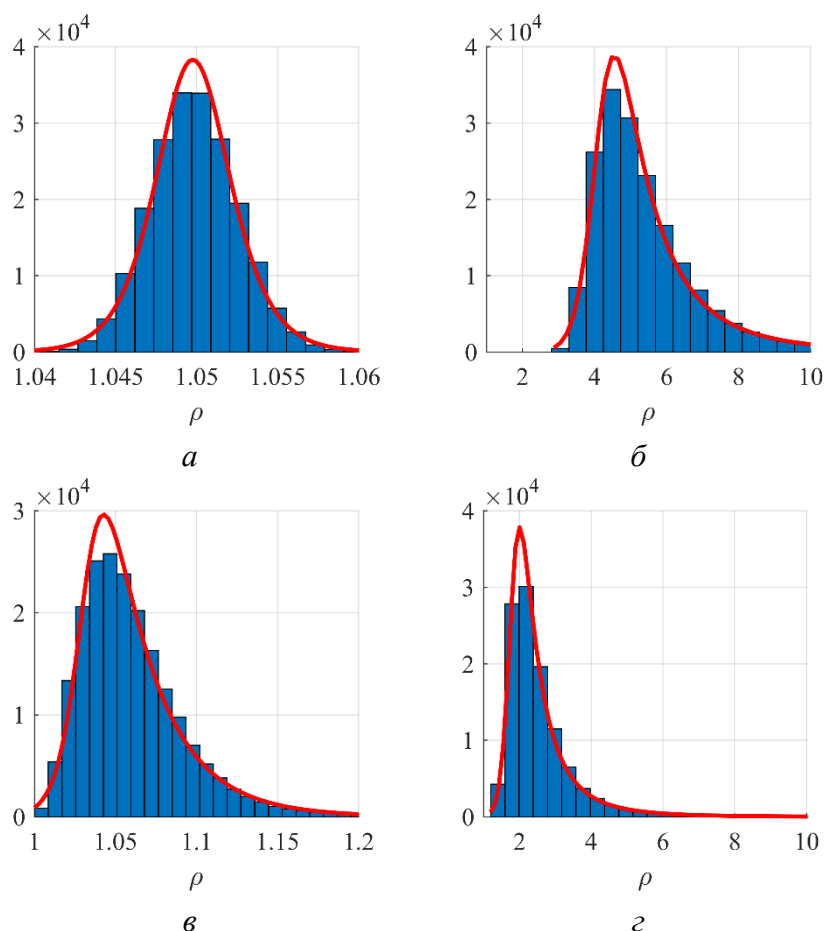


Рисунок 9 – Гистограммы распределения частот оценки ρ (синий) и аппроксимация законом распределения Берра (красный): а, в – для коэффициента вариации $\delta V_0 = 0.01$; б, г – для коэффициента вариации $\delta V_0 = 0.1$;

На рисунке 10 приведены зависимости теоретической дисперсии σ_ρ^2 и выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\rho^2$ от значения дальности ρ .

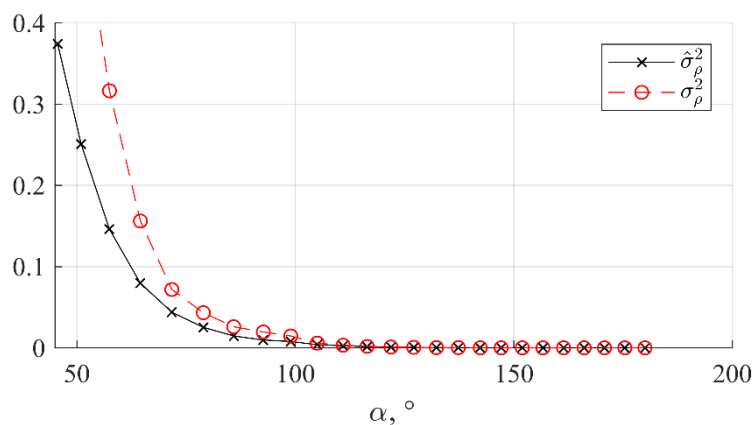
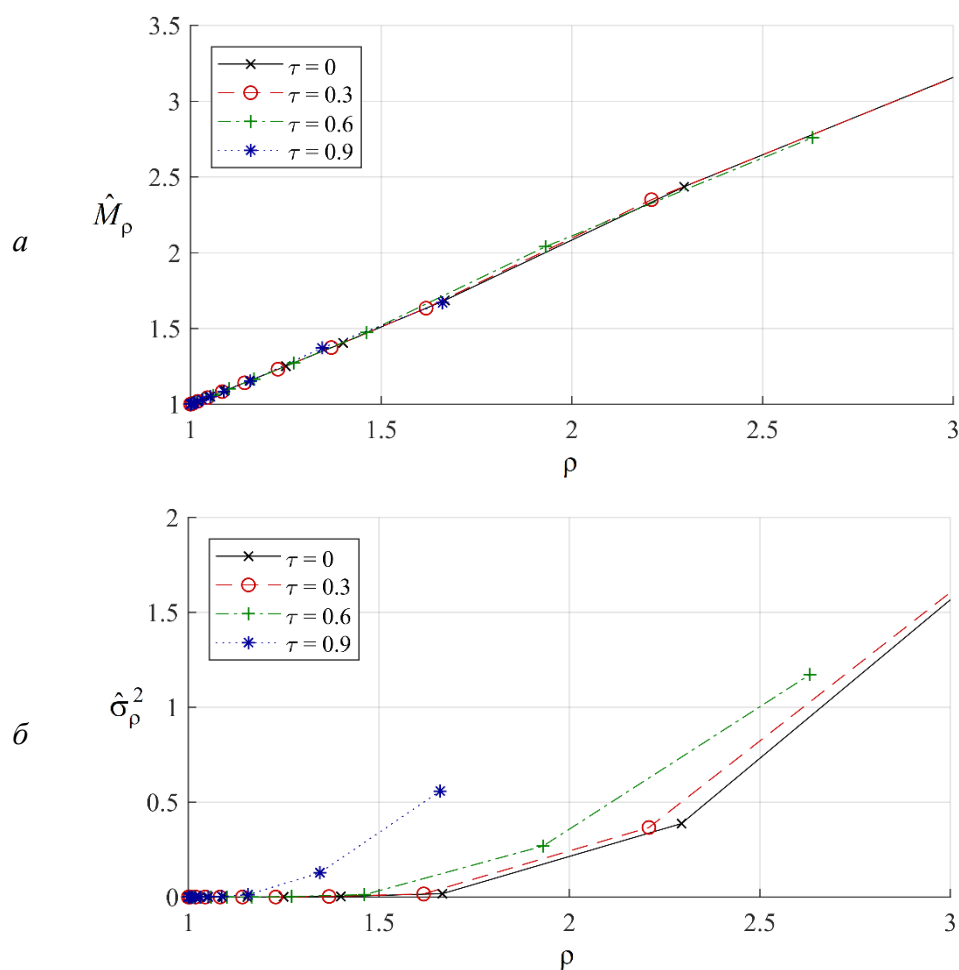


Рисунок 10 – Зависимость выборочной дисперсии $\hat{\sigma}_\rho^2$ (черным) и теоретической дисперсии σ_ρ^2 (красным) от дальности ρ при $\delta V_0 = 0.1$.

Из рисунка 10 видно, что при увеличении суммарной дальности ρ быстро возрастает дисперсия ее оценки σ_ρ^2 . Более того, рассматривая производную $\rho_\alpha^{*\prime}(\alpha)$ как функцию чувствительности дальности ρ к изменению угла α можно заметить, что если угол α устремить к нулю, то производная $\rho_\alpha^{*\prime}(\alpha)$, являющаяся функцией чувствительности величины ρ^* к изменению угла α , устремится к минус бесконечности. Данная закономерность в условиях действующих погрешностей оценки α делает неинформативной оценку суммарной дальности ρ при больших ее значениях. Учитывая асимметричность закона распределения величины ρ , можно попытаться получить более точную оценку, используя обобщение нормального закона распределения на случай асимметричного распределения случайной величины ρ и наличия тяжелых хвостов [13] или перейти к оценке моментов величины, имеющей распределение Берра с помощью метода максимального правдоподобия [14].

Некоторые статистические характеристики оценки величины ρ , получаемой приведенном выше способом исследовались методом Монте-Карло с объемом выборки равном 100000 испытаниям для каждого случая. Скорость V_0 объекта, движущегося к базе, задавалась равной 100 м/с. На рисунках 11 (а–г) представлены: выборочное среднее \hat{M}_ρ , выборочная дисперсия $\hat{\sigma}_\rho^2$, выборочный коэффициент асимметрии $\kappa_\rho^{(3)}$, выборочный коэффициент эксцесса $\kappa_\rho^{(4)}$ в зависимости от реальной суммарной дальности ρ для различных величин τ . Из этих рисунков видно, что с ростом суммарной дальности ρ характеристики закона распределения ее оценки $\hat{\rho}$ изменяются, что существенно ухудшает качество получаемых оценок, которые становятся все более смещенными в совокупности с растущими выбросами относительно их среднего. Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса указывают на значительное отклонение от нормального распределения. На дальности $\rho = 3$, соответствующей удалению объекта от центра базы приблизительно на удвоенную длину базы, смещение выборочного среднего достигает 0,2 (около 7%).



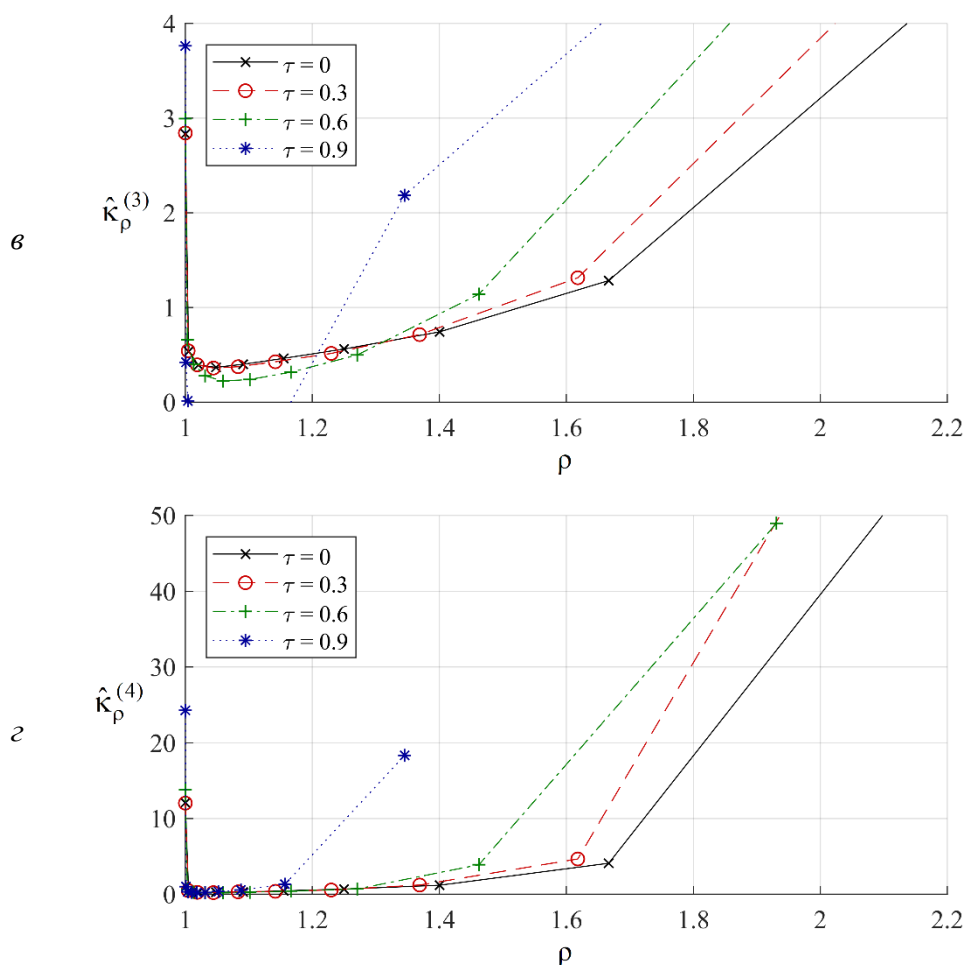


Рисунок 11 – Зависимости выборочных статистических характеристик величины $\hat{\rho}$ от реальной суммарной дальности ρ : а – среднее $M\hat{\rho}$, б – дисперсия $\sigma_{\hat{\rho}}^2$, в – коэффициент асимметрии $\kappa_{\hat{\rho}}^{(3)}$, г – коэффициент эксцесса $\kappa_{\hat{\rho}}^{(4)}$.

На рисунке 12 приведена траектория движения летательного аппарата на плоскости, скорость которого $V_0 = 200$ м/с, наводимого с помощью разностно-дальномерной навигационной системы вдоль целевой гиперболы положения с параметром $\tau_0 = 0.17$ и длиной базы $2c = 800$ м.

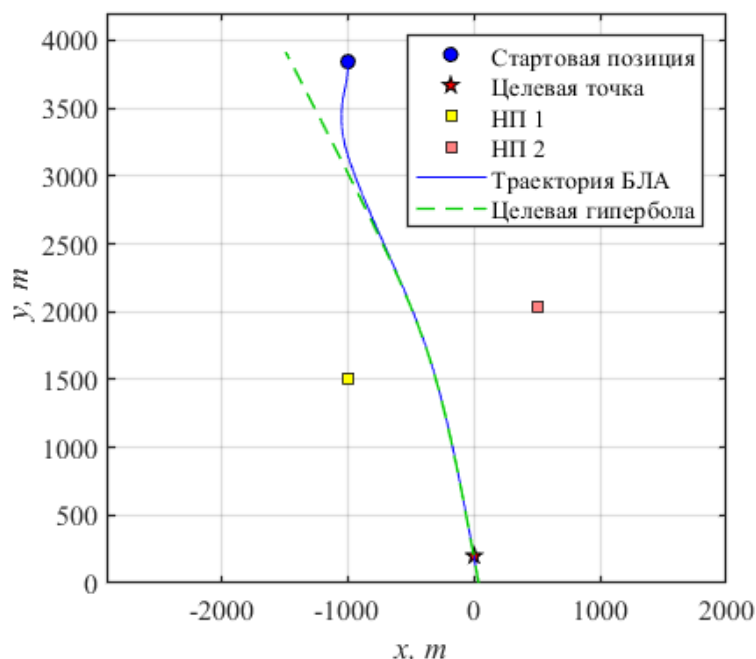


Рисунок 12 – Траектория движения БЛА, где НП – навигационная позиция.

На рисунках 13 (а–г) приведены зависимости получаемой с использованием выражений (4), (6), (9), (12) величины $\hat{\rho}$ для смоделированной траектории движения БЛА, представленной на рисунке 12.

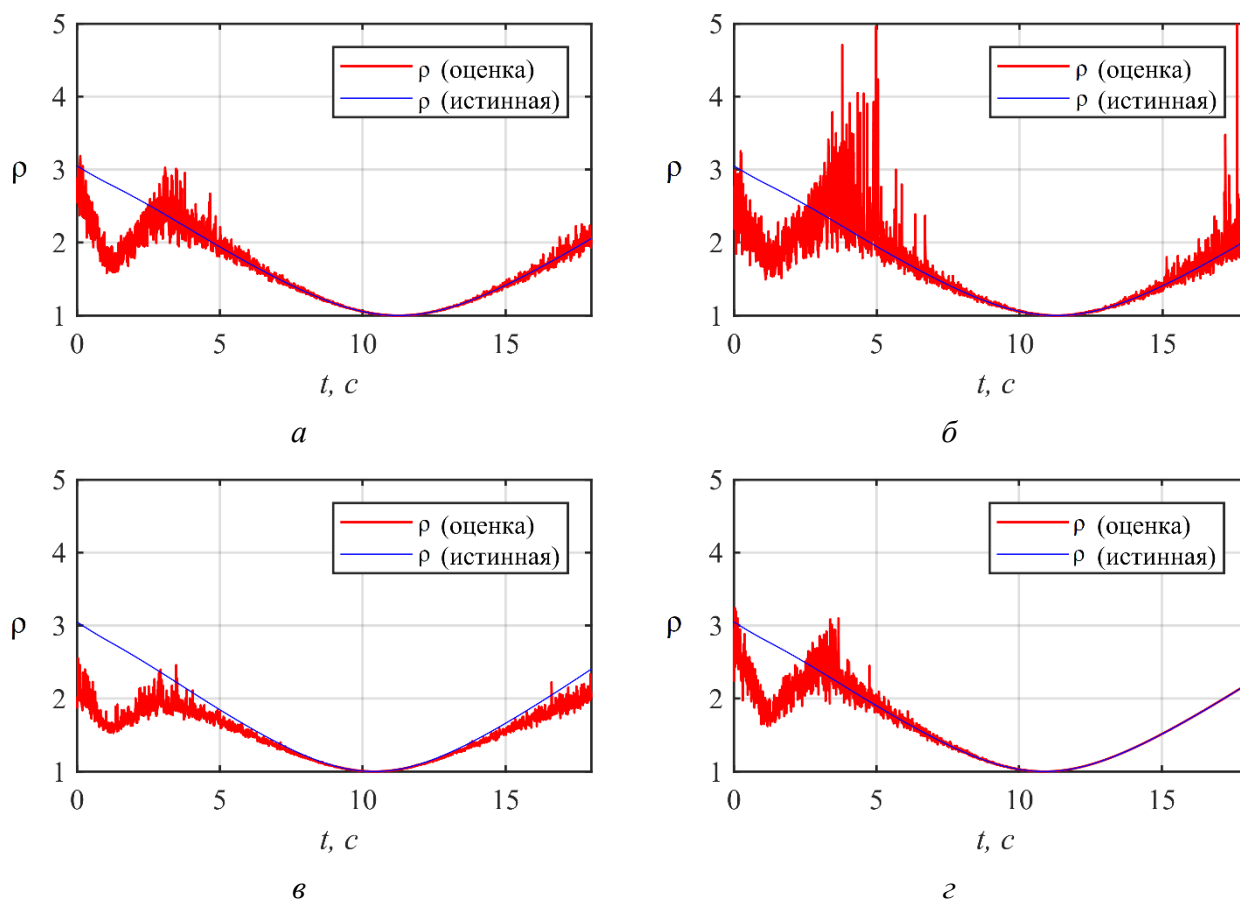


Рисунок 13 – Типичные реализации оценок $\hat{\rho}$, полученные по результатам компьютерного моделирования движения БЛА по траектории, приведенной на рисунке 4 для различных статистических характеристик измерений скорости: а – $\sigma_{v_0} = 5 \text{ м/с}$, $\sigma_{v_1} = 3 \text{ м/с}$, $\sigma_{v_2} = 3 \text{ м/с}$; б – $\sigma_{v_0} = 10 \text{ м/с}$, $\sigma_{v_1} = 6 \text{ м/с}$, $\sigma_{v_2} = 6 \text{ м/с}$; в –

$$\sigma_{V_0} = 5 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 3 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 3 \text{ м/с}, \text{ а также на } 5\% \text{ смещено среднее значение } V_0; \varepsilon - \\ \sigma_{V_0} = 5 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 3 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 3 \text{ м/с}.$$

На рисунке 13 (з) приведена реализация той же оценки до момента пересечения линии базы, после чего величина β рассчитывалась путем интегрирования измеряемых доплеровских сдвигов $\Delta f_1, \Delta f_2$ частоты несущего навигационного сигнала в соответствии с выражениями (2) и

$$\beta(T) = 1 + \frac{1}{2c} \int_0^T (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) dt, \quad (40)$$

где T – время окончания интегрирования.
Выражение (40) получено путем интегрирования выражения

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{d}_1 + \dot{d}_2}{2c},$$

являющегося в свою очередь производной по времени от первого выражения в (3).

Оценка, получаемая с помощью выражения (40), может быть описана различными моделями. Например, величину β можно представить в виде процесса броуновского движения с коэффициентом сноса, зависящим от времени [15]:

$$dX(t) = \mu(t) dt + \chi^2 dW_t, \quad (41)$$

где $\mu(t)$ – коэффициент сноса;
 χ^2 – коэффициент диффузии;
 $\delta W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

При этом для момента времени T решение уравнения (41) примет вид

$$X(T) = X_0 + \int_0^T \mu(\tilde{t}) d\tilde{t} + \chi^2 W(t), \quad (42)$$

где X_0 – стартовая точка процесса в начальный момент времени.

Если предполагается нормальность плотности распределения вероятности шумов оценок $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, то выражение (40) в соответствии с моделью (41) можно записать в виде

$$\beta(T) = 1 + \frac{1}{2c} \int_0^T (V_1(t) + V_2(t) + \xi_V(t)) dt, \quad (43)$$

где $\xi_V(t) = \xi_{V_1}(t) + \xi_{V_2}(t)$ – суммарный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией $\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2$.

В таком случае интеграл в выражении (43) распадается на сумму двух интегралов, один из которых описывает суммарную дальность, а второй характеризует случайное отклонение в виде винеровского процесса:

$$\beta(T) = 1 + \frac{1}{2c} \int_0^T (V_1(t) + V_2(t)) dt + \frac{1}{2c} \int_0^T \xi_V(t) dt \quad (44)$$

Тогда, в соответствии с выражением (42) величина β примет среднее значение

$$M_p(T) = \frac{d_1(T) + d_2(T)}{2c} \quad (45)$$

и дисперсию

$$\sigma_p^2(T) = \frac{(\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2)}{4c^2} T. \quad (46)$$

Реальные оценки среднего и дисперсии, получаемые по формулам (45) и (46) будут иметь некоторое смещение вследствие неучтенной погрешности оценки момента времени пересечения линии базы объектом, при котором начинается интегрирование суммарной дальности. Эта проблема в рамках данной работы не рассматривалась.

Заключение

Данный способ оценивания дальности был получен для решения задачи радиоуправления подвижным средством с целью его выведения в окрестность заданной точки вдоль линии положения в виде гиперболы, порождаемой измеряемой на борту разностью дальностей до двух навигационных позиций. Такая постановка задачи обеспечивает возможность навигации в пассивном режиме в разностно-дальномерной навигационной системе в случае отсутствия требуемого объема информации для решения полной системы навигационных уравнений. При этом при движении управляемого средства вблизи базы навигационной системы возникает динамическая ошибка, степень компенсации которой зависит от точности оценивания суммарной дальности.

Проведенное компьютерное моделирование подтвердило возможность оценивания суммарной дальности предлагаемым способом, а также позволило оценить различные ее статистические моменты. Оценка выборочного среднего и выборочной дисперсии оказались довольно близкими к теоретическим значениям, полученным в соответствии с приведенной в статье методикой. На основании представленных зависимостей можно заключить, что приведенный способ оценивания суммарной дальности подходит для случая расположения подвижного средства вблизи базы навигационной системы, поскольку по мере его удаления от линии базы оценки дальности становятся все более смещенной. Более того различные статистические моменты, в частности дисперсия, асимметрия, эксцесс также стремительно возрастают, что приводит к невозможности получения адекватных оценок суммарной дальности. Точность получаемой оценки также напрямую зависит от скорости движения приемника навигационного сигнала и точности измерений доплеровских сдвигов частоты и собственной скорости движения.

Список использованных источников:

1. Groves P. D. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, 2nd ed., Artech House, 2013.
2. Легкоступ В.В., Шабан С.А., Маркевич В.Е. Методика синтеза устройства управления по методу аналитического конструирования оптимального регулятора для задачи наведения летательного аппарата вдоль гиперболы. Доклады БГУИР 2022; 20(1).
3. Легкоступ В.В., Маркевич В.В. Уравнения кинематики беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат при наведении по разностно-дальномерной навигационной информации. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(1):12-20.
4. Легкоступ В.В. Методика определения кинематической связи между управляющими летательным аппаратом ускорениями и его эллиптическими координатами в альтернативном представлении. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(3):15-24.
5. Легкоступ В.В., Маркевич В.Э. Методика определения дальности до объекта в разностно-дальномерной навигационной системе по доплеровским смещениям частоты. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021;(4):40-46.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк.. 1998. – 576 с.
7. Hinkley D.V. On the Ratio of Two Correlated Normal Random Variables. *Biometrika*, Vol. 56 (3), 1969, pp. 635–639.
8. Díaz-Francés, Eloísa; Rubio, Francisco J. On the existence of a normal approximation to the distribution of the ratio of two independent normal random variables. *Statistical Papers. Springer Science and Business Media LLC*. 54 (2): 309–323.
9. Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 1, 2nd Edition. John Wiley, New York, 1994.
10. Закс, Л. Статистическое оценивание / Л. Закс. - М.: Статистика, 1976. - 600 с.
11. Burr, Cumulative Frequency Functions. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 13, No. 2, 1942, pp. 215-232.
12. Okasha MK, Matter MY (2015) On the Three-Parameter Burr Type XII Distribution and its Application to Heavy Tailed Lifetime Data. *Journal: Journal of Advances in Mathematics*. 10: 3429- 3442.
13. Roth M., Ozkan E., Gustafsson F. A Student's t-filter for heavytailed process and measurement noise, "2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing", Vancouver, BC, 2013, pp. 5770-5774.
14. Quanxi Shao. "Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution". *Computational Statistics and Data Analysis* 45(3), pp.675-687, 2004
15. Allen E. *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Vol. 22. Springer ScienceBusiness Media, 2007.

UDC 629.056

METHOD FOR ESTIMATION OF BISTATIC RANGE IN BISTATIC TDOA NAVIGATION SYSTEM BY USING DOPPLER MEASUREMENTS

Legkostup Victor

JSC "ALEVKURP"

Korolev Stan village, Minsk region, Republic of Belarus

Markevich V.E. – PhD in Technical Sciences

Annotation. A method for estimating the bistatic range from a moving object to two navigation points using time difference of arrival and Doppler measurements was considered. It was used to solve the problem of synthesizing a radio control loop for a moving object according to the data of navigation system used time difference of arrival method in conditions of a limited amount of navigation information. An expression for estimating bistatic range between an object and two navigation points was obtained. Also the main statistical characteristics of the estimated bistatic range were considered.

Keywords. Bistatic navigation system, time-difference of arrival navigation, Doppler navigation, hyperbole guidance, bistatic range measurement, elliptical coordinate system, statistical characteristics, Burr distribution, unmanned aerial vehicle.