

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет инфокоммуникаций

Кафедра защиты информации

Г. А. Власова, Я. В. Рощупкин

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей
1-45 01 01 «Инфокоммуникационные технологии (по направлениям)»,
1-45 01 02 «Инфокоммуникационные системы (по направлениям)»,
1-98 01 02 «Защита информации в телекоммуникациях»*

Минск БГУИР 2022

УДК 621.391(076)
ББК 32.88-01я73
В58

Рецензенты:

кафедра связи
учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №12 от 01.02.2021);

кафедра телекоммуникационных систем
учреждения образования «Белорусская государственная академия связи»
(протокол №6 от 04.02.2021);

заведующий лабораторией микро- и наносенсорики
государственного научно-производственного объединения
«Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»
доктор технических наук, профессор Н. И. Мухуров

Власова, Г. А.

В58 Теория электрической связи. Лабораторный практикум : пособие /
Г. А. Власова, Я. В. Рощупкин. – Минск : БГУИР, 2022. – 128 с. : ил.
ISBN 978-985-543-648-6.

Содержит восемь лабораторных работ по исследованию инфокоммуникационных сигналов, их спектров и статистических характеристик, особенностей передачи аналоговых сигналов по цифровым каналам связи, а также методов оптимального приема. Каждая лабораторная работа содержит теоретический материал, порядок выполнения работы и контрольные задания.

УДК 621.391(076)
ББК 32.88-01я73

ISBN 978-985-543-648-6

© Власова Г. А., Рощупкин Я. В., 2022
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2022

Содержание

Лабораторная работа №1. Спектральный анализ элементарных сигналов	4
Краткие теоретические сведения	4
Порядок выполнения лабораторной работы	28
Контрольные задания	29
Лабораторная работа №2. Спектральный анализ модулированных сигналов	30
Краткие теоретические сведения	30
Порядок выполнения лабораторной работы	56
Контрольные задания	57
Лабораторная работа №3. Восстановление сигналов по дискретным отсчетам. Теорема Котельникова	58
Краткие теоретические сведения	58
Порядок выполнения лабораторной работы	64
Контрольные задания	66
Лабораторная работа №4. Импульсно-кодовая модуляция	67
Краткие теоретические сведения	67
Порядок выполнения лабораторной работы	71
Контрольные задания	73
Лабораторная работа №5. Исследование законов распределения мгновенных значений случайных сигналов	74
Краткие теоретические сведения	74
Порядок выполнения лабораторной работы	87
Контрольные задания	88
Лабораторная работа №6. Исследование прохождения случайных сигналов через электрические цепи	88
Краткие теоретические сведения	89
Порядок выполнения лабораторной работы	98
Контрольные задания	99
Лабораторная работа №7. Оптимальная линейная фильтрация сигналов. Согласованный фильтр и его характеристики	100
Краткие теоретические сведения	100
Порядок выполнения лабораторной работы	111
Контрольные задания	111
Лабораторная работа №8. Исследование оптимального приема сигналов на фоне помех	112
Краткие теоретические сведения	112
Порядок выполнения лабораторной работы.....	125
Контрольные задания	126
Список использованных источников	127

Лабораторная работа №1 Спектральный анализ элементарных сигналов

Цель работы: экспериментально исследовать спектры элементарных сигналов систем инфокоммуникаций, изучить взаимосвязь параметров сигналов во временной области с параметрами спектров сигналов.

Краткие теоретические сведения

В теории электрической связи передача сообщений, а следовательно, и информации, осуществляется посредством материального носителя или физического процесса, который называется сигналом.

Сигналы формируются путем изменения тех или иных параметров физического носителя по закону передаваемых сообщений. Как правило, в современных системах управления и связи применяются электрические сигналы и электромагнитные волны.

Сигналы можно изучать с помощью приборов и устройств. Однако такой эмпирический метод имеет существенный недостаток, поскольку наблюдаемые явления являются частными, единичными проявлениями. Поэтому при таком подходе невозможно судить о фундаментальных свойствах сигналов, анализировать их и предсказывать их поведение в изменившихся условиях.

Чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчетов, следует создать **математическую модель исследуемого сигнала**, которая позволит абстрагироваться от конкретной природы носителя сигнала. При этом, зная математические модели сигналов, можно сравнить эти сигналы между собой, определить их тождество и различие, провести классификацию сигналов.

Большинство реальных сигналов сложно выразить в виде простой математической формулы. Пример такого сигнала приведен на рисунке 1.1.

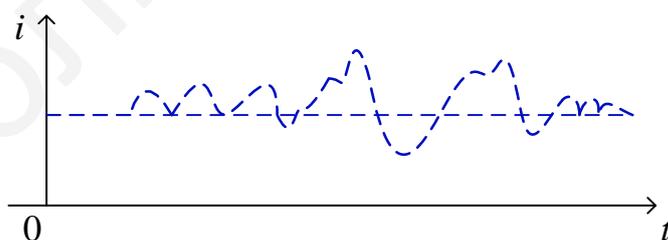


Рисунок 1.1 – Речевой сигнал (ток проходит на выходе микрофона)

Для анализа таких сигналов их представляют в виде суммы элементарных (простых) функций $\psi_k(t)$, называемых базисными:

$$S(t) = a_0\psi_0(t) + a_1\psi_1(t) + \dots + a_k\psi_k(t) + \dots,$$

где a_k – коэффициенты разложения, зависящие от сигнала $S(t)$.

В качестве базисных выбирают различные системы ортогональных нормированных функций.

Два сигнала $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\psi_1(t), \psi_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) \psi_2(t) dt = 0. \quad (1.1)$$

В качестве нормы сигнала $S(t)$ чаще всего выбирают число

$$\|S(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (s(t))^2 dt}, \quad (1.2)$$

при этом из двух возможных значений корня выбирается положительное значение.

Если норма функции определена согласно (1.2), ее квадрат является энергией сигнала E_s :

$$\|S(t)\|^2 = E_s = \int_{-\infty}^{\infty} (s(t))^2 dt. \quad (1.3)$$

Такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его выводы подать напряжение, имеющее вид сигнала $S(t)$.

В пространстве сигналов задан **ортонормированный базис**, если на отрезке времени $[t_1, t_2]$ (конечном или бесконечном) задана бесконечная система функций $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots\}$, взаимно ортогональных и имеющих единичные нормы:

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.4)$$

Представление произвольного сигнала $S(t)$ в виде ряда

$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(t) \quad (1.5)$$

называется **обобщенным рядом Фурье** сигнала в выбранном базисе.

Рассмотрим порядок определения коэффициентов a_i ряда Фурье. Сначала умножим на любую базисную функцию $\psi_k(t)$ обе части предыдущего равенства, а после проинтегрируем их по времени [4]. Поскольку базис ортонормированный,

по определению в правой части полученного равенства отличен от нуля лишь член суммы с номером $i = k$. Поэтому **коэффициенты обобщенного ряда Фурье** вычисляются по формуле

$$a_{i=k} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \psi_k(t) dt = (S(t), \psi_k(t)). \quad (1.6)$$

Представление сигналов в виде обобщенного ряда Фурье имеет **огромное принципиальное значение** для теории электрической связи. Вместо необходимости исследования функции, описывающей сигнал $S(t)$, в *несчетном* множестве точек достаточно задать сигнал *счетным* (но теоретически бесконечным) множеством коэффициентов обобщенного ряда Фурье a_k [4].

Рассмотрим сигнал $S(t)$, представленный в виде ряда (1.5). Вычислим энергию этого сигнала, для чего подставим (1.5) в (1.3). Система базисных функций ортонормированна, следовательно, в соответствии с (1.4)

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2. \quad (1.7)$$

Это равенство получило название **равенства Парсеваля**. Таким образом, энергия сигнала равна сумме энергий всех слагаемых обобщенного ряда Фурье [4].

На практике количество членов ряда (1.5) ограничивают некоторым конечным числом N , и бесконечномерный ряд становится конечным:

$$S(t) \approx a_0 \psi_0(t) + a_1 \psi_1(t) + \dots + a_N \psi_N(t).$$

При этом возникает погрешность аппроксимации сигнала усеченным рядом Фурье. В качестве погрешности удобно выбрать квадрат метрики (квадрат нормы разности двух сигналов):

$$\beta^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{i=0}^N a_i \psi_i(t) \right]^2 dt. \quad (1.8)$$

В этом случае погрешность представляет собой разность энергий сигнала и его аппроксимации в виде усеченного ряда.

Свойства обобщенного ряда Фурье:

1. Обобщенный ряд Фурье может обеспечить любую заданную погрешность аппроксимации. То есть, выбирая значение N достаточно большим, можно снизить ошибку до любой приемлемой величины.

2. Путем увеличения количества членов разложения N погрешность аппроксимации можно уменьшить без изменения предыдущих членов ряда.

3. Можно показать, что при заданном базисе и фиксированном числе слагаемых обобщенный ряд Фурье обеспечивает минимальную погрешность β^2 , т. е. обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки [3].

Коэффициенты разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций $u_i(t)$ можно определить экспериментально. Структурная схема устройства, реализующего определение коэффициентов разложения сигнала в ряд Фурье, показана на рисунке 1.2.

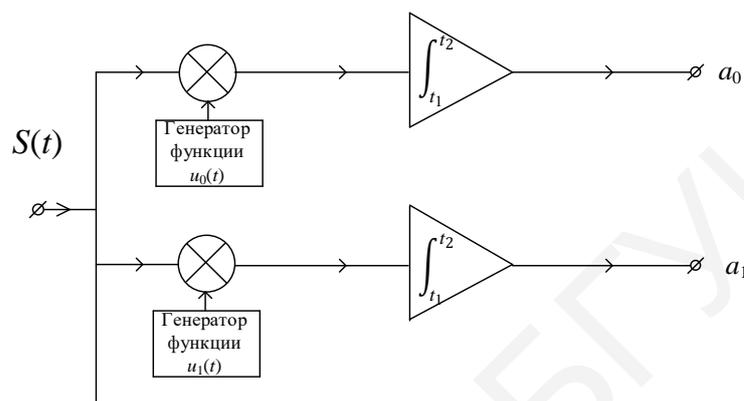


Рисунок 1.2 – Структурная схема устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье

На выходе i -го интегратора по окончании времени интегрирования, которое соответствует длительности сигнала, возникает постоянный уровень напряжения, величина которого равна i -му коэффициенту обобщенного ряда Фурье [4]. Схема подтверждает, что всю информацию, содержащуюся в сигнале, можно представить в виде бесконечного, но счетного множества чисел a_i .

В качестве базисных применяют различные функции.

При обработке аналоговых сигналов наиболее часто применяются гармонические функции (синусоидальные и косинусоидальные). Это обусловлено, во-первых, простотой их генерирования. Во-вторых, гармонические сигналы не меняют своей формы при прохождении через линейные цепи. Иначе говоря, гармонические сигналы инвариантны относительно функциональных преобразований, реализуемых линейными электрическими цепями. Если на вход цепи подать гармоническое колебание, то сигнал на ее выходе останется гармоническим с неизменной частотой (в общем случае отличаясь от входного сигнала только значениями амплитуды и начальной фазы) [4].

Базисные функции часто выбирают таким образом, чтобы заданная погрешность аппроксимации была обеспечена при минимальном количестве членов ряда Фурье. В этом случае используют различные типы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева, Лагерра и др.) [3].

В случае обработки сигналов электронно-вычислительными машинами в качестве базисных функций используют функции Уолша, Хаара и др. [3].

Представление сигнала в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами называется разложением по частоте или спектральным разложением сигнала [4]. Множество значений амплитуд и фаз гармонических составляющих на различных частотах носит название спектра сигнала.

На основе гармонических функций разработан и получил широкое распространение спектральный метод анализа электрических сигналов и цепей.

Рассмотрим спектральное представление периодических сигналов.

Периодическим называется сигнал $S(t)$, для которого справедливо следующее свойство:

$$S(t) = S(t \pm nT), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

где T – период повторения сигнала (период сигнала).

Примеры периодических сигналов показаны на рисунке 1.3.

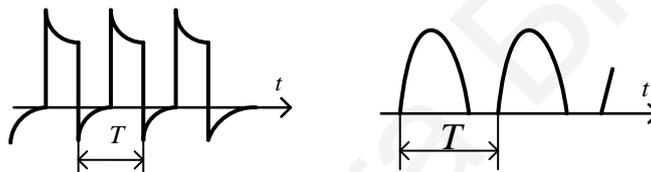


Рисунок 1.3 – Примеры периодических сигналов

Выберем в качестве ортонормированного базиса следующие гармонические функции:

$$u_0(t) = 1/\sqrt{T};$$

$$u_1(t) = \sqrt{(2/T)} \sin \frac{2\pi t}{T};$$

$$u_2(t) = \sqrt{(2/T)} \cos \frac{2\pi t}{T};$$

$$u_3(t) = \sqrt{(2/T)} \sin \frac{4\pi t}{T};$$

$$u_4(t) = \sqrt{(2/T)} \cos \frac{4\pi t}{T}.$$

Несколько первых гармонических базисных функций приведены на рисунке 1.4.

Используя формулы (1.1) и (1.2), можно показать, что на отрезке $[0, T]$ (или $[-T/2, T/2]$) рассмотренная система тригонометрических функций u_n с кратными частотами, включая постоянный сигнал, образует ортонормированный базис.

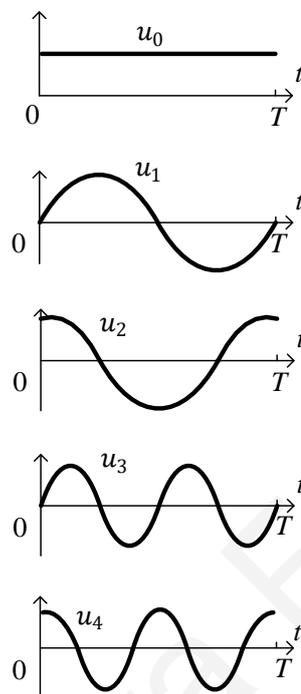


Рисунок 1.4 – Базисные гармонические функции

Все функции u_n из рассматриваемого базиса удовлетворяют условию (1.9) для периодических сигналов.

Вычислим коэффициенты обобщенного ряда Фурье для спектрального разложения сигнала $S(t)$ в базисе ортонормированных гармонических функций:

$$a_n = (S(t), u_n(t)). \quad (1.10)$$

Тогда сигнал $S(t)$ можно представить как

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t) \quad (1.11)$$

на всей бесконечной оси времени.

Формула (1.11) называется рядом Фурье сигнала $S(t)$.

Введем понятие основной частоты (или первой гармоники) периодического сигнала:

$$\omega_1 = 2\pi / T. \quad (1.12)$$

Вычислим коэффициенты разложения по формуле (1.10). Тогда получим ряд Фурье для периодического сигнала в следующем виде:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (1.13)$$

При этом коэффициенты имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt; \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\omega_1 t dt; \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\omega_1 t dt. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Спектр периодического сигнала содержит постоянную составляющую и бесконечную совокупность гармонических колебаний, которые называются гармониками. Частоты гармоник $\omega_n = n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) кратны основной частоте ω_1 [4].

Если сигнал $S(t)$ обладает свойством четности, то все коэффициенты b_n ряда обращаются в нули. Аналогично у нечетного сигнала $S(t)$ в нули обращаются коэффициенты a_n . И только в случае, если $S(t)$ не обладает ни свойством четности, ни нечетности, в разложении сохраняются и косинусоидальные, и синусоидальные компоненты.

Сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами, но различными начальными фазами представляет собой также гармоническое колебание.

Следовательно, гармонику можно задать, если указать значение ее амплитуды A_n и начальной фазы φ_n . Если коэффициенты ряда Фурье представить в виде

$$\begin{array}{l} a_n = A_n \cos \varphi_n; \\ b_n = A_n \sin \varphi_n, \end{array} \quad (1.15)$$

то

$$A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}; \quad (1.16)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}. \quad (1.17)$$

Подставим значения (1.15) в формулу ряда Фурье для периодического сигнала (1.13). Тогда можно записать эквивалентную (1.13) компактную формулу ряда Фурье для периодического сигнала:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (1.18)$$

удобную тем, что коэффициенты A_n при необходимости могут быть непосредственно измерены как амплитудные значения соответствующих гармоник.

Графическое изображение коэффициентов ряда Фурье называется спектральной диаграммой сигнала, совокупность амплитуд A_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) – амплитудным спектром, совокупность фаз φ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) – фазовым спектром сигнала. Постоянная составляющая имеет вид

$$A_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (1.19)$$

Спектральные диаграммы периодического сигнала приведены на рисунке 1.5.

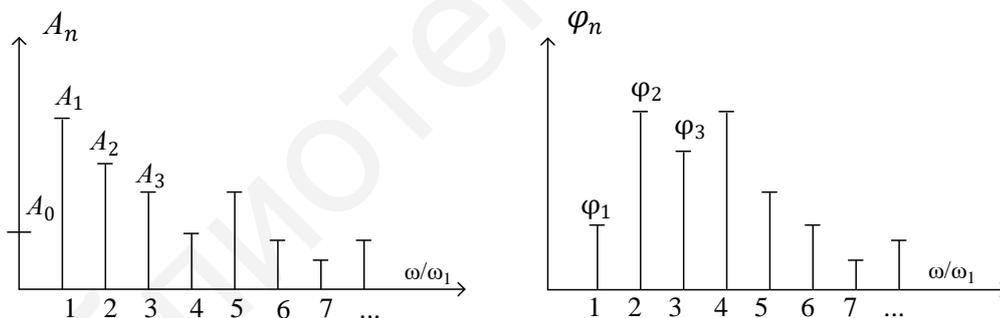


Рисунок 1.5 – Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала в базисе тригонометрических функций

Из (1.13) и (1.18) следует, что у периодического сигнала спектр состоит из бесконечного набора гармонических составляющих, частоты которых образуют дискретный ряд гармоник $n\omega_1$. Такой спектр получил название дискретного или линейчатого [1, 3].

Например, вычислим коэффициенты ряда Фурье периодической последовательности знакопеременных прямоугольных видеоимпульсов (меандра), нечетной относительно точки $t = 0$. Вид сигнала в виде меандра приведен на рисунке 1.6.

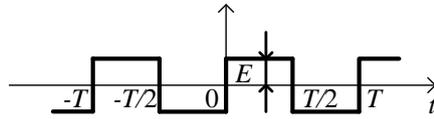


Рисунок 1.6 – Последовательность знакопеременных прямоугольных видеоимпульсов (меандр)

Поскольку сигнал нечетный, то

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

Можно показать, что

$$b_1 = 4E / \pi, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 4E / (3\pi), \quad b_4 = 0 \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$S(t) = (4E / \pi) (\sin(\omega_1 t) + (1/3) \sin(3\omega_1 t) + (1/5) \sin(5\omega_1 t) + \dots).$$

Коэффициенты компактной формы тригонометрического ряда Фурье

$$A_n = b_n, \quad \varphi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{0}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Если $E = 1$ В, то амплитудный спектр последовательности знакопеременных прямоугольных видеоимпульсов (меандра) имеет вид, показанный на рисунке 1.7 [3].

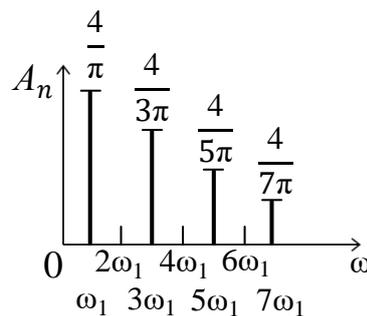


Рисунок 1.7 – Амплитудный спектр последовательности знакопеременных прямоугольных видеоимпульсов тригонометрического ряда Фурье (меандра)

На рисунке 1.8, *а* приведены графики первой ($n = 1$) и третьей гармоник ($n = 3$), а также их суммы (сплошная кривая). На рисунке 1.8, *б* сумма первой и третьей гармоник дополнена пятой гармоникой, на рисунке 1.8, *в* – седьмой [3].

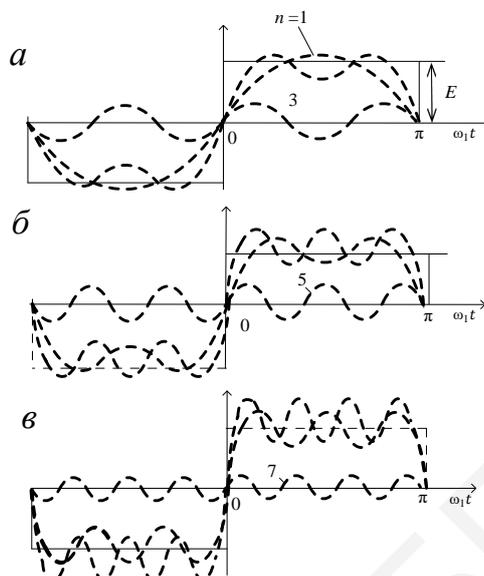


Рисунок 1.8 – Суммирование первой ($n = 1$) и третьей ($n = 3$) гармоник (*а*); первой, третьей и пятой гармоник (*б*); первой, третьей, пятой и седьмой гармоник (*в*) последовательности знакопеременных прямоугольных видеоимпульсов (меандра)

Из рисунка 1.8 следует, что с увеличением числа суммируемых гармоник, их сумма все более близка к сигналу, приведенному на рисунке 1.6.

Спектральное разложение периодического сигнала можно осуществить также в базисе ортонормированных функций, состоящем из экспонент с мнимыми показателями следующего вида:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.20)$$

Рассмотрев скалярное произведение комплексных функций (u_m, u_n), можно показать, что функции данной системы периодичны с периодом T и ортонормированы на отрезке времени $[-T/2, T/2]$.

Получаем показательную форму записи ряда Фурье или ряд Фурье в комплексной форме:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}; \quad (1.21)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.22)$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме задает дискретный спектр сигнала в базисе экспоненциальных функций. Особенностью данного спектра является то, что в соответствии с (1.21) он включает составляющие на отрицательной полуоси частот. Согласно (1.22) $C_{-n} = C_n^*$.

Установим взаимосвязь между рядом Фурье в комплексной форме с рядом Фурье в базисе гармонических функций. Для этого воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos(n\omega_1 t) = (\exp[j(n\omega_1 t)] + \exp[-j(n\omega_1 t)]) / 2; \quad (1.23)$$

$$\sin(n\omega_1 t) = (\exp[j(n\omega_1 t)] - \exp[-j(n\omega_1 t)]) / 2j. \quad (1.24)$$

Подставим (1.23) и (1.24) в (1.13) и учтем, что a_n – функция четная, т. е. $a_n = a_{-n}$, а b_n – нечетная, т. е. $b_n = -b_{-n}$. Тогда получим

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \exp[j(n\omega_1 t)] + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \exp[j(n\omega_1 t)]. \quad (1.25)$$

Сравнив (1.25) и (1.21), имеем

$$C_n = 1/2(a_n - jb_n); \quad (1.26)$$

$$|C_n| = \frac{1}{2} A_n; \quad (1.27)$$

$$\arg C_n = -\varphi_n. \quad (1.28)$$

Отрицательные частоты физического смысла не имеют. Их появление является следствием применения математической модели тригонометрических функций в виде совокупности показательных функций с мнимым аргументом.

Спектр сигнала, описываемого рядом Фурье в комплексной форме, называется двусторонним или теоретическим и представляется в виде, показанном на рисунке 1.9.

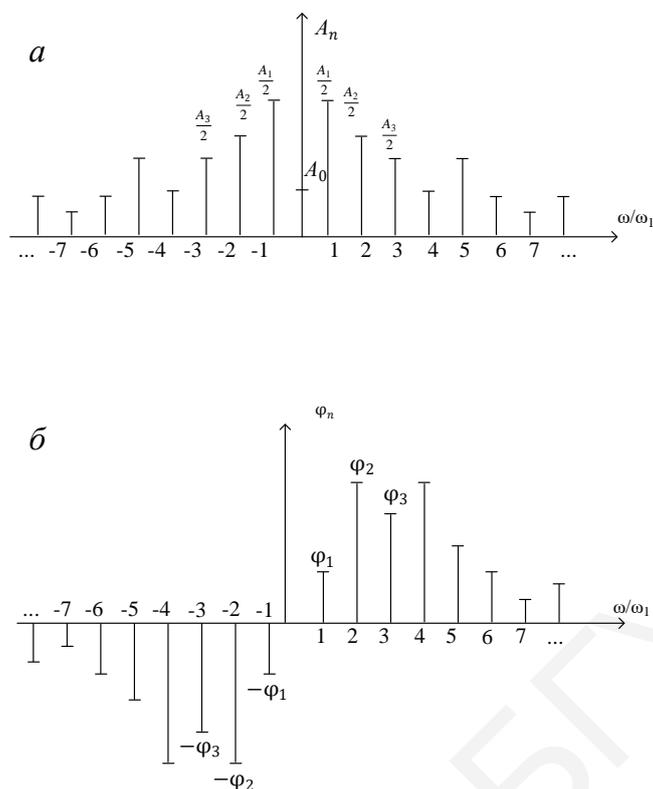


Рисунок 1.9 – Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры сигнала, описываемого рядом Фурье в комплексной форме

Различие между физическим и теоретическим спектрами показано на рисунках 1.5 и 1.9.

Представление периодического сигнала рядом Фурье в комплексной форме позволяет изобразить сигнал в виде бесконечной суммы вращающихся векторов на комплексной плоскости [4]. В этом случае сигнал можно представить следующим образом. Из начала координат (точка 0) на действительной оси изображают вектор C_0 . Предположим, что $t = 0$ и найдем векторные суммы:

$$C_+ = C_1 + C_2 + C_3 \dots;$$

$$C_- = C_{-1} + C_{-2} + C_{-3} \dots$$

Вектор C_+ соответствует составляющим с положительными, а C_- – с отрицательными частотами. Когда ряд Фурье сходится, каждая из сумм представляет собой вектор конечной длины. Поскольку коэффициенты ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами комплексно сопряжены, их векторная сумма ($C_+ + C_-$) вещественна. Сложив ее с постоянной составляющей C_0 , получим вектор, длина которого равна величине сигнала в начальный момент времени $S(0)$.

С течением времени t векторы C_1, C_2, \dots , соответствующие положительным частотам, вращаются с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots$, равными $2\omega_1, 2\omega_2, \dots$,

в сторону увеличения фазового угла (против часовой стрелки), а векторы C_{-1} , C_{-2} , ..., соответствующие отрицательным частотам, вращаются в обратном направлении (по часовой стрелке).

Результирующий вектор указывает значение сигнала в каждый момент времени, как показано на рисунке 1.10.

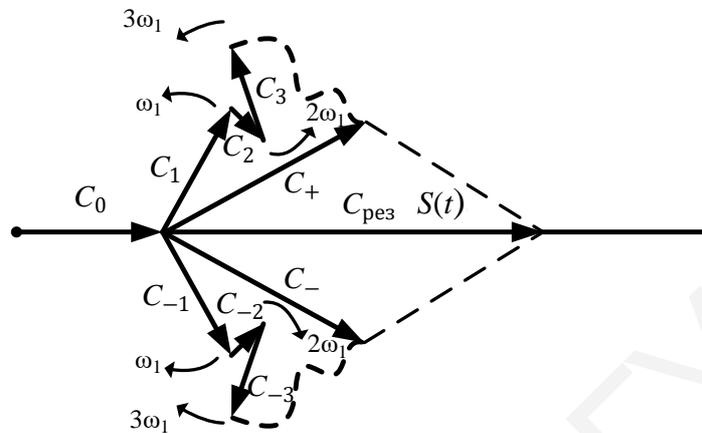


Рисунок 1.10 – Графическое изображение ряда Фурье в базисе экспоненциальных функций

Для любого сигнала можно найти множество различных спектров. Их число определяется количеством разных систем базисных функций, которое может быть найдено.

В зависимости от выбора базисных функций спектр сигнала будет выглядеть по-разному.

Метод рядов Фурье можно также распространить на спектральные характеристики непериодических сигналов.

Одиночный сигнал конечной длительности $S(t)$ можно представить как периодический сигнал, у которого период $T \rightarrow \infty$. Соответствующие сигналы приведены на рисунке 1.11.

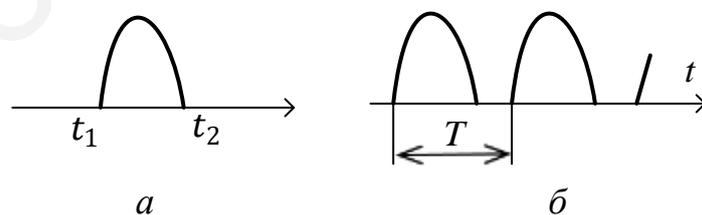


Рисунок 1.11 – Одиночный сигнал (а); периодический сигнал (б)

При этом основная частота $\omega_1 = 2\pi / T$ уменьшается до бесконечно малой величины [1]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega.$$

Соответственно, расстояние между спектральными компонентами уменьшается до бесконечно малой величины, и спектр сигнала становится сплошным. Значения $k\omega_1$ становятся текущими значениями частоты ω , т. е. дискретный аргумент $k\omega_1$ обращается в непрерывный ω , а интервал разложения T становится бесконечным [1].

Поэтому в пределе при вычислении ряда Фурье в комплексной форме следует знак суммы заменить знаком интеграла, основную частоту $\omega_1 = 2\pi / T$ заменить на $d\omega$, а кратную частоту $k\omega_1$ – текущей частотой ω [1]. Получим

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.29)$$

где $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность, которая определяется по формуле

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.30)$$

Спектральная плотность представляет собой комплексную функцию частоты, которая содержит информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид:

$$S(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega)). \quad (1.31)$$

Модуль спектральной плотности называется амплитудным спектром сигнала или амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) спектральной плотности сигнала, а аргумент спектральной плотности – фазовым спектром сигнала или фазочастотной характеристикой (ФЧХ) спектральной плотности сигнала.

Вещественная часть спектральной плотности есть четная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega). \quad (1.32)$$

Мнимая часть спектральной плотности есть нечетная функция частоты:

$$B(\omega) = -B(-\omega). \quad (1.33)$$

Вещественную и мнимую части спектральной плотности, а также АЧХ и ФЧХ рассчитывают следующим образом:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos \omega t dt; \quad (1.34)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt; \quad (1.35)$$

$$|S(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}; \quad (1.36)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(B(\omega) / A(\omega)). \quad (1.37)$$

В отличие от периодического сигнала, для которого дискретными являются как амплитудный, так и фазовый спектры, у непериодического сигнала $S(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ являются непрерывными функциями.

Если размерность сигнала $S(t)$ измеряется в вольтах (В), то размерность его спектральной плотности – в вольтах на герцы (В/Гц).

Преобразование (1.30) называется прямым преобразованием Фурье, а преобразование (1.29) – обратным преобразованием Фурье.

Прямое преобразование представляет собой математическую модель сигнала в частотной области, а обратное – во временной области.

Спектральное представление сигналов имеет важное значение для теории и значительно упрощает анализ сигналов.

В частности, во многих случаях математическая модель сигнала во временной области $S(t)$ имеет сложный вид. При этом представление этого же сигнала в частотной области $S(\omega)$ является наглядным и простым.

Кроме того, на спектральном представлении сигналов основываются широко применяемые методы анализа прохождения сигналов через различные устройства и системы [4].

Рассмотрим теоремы о спектрах.

1. Теорема о свойствах линейности.

Пусть имеется некоторое множество сигналов $S_1(t), S_2(t), \dots$, причем сигналу $S_1(t)$ соответствует спектральная плотность $S_1(j\omega)$, сигналу $S_2(t)$ – $S_2(j\omega)$ и т. д. Тогда взвешенной сумме сигналов

$$\sum_i a_i S_i(t) \quad (1.38)$$

соответствует спектральная плотность

$$\sum_i a_i S_i(j\omega), \quad (1.39)$$

где a_i – произвольные числовые коэффициенты.

То есть спектральная функция суммы сигналов равна сумме спектральных функций отдельных сигналов.

2. Теорема о сдвигах (спектральная функция сигнала, смещенного во времени).

Предположим, что сигналу $S(t)$ соответствует спектральная плотность $S(j\omega)$.

Рассмотрим такой же сигнал, но смещенный на t_0 секунд в сторону запаздывания, и обозначим его $S(t-t_0)$. Сигнал $S(t)$ и смещенный во времени сигнал $S(t-t_0)$ изображены на рисунке 1.12.

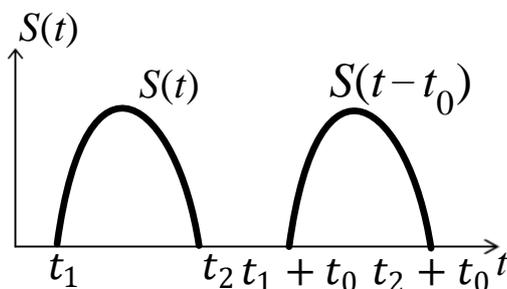


Рисунок 1.12 – Сигнал $S(t)$ и смещенный во времени сигнал $S(t-t_0)$

Подставим в (1.30) $S(t-t_0)$ и сделаем замену переменной $t-t_0=x$, тогда $t=t_0+x$, $dt=dx$. Получим, что сигналу $S(t-t_0)$ соответствует спектральная плотность

$$S(j\omega)\exp(-j\omega t_0). \quad (1.40)$$

Очевидно, что модуль комплексного числа $\exp(-j\omega t_0)$ равен единице при любых значениях t_0 . Следовательно, амплитудный спектр сигнала не зависит от его положения на оси времени. Информация о положении сигнала на временной оси содержится в его фазовом спектре.

Таким образом, сдвиг (смещение) сигнала во времени на величину $\pm t_0$ изменяет его фазовую характеристику на величину $\pm\omega t_0$, при этом модуль спектральной плотности остается неизменным.

3. Теорема масштабов (спектральная функция сигнала с измененным масштабом времени).

Изменим масштаб времени сигнала $S(t)$. Следовательно, вместо времени t введена новая переменная kt (k – вещественное число). Если $k > 1$, то исходный сигнал сжимается; когда $0 < k < 1$, сигнал растягивается во времени. На рисунке 1.13 $k = \tau_1 / \tau_2$.

Подставим в (1.30) $S(kt)$. С учетом замены переменных

$$kt = x, \quad t = x / k, \quad dt = dx / k,$$

получим, что

$$S(kt) \leftrightarrow (1/k)S(j\omega/k). \quad (1.41)$$

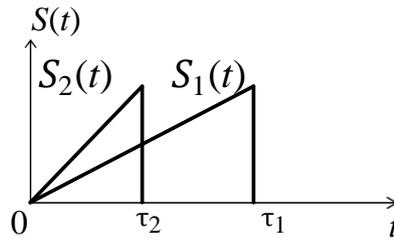


Рисунок 1.13 – Сигнал с измененным масштабом времени

Таким образом, при сжатии сигнала в k раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной плотности при этом уменьшается в k раз [3].

При растягивании сигнала во времени ($k < 1$) имеет место сужение спектра и увеличение модуля спектральной плотности [3].

Следствие теоремы масштабов: чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.

На практике под шириной спектра обычно понимают интервал частот, в пределах которого модуль спектральной плотности принимает значение не меньше некоторого уровня (например, изменяется в пределах от $|S|_{\max}$ до $0,1|S|_{\max}$).

Для сигналов различной формы можно показать, что произведение ширины спектра сигнала на его длительность является постоянным числом. Причем это число определяется формой импульса и обычно имеет порядок единицы [4].

Соотношение (1.41) имеет большое значение, т. к. определяет требования к ширине полосы пропускания устройства связи.

Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего устройства.

Другой пример: короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать качество связи в значительной полосе частот [4].

4. Теорема о спектре производной и неопределенного интеграла.
Пусть сигналу $S(t)$ соответствует спектральная плотность $S(j\omega)$.
Рассмотрим сигнал

$$F(t) = dS(t) / dt$$

и найдем его спектральную плотность $F(j\omega)$.

Можно показать [4], что

$$F(j\omega) = j\omega S(j\omega). \quad (1.42)$$

Таким образом, при дифференцировании сигнала по времени его спектральная плотность умножается на $j\omega$. Поэтому говорят, что число $j\omega$ – это оператор дифференцирования в частотной области.

Как показано на рисунке 1.14, при дифференцировании происходит обострение сигнала.

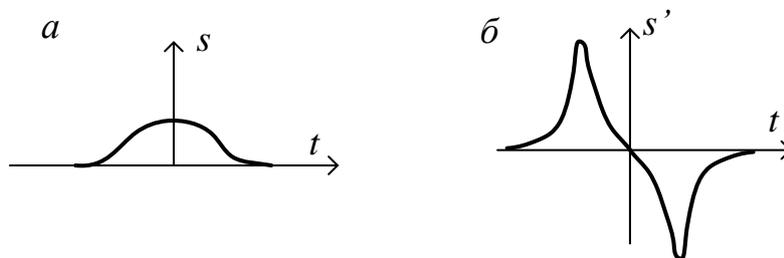


Рисунок 1.14 – Сигнал (а) и его производная (б)

Из рисунка 1.14 видно, что при дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает. Поэтому модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению со спектром исходного сигнала [4].

Рассмотрим вторую часть теоремы. Функция

$$S(t) = \int F(t) dt.$$

Поэтому

$$S(j\omega) = F(j\omega) / j\omega. \quad (1.43)$$

Следовательно, множитель $1/j\omega$ является оператором интегрирования в частотной области.

Поскольку модуль знаменателя в (1.43) линейно растет с увеличением частоты, интегратор ослабляет высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала, т. е. реализовывает функцию фильтра нижних частот. На выходе интегратора присутствует сглаживание входного сигнала, как показано на рисунке 1.15 [4].

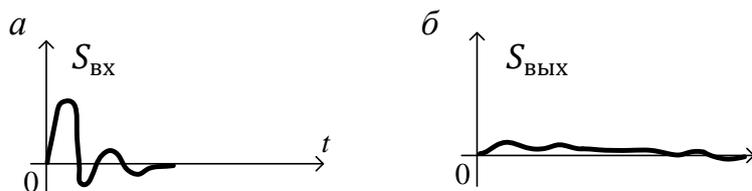


Рисунок 1.15 – Сигнал (а) и проинтегрированный сигнал (б)

5. Теорема о свертке.

Согласно свойству линейности (см. теорему 1), спектр суммы сигналов есть сумма их спектров. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению их спектров.

Рассмотрим два сигнала $u(t)$ и $v(t)$, причем сигналу $u(t)$ соответствует спектр $U(j\omega)$, а сигналу $v(t)$ – спектр $V(j\omega)$. Сформируем сигнал $S(t)$, равный произведению этих сигналов: $S(t) = u(t)v(t)$. Требуется определить спектральную плотность $S(t)$. Для этого подставим $S(t) = u(t)v(t)$ в (1.30), причем сигнал $v(t)$ выразим через его спектральную плотность и изменим порядок интегрирования. Получим

$$S(j\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} V(j\xi)U(j(\omega - \xi))d\xi. \quad (1.44)$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(j\xi)U(j(\omega - \xi))d\xi$$

называют сверткой функций V и U (операция свертки обозначается $V(j\omega)*U(j\omega)$). Следовательно, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя $(1/2\pi)$ есть свертка их спектральных плотностей [4]:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow (1/2\pi)V(j\omega)*U(j\omega). \quad (1.45)$$

Операция свертки коммутативна, т. е. инвариантна относительно изменения порядка следования функций:

$$V(j\omega)*U(j\omega) = U(j\omega)*V(j\omega).$$

Теорема о свертке обратима. То есть если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения спектральных плотностей

$$S(j\omega) = U(j\omega)V(j\omega),$$

то сигнал $S(t)$, которому соответствует $S(j\omega)$, представляет собой свертку сигналов $U(t)$ и $V(t)$ (только не в частотной, а во временной области):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t-\tau)V(\tau)d\tau. \quad (1.46)$$

6. Теорема Планшереля (формула Рэлея): скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей [4]:

$$(u(t), v(t)) = (1/2\pi)(V(j\omega), U(j\omega)). \quad (1.47)$$

Рассмотрим, какими свойствами должна обладать функция $S(t)$ для того, чтобы ее преобразование Фурье существовало. Математически доказано, что сигналу $S(t)$ можно сопоставить его спектральную плотность $S(j\omega)$ в том случае, если этот сигнал абсолютно интегрируем, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt < \infty. \quad (1.48)$$

Условие (1.48) значительно сужает класс допустимых сигналов [4]. Так, данное условие не выполняется для гармонического сигнала, существующего на всей бесконечной оси времени. Однако использование свойств δ -функции позволяет вычислять спектральные плотности неинтегрируемых сигналов.

Часто δ -функцию называют функцией Дирака, единичным импульсом, импульсной функцией, бесконечно коротким импульсом с единичной площадью. Ее можно представить как предел любой четной функции при устремлении ее длительности к нулю и сохранении площади функции, равной единице. В частности, δ -функцию можно представить в виде прямоугольного импульса длительностью τ_n и величиной $1/\tau_n$ при $\tau_n \rightarrow 0$.

Единственным параметром δ -функции является момент ее действия t_0 . В момент t_0 значение функции Дирака равно ∞ , во все остальные моменты времени ее значение равно нулю. При этом интеграл в бесконечных пределах δ -функции по времени равен единице.

Единичный импульс относится к классу так называемых обобщенных функций.

Функция Дирака служит удобной математической моделью действия кратковременного импульса на ту или иную физическую систему. В теории цепей δ -функция описывает воздействие любого короткого импульса на цепь при условии, что время переходных процессов в цепи существенно превышает длительность импульса.

Основное свойство δ -функции называют фильтрующим (или стробирующим): для произвольного сигнала $S(t)$ справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\delta(t-t_0)dt = S(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = S(t_0). \quad (1.49)$$

Так как δ -функция по определению равна нулю на всей оси времени, кроме точки $t = t_0$, то пределы интегрирования фактически совпадают с точкой t_0 . В этой точке функция $S(t)$ принимает постоянное значение $S(t_0)$, которое можно вынести за знак интеграла. Следовательно, при умножении функции $S(t)$ на $\delta(t - t_0)$ интеграл произведения равен значению $S(t)$ в точке $t = t_0$ [3].

Графически δ -функцию принято изображать в виде вертикального вектора с началом в точке t_0 .

Спектральная плотность δ -функции равна

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\exp(-j\omega t)dt = \\ &= \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = \exp(-j\omega t_0). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Модуль этой функции равен единице, а фазовая характеристика

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0.$$

Следует отметить, что при сокращении длительности $\tau_{и}$ прямоугольного импульса неизменной амплитуды ширина основного лепестка спектральной плотности увеличивается, а значение спектральной плотности на нулевой частоте $S(0)$ уменьшается. В случае δ -функции уменьшение длительности импульса приводит к увеличению его амплитуды, а значение спектральной плотности при этом остается неизменным и равным $S(0) = 1$ для всех частот [3]. В частном случае при $t_0 = 0$ $S(\omega) = 1$, а $\varphi(\omega) = 0$.

Со спектральной точки зрения δ -функцию можно представить как сумму бесконечного количества косинусоид единичной амплитуды при нулевых начальных фазах с частотами, образующими непрерывный ряд в бесконечной полосе частот. При этом образуется пик бесконечно большой величины в момент t_0 .

Энергия δ -функции бесконечно велика. Это следует из того, что энергия импульса пропорциональна квадрату его амплитуды (величине $1/\tau_{и}^2$) и длительности $\tau_{и}$, т. е. с укорочением энергия импульса растет на $1/\tau_{и}$. При $\tau_{и} \rightarrow 0$ энергия становится бесконечно большой величиной.

Правая часть равенства $S(\omega) = 1$ является размерной величиной: это площадь импульса, численно равная единице. Если $\delta(t)$ – это импульс напряжения, то размерностью $S(\omega)$ является вольт-секунда ($V \cdot c$) [3].

Используя свойства δ -функции, можно построить спектры сигналов, не отвечающих условию (1.48). Рассмотрим примеры.

Постоянный во времени сигнал является неинтегрируемым. На основании фильтрующего свойства δ -функции получим

$$S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega). \quad (1.51)$$

Физический смысл полученного результата следующий: в спектре постоянного сигнала присутствует спектральная составляющая только на нулевой частоте [4]. Понятия начальной фазы для постоянного сигнала не существует. Постоянный во времени сигнал во временной и в частотной области представлен на рисунке 1.16.

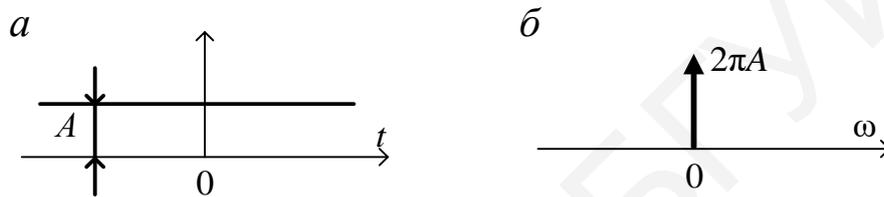


Рисунок 1.16 – Постоянный во времени сигнал во временной области (а) и в частотной области (б)

Рассмотрим спектральную плотность гармонических колебаний. Пусть

$$S(t) = \cos \omega_0 t.$$

По формуле Эйлера

$$S(t) = (\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)) / 2. \quad (1.52)$$

Для косинусоидального сигнала верно соответствие

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Спектр сигнала вида $\cos(\omega_0 t)$ приведен на рисунке 1.17.

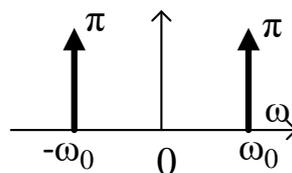


Рисунок 1.17 – Спектр косинусоидального сигнала

Описание программного обеспечения

Программа спектры.exe разработана для исследования параметров следующих сигналов: гармонического сигнала, последовательности видеоимпульсов, амплитудно-манипулированного, фазоманипулированного и частотно-манипулированного сигналов.

Программой предусмотрена возможность задания параметров сигналов (амплитуды, частоты, периода, длительности). Также есть возможность определения мгновенных значений параметров. Для этого достаточно подвести курсор к соответствующей точке сигнала, и мгновенные значения отобразятся во всплывающем окне.

Согласно введенным параметрам программа проводит расчеты и выводит на экран изображение формы сигнала, теоретический (полученный посредством теоретического анализа) и реальный (построенный на основе дискретного преобразования Фурье) спектры. Параметры спектра можно найти аналогично определению параметров сигнала.

Внешний вид программы приведен на рисунке 1.18. В интерфейсе можно выделить: панель выбора типа сигнала, панель установки параметров сигнала, графические окна для построения сигнала и спектра, панель выбора вида спектра.

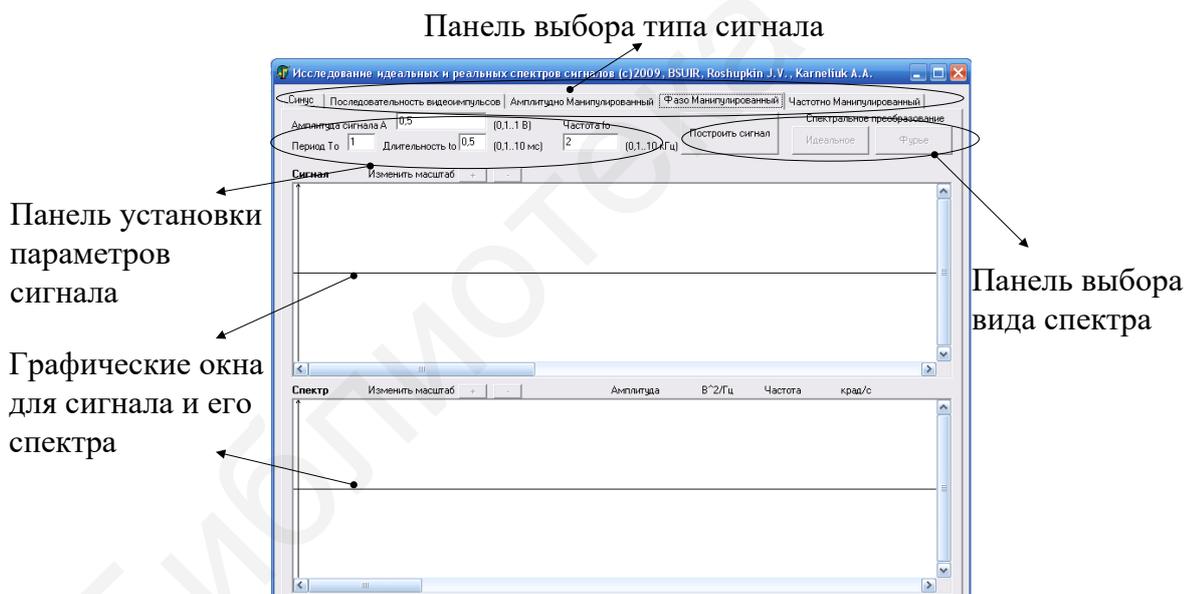


Рисунок 1.18 – Интерфейс программы спектры.exe

Тип сигнала выбирается щелчком левой кнопки мыши на панели выбора сигнала. На рисунке 1.19 выбран гармонический сигнал (синус).

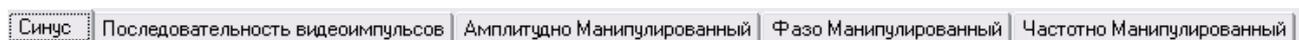


Рисунок 1.19 – Панель выбора типа сигнала

Допустимый диапазон параметров сигнала: амплитуда – в диапазоне от 0,1 до 1 В; период, длительность – в интервале от 0,1 до 10 мс; частота – в диапазоне от 0,1 до 10 кГц. Внешний вид панели установки параметров сигнала приведен на рисунке 1.20.

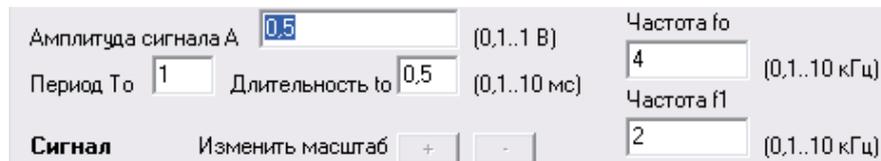


Рисунок 1.20 – Панель установки параметров

Чтобы получить изображение сигнала с выбранными параметрами, нужно на панели выбора вида спектра нажать кнопку «Построить сигнал», как показано на рисунке 1.21. Пример вида построенного сигнала приведен на рисунке 1.22. В графическом окне «Сигнал» кнопками «+» и «-» можно изменять масштаб сигнала.

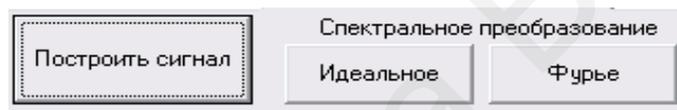


Рисунок 1.21 – Панель выбора вида спектра

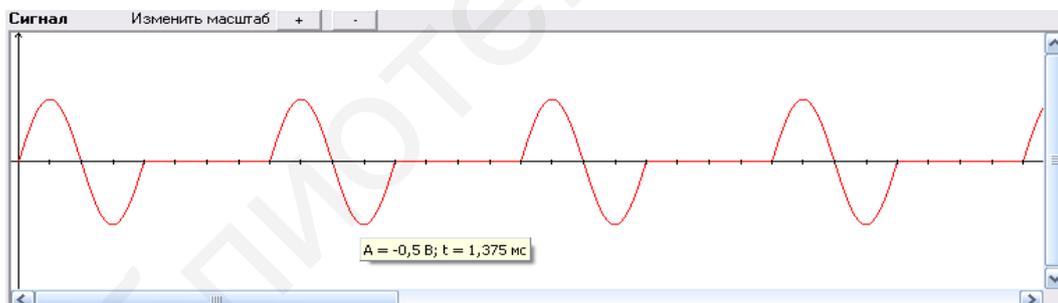


Рисунок 1.22 – Графическое окно «Сигнал»

Чтобы исследовать спектр сигнала, следует на панели выбора вида спектра нажать кнопку «Идеальное» (пример показан на рисунке 1.23) или «Фурье». Идеальный спектр строится на основе преобразования Фурье. Второй вариант расчета спектра основан на преобразовании непрерывного сигнала в дискретный, с последующей обработкой по алгоритму быстрого преобразования Фурье. Этот вариант спектра показан на рисунке 1.24.

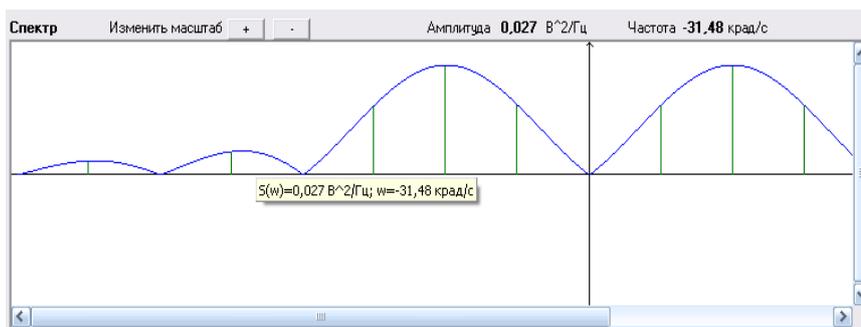


Рисунок 1.23 – Графическое окно «Спектр». Вид теоретического спектра, построенного на основе преобразования Фурье

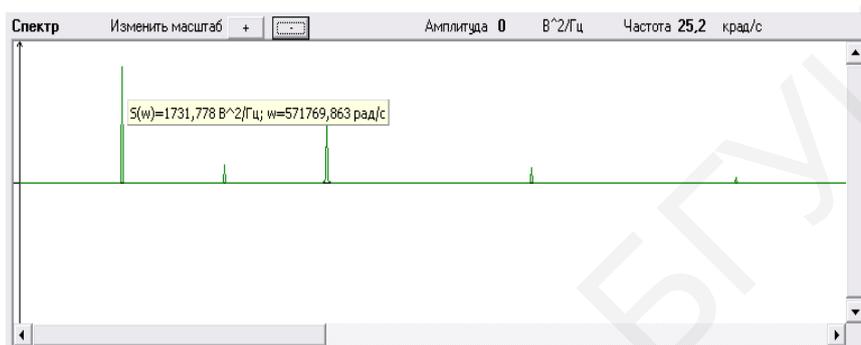


Рисунок 1.24 – Графическое окно «Спектр». Вид спектра, построенного на основе быстрого преобразования Фурье

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Исследуйте гармонический сигнал, для чего:

1.1. Запустите программу спектры.exe.

1.2. На панели выбора типа сигнала выберите «Синус». На панели установки параметров сигнала введите значения амплитуды (A) и частоты (f_0) из таблицы 1.1 в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Нажмите кнопку «Создать сигнал».

1.3. Используя курсор в графическом окне «Сигнал», определите значения амплитуды сигнала на временном интервале от 0 до 2 мс с шагом 0,125 мс и заполните таблицу 1.2. Зарисуйте сигнал.

1.4. На панели выбора вида спектра нажмите кнопку «Идеальное». Зарисуйте вид теоретического спектра, построенного на основе преобразования Фурье, и запишите значения частот составляющих спектра и их амплитуд.

1.5. На панели выбора вида спектра нажмите кнопку «Фурье». Зарисуйте спектр и сравните его с предыдущим спектром.

1.6. Изменяя параметры сигнала, зафиксируйте соответствующие им изменения спектра. Проанализируйте полученные результаты и сформулируйте выводы по работе.

2. Исследуйте последовательность видеоимпульсов.
Повторите пункт 1 для сигнала в виде последовательности видеоимпульсов.

Таблица 1.1 – Исходные данные к лабораторной работе №1

Исследуемый сигнал	Вариант			
	1	2	3	4
Синус	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 1 \text{ кГц}$	$A = 0,75 \text{ В},$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В},$ $f_0 = 1,5 \text{ кГц}$
Последовательность видеоимпульсов	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,25 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 0,75 \text{ мс}$

Таблица 1.2 – Результаты выполнения лабораторной работы №1

Исследуемый сигнал	Момент времени, мс									
	0	0,125	0,25	0,375	0,5	...	1,625	1,75	1,875	2
Синус										
Последовательность видеоимпульсов										

Контрольные задания

1. Являются ли взаимно ортогональными сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (рисунок 1.25)?

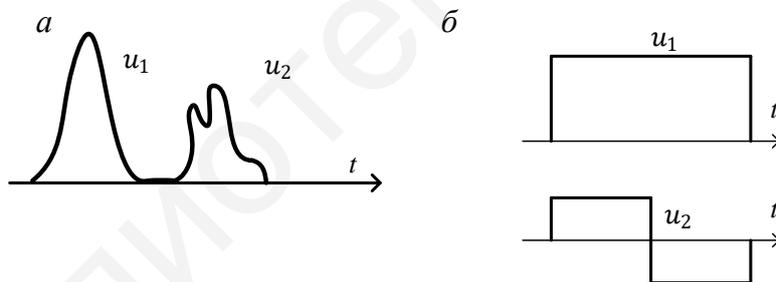


Рисунок 1.25 – Примеры сигналов к заданию 1

- Изобразите функции косинуса $S(t) = U_m \cos(\omega t)$ и синуса $S(t) = U_m \sin(\omega t)$ в виде вращающихся векторов на комплексной плоскости.
- Изобразите спектр функции синуса $S(t) = \sin(\omega t)$.
- Изобразите амплитудный спектр прямоугольного видеоимпульса.
- Назовите свойства преобразования Фурье.
- Какая существует взаимосвязь между длительностью импульсного сигнала и шириной его спектра?
- Что такое δ -функция? Изобразите δ -функцию во временной и частотной областях.

Лабораторная работа №2

Спектральный анализ модулированных сигналов

Цель работы: экспериментально исследовать спектры сигналов с различными видами модуляции для систем инфокоммуникаций, изучить взаимосвязь способа модуляции, основных параметров модулирующих сигналов и несущего колебания на параметры модулированных сигналов во временном и частотном представлении.

Краткие теоретические сведения

Сигналы, непосредственно поступающие из источника информации, в большинстве случаев не могут быть непосредственно переданы по линии связи. Информационные сигналы, т. е. сигналы, у которых один или несколько параметров изменяются по закону передаваемого сообщения, как правило, низкочастотны. Поэтому для их передачи по линии связи необходимо перенести их спектр в область более высоких частот. Эта операция носит название модуляции. Обратная модуляции операция называется детектированием и осуществляется в приемном устройстве.

Для осуществления модуляции в передающем устройстве вырабатывается вспомогательный высокочастотный сигнал – несущее колебание. Форму несущего колебания определяет множество параметров. Пусть $S(t)$ – низкочастотное сообщение, которое нужно передать по линии связи. Если хотя бы один из параметров несущего колебания изменяется пропорционально передаваемому сигналу $S(t)$, то несущее колебание будет содержать в себе информацию, которая первоначально содержалась в сообщении $S(t)$.

В качестве несущего колебания часто используют гармонический сигнал вида

$$U_{\text{нес}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

Изменяя во времени один или несколько параметров их трех возможных (амплитуду U , частоту ω , начальную фазу φ), можно получить разные виды модуляции.

На приемной стороне, анализируя изменение соответствующего параметра, можно восстановить передаваемый сигнал $S(t)$.

Таким образом, модуляция заключается в изменении одного или нескольких параметров высокочастотного колебания по закону передаваемого сообщения; детектирование – это восстановление передаваемого сообщения по закону изменения одного или нескольких параметров принятого высокочастотного сигнала; передаваемое сообщение – электрический сигнал – является низкочастотным («медленным») по отношению к высокочастотному сигналу, передава-

емому в линию связи. Существуют различные виды модуляции: амплитудная, частотная, фазовая и др.

Амплитудная модуляция

При амплитудной модуляции (АМ) по закону сообщения $S(t)$ изменяется амплитуда несущего колебания, а параметры ω и φ остаются постоянными:

$$U_{\text{АМ}}(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.2)$$

Таким образом, АМ-колебание представляет собой произведение огибающей вида $U(t)$ и гармонического колебания вида $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Причем на практике скорость изменения огибающей значительно меньше, чем высокочастотного гармонического колебания.

Связь между огибающей $U(t)$ и модулирующим полезным сигналом $S(t)$ можно определить так:

$$U(t) = U_m [1 + MS(t)], \quad (2.3)$$

где U_m – постоянный коэффициент, равный амплитуде несущего колебания;

M – коэффициент АМ, который также называют глубиной АМ.

При малой глубине модуляции (рисунок 2.1, а) относительное изменение огибающей невелико, и независимо от формы сигнала во все моменты времени выполняется соотношение

$$MS(t) \ll 1. \quad (2.4)$$

В случае, когда при максимальном значении сигнала $S(t)$ выполняется одно из соотношений

$$MS(t)_{\text{max}} \approx 1 \quad (2.5)$$

или

$$MS(t)_{\text{min}} \approx -1, \quad (2.6)$$

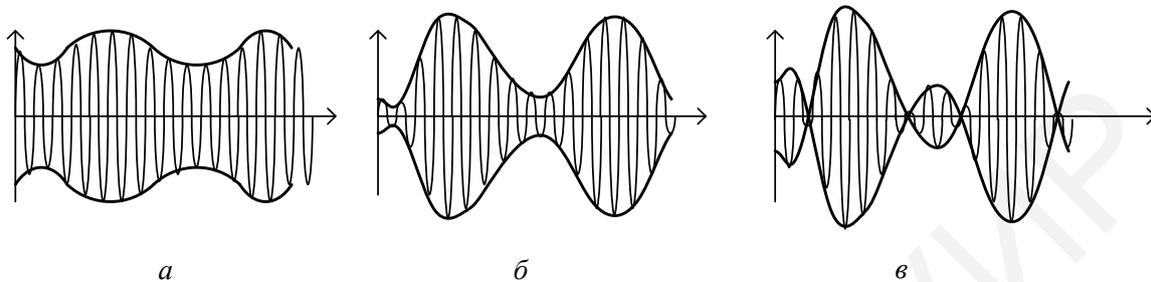
имеет место глубокая АМ (см. рисунок 2.1, б).

Следует отметить, что при 100%-й модуляции ($M = 1$) и максимальном значении низкочастотного сообщения амплитуда высокочастотного колебания удваивается. Этот эффект может приводить к перегрузкам выходных каскадов передающего устройства и искажению сигнала.

При перемодуляции (см. рисунок 2.1, в), т. е. когда

$$M > 1, \quad (2.7)$$

форма огибающей не повторяет форму модулирующего сигнала, что также приводит к искажению формы демодулированного сигнала.



a – неглубокая АМ; *б* – глубокая АМ; *в* – перемодуляция

Рисунок 2.1 – АМ-сигнал с разной глубиной модуляции

Однотональная амплитудная модуляция

Пусть модулирующим низкочастотным сигналом является гармоническое колебание с частотой Ω .

Однотональный АМ-сигнал можно представить в виде

$$U_{AM}(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.8)$$

где Ω – частота модулирующего сигнала;

ω_0 – несущая частота, частота несущего высокочастотного колебания;

M – коэффициент глубины модуляции (глубина модуляции), который определяется формулой

$$M = \Delta U_m / U_m. \quad (2.9)$$

Сигнал, задаваемый формулой (2.8), представлен на рисунке 2.2.

Из тригонометрии известно, что произведение косинусов есть сумма косинусов. Тогда формулу однотонального АМ-сигнала можно записать в следующем виде:

$$U_{AM}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) следует, что спектр однотонового АМ-сигнала состоит из трех составляющих: на несущей частоте ω_0 и на двух боковых частотах – верхней ($\omega_0 + \Omega$) и нижней ($\omega_0 - \Omega$). Причем амплитуды боковых колебаний равны, и располагаются эти колебания симметрично относительно несущей частоты ω_0 . Спектр сигнала, задаваемого формулой (2.10), приведен на рисунке 2.3.

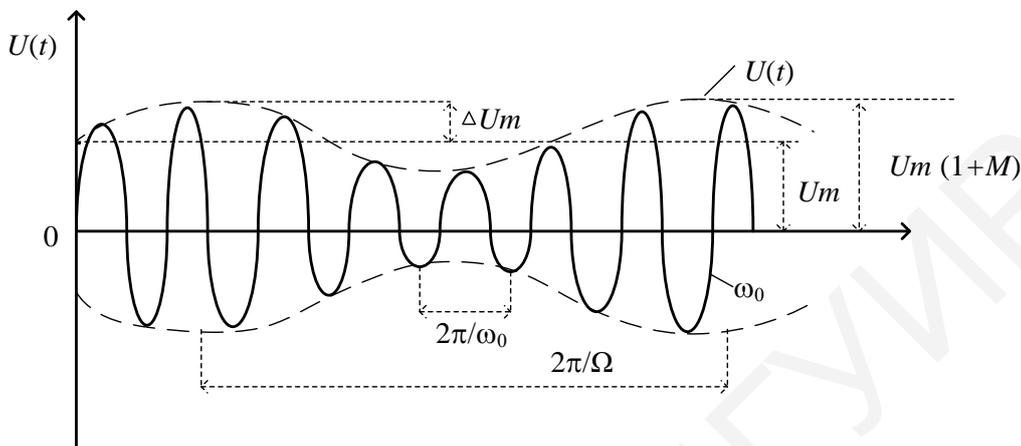


Рисунок 2.2 – График однотонового амплитудно-модулированного колебания (модулирующий сигнал – гармонический с частотой Ω)

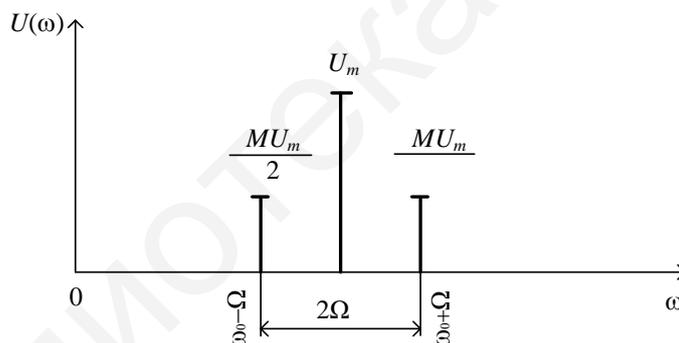


Рисунок 2.3 – Спектр колебания при гармонической (однотоновой) модуляции

Рассмотрим энергетические характеристики однотонового АМ-сигнала. Очевидно, что средняя мощность АМ-сигнала равна сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$P_{\text{АМ}} = P_{\text{НЕС}} + P_{\text{В БОК}} + P_{\text{Н БОК}}. \quad (2.11)$$

Причем

$$P_{\text{НЕС}} = U_m^2 / 2; \quad (2.12)$$

$$P_{\text{В БОК}} = P_{\text{Н БОК}} = (MU_m / 2)^2 / 2 = M^2 P_{\text{НЕС}} / 4. \quad (2.13)$$

Максимального значения средняя мощность бокового колебания достигается при 100%-й модуляции ($M = 1$). Но даже в этом случае мощность двух боковых колебаний равна только 50 % мощности немодулированного несущего колебания.

Вся информация о сообщении заключена в боковых колебаниях. Поэтому при амплитудной модуляции мощность передающего устройства используется неэффективно:

$$P_{\text{ИНФ}} = 0,25 P_{\text{НЕС}} \text{ при } M = 1. \quad (2.14)$$

Амплитудная модуляция при сложном модулирующем сигнале

Используемые на практике информационные сигналы имеют сложный спектр, который ограничивается одной частотой. Такой сигнал можно представить в виде суммы низкочастотных спектральных составляющих:

$$S(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i), \quad (2.15)$$

где частоты Ω_i образуют упорядоченную последовательность, причем

$$\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N, \quad (2.16)$$

а амплитуды α_i и начальные фазы Φ_i произвольны.

Тогда амплитудно-модулированный сигнал можно представить в следующем виде:

$$U_{\text{АМ}}(t) = U_m \left[1 + \sum_{i=1}^N M \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.17)$$

Обозначим парциальные (частичные) коэффициенты модуляции следующим образом:

$$M_i = M \alpha_i. \quad (2.18)$$

Выражение (2.17) примет вид

$$U_{AM}(t) = U_m \left[1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.19)$$

Отсюда, применив тригонометрическое преобразование произведения гармонических функций, получим

$$\begin{aligned} U_{AM}(t) = & U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из (2.20) следует, что спектр верхнего бокового колебания представляет собой копию спектра информационного сигнала, смещенного в область высоких частот и умноженного на масштабный коэффициент. Спектр нижнего бокового колебания есть зеркальное относительно несущей частоты ω_0 отражение спектра верхнего бокового колебания. Таким образом, ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наивысшей частоты ω_N в спектре модулирующего низкочастотного сигнала. Спектры модулирующего сигнала $S(t)$ и многотонального АМ-сигнала, задаваемого формулой (2.20), приведены на рисунке 2.4.

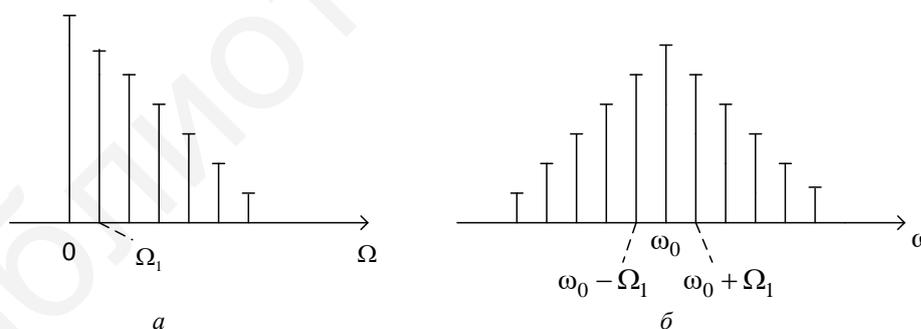


Рисунок 2.4 – Спектр модулирующего сигнала $S(t)$ (а) и многотонального АМ-сигнала (б)

При сплошном спектре модулирующего сигнала $S(t)$ вид АМ-сигнала и его спектра приведен на рисунке 2.5.

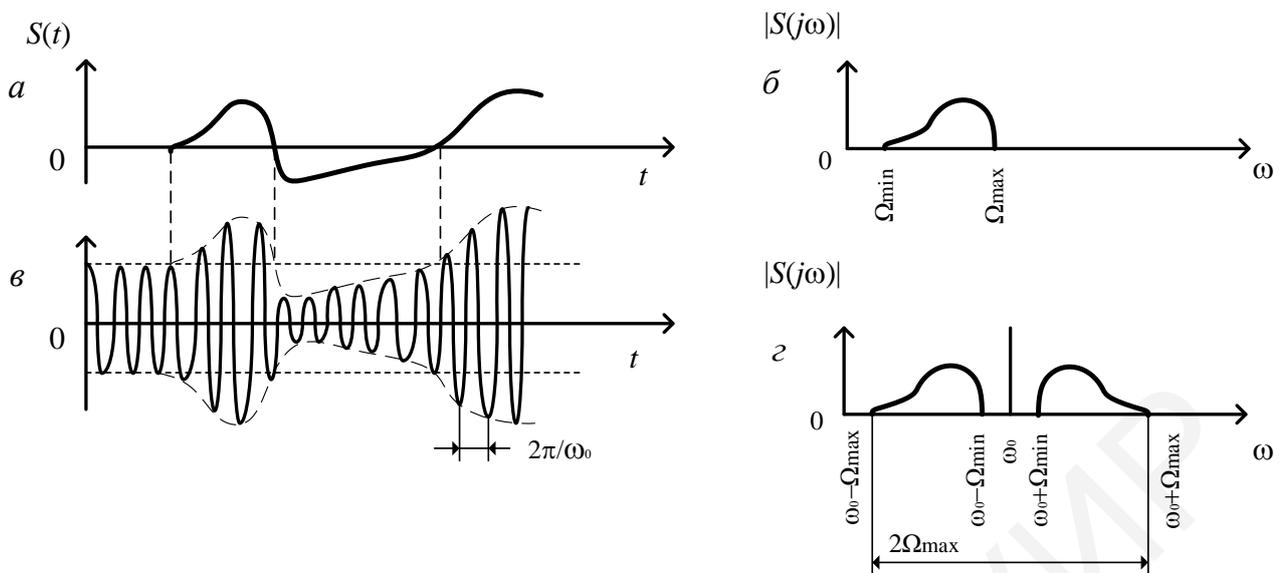


Рисунок 2.5 – Спектр модулирующего сигнала $S(t)$ (а) и его амплитудный спектр (б), амплитудно-модулированный сигнал (в) и его амплитудный спектр (г)

Рассмотрим пример. Требуется найти число вещательных радиоканалов, которые можно расположить в средневолновом вещательном диапазоне, т. е. в диапазоне частот от 0,5 до 1,5 МГц.

Для удовлетворительного качества звукового вещания необходимо воспроизводить частоты в диапазоне от 100 Гц до 12 кГц. Таким образом, полоса частот, необходимая для передачи одного АМ-канала, составляет 24 кГц. Кроме того, как показано на рисунке 2.6, чтобы избежать перекрестных помех между каналами, дополнительно предусматривают защитный интервал шириной в 1 кГц.

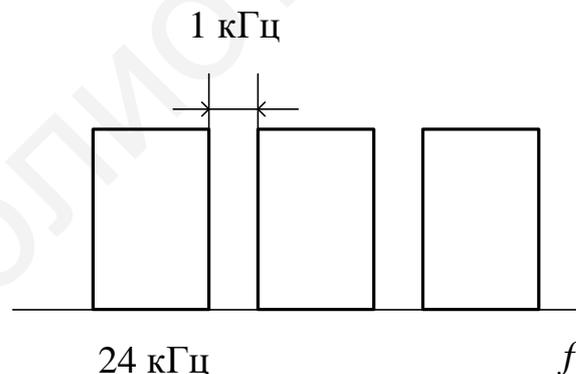


Рисунок 2.6 – Размещение АМ-каналов в средневолновом диапазоне частот

Следовательно, максимально допустимое число каналов

$$N = (1,5 - 0,5) \times 10^6 / (25 \times 10^3) = 40.$$

Амплитудная манипуляция

Манипуляция (цифровая модуляция) имеет место в случае, когда модулирующий сигнал принимает конечное число значений. Простейший амплитудно-манипулированный сигнал представляет собой последовательность радиоимпульсов, разделенных паузами. Подобные сигналы получили широкое распространение в технике связи.

Пусть модулирующий сигнал представляет собой функцию, принимающую лишь два значения: 0 либо 1. Тогда амплитудно-манипулированный сигнал на рисунке 2.7 можно представить в следующем виде:

$$U_{\text{ман}} = U_m S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.21)$$

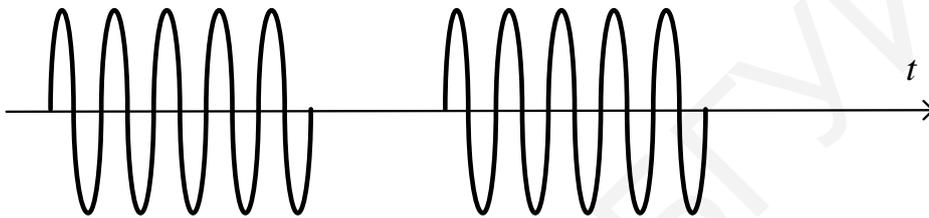


Рисунок 2.7 – Осциллограмма амплитудно-манипулированного сигнала

Если $S(t)$ – периодическая последовательность видеоимпульсов, то, без потери общности приняв, что амплитуда этих импульсов равна единице, а фаза φ_0 – нулю, получим

$$U_{\text{ман}}(t) = \frac{U_m}{q} \cos \omega_0 t + \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos(\omega_0 + n\omega_1)t + \frac{U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cos(\omega_0 - n\omega_1)t, \quad (2.22)$$

где τ – длительность одного импульса;

T – период следования импульсов;

Q – скважность импульсной последовательности ($Q = T / \tau$).

Балансная амплитудная модуляция

Значительная часть мощности АМ-сигнала заключена в несущем колебании, которое полезной информации не несет. Поэтому для повышения эффективности использования мощности передающего устройства и увеличения его

коэффициента полезного действия формируют АМ-сигналы с подавленным несущим колебанием. АМ-сигнал с полностью подавленной несущей называется балансно-модулированным (БМ) сигналом.

Однотональный БМ-сигнал можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{БМ}}(t) &= U_m M \cos(\Omega t + \Phi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\
 &= \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \\
 &+ \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0].
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

При балансной модуляции модулирующее колебание с частотой Ω умножается на несущее колебание с частотой ω_0 . Такие колебания называются *бие-ниями* двух гармонических сигналов с одинаковыми амплитудами $\frac{U_m M}{2}$ и частотами $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$, т. е. нижней и верхней боковой частотой соответственно.

В случае многотональной балансной модуляции сигнал можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{БМ}}(t) &= \frac{1}{2} U_m \sum_{i=1}^M M_i \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] + \\
 &+ \frac{1}{2} U_m \sum_{i=1}^M M_i \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i].
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Временная (осциллограмма) и спектральная диаграммы БМ-сигнала представлены на рисунке 2.8.

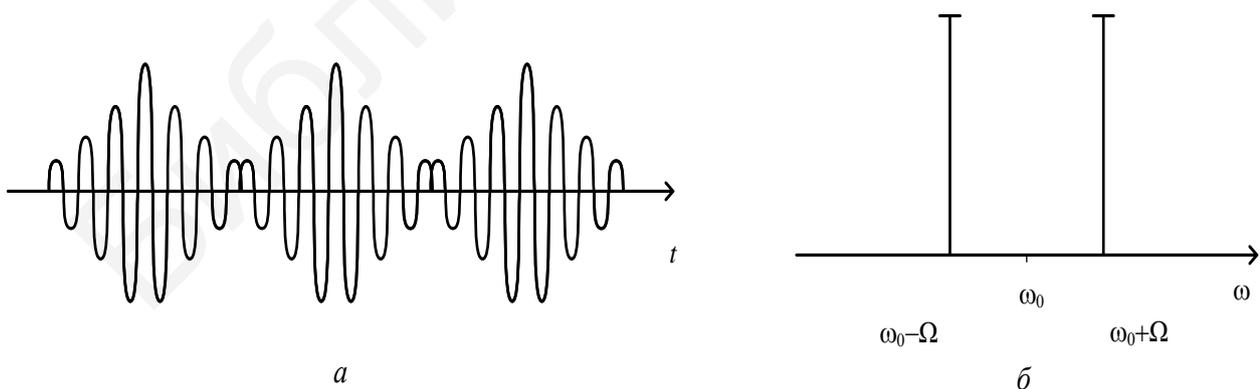


Рисунок 2.8 – Временная (а) и спектральная (б) диаграммы балансно-модулированного сигнала

Сравнивая рисунки 2.5 и 2.8, можно заметить, что в спектре БМ-сигнала, как и в спектре обычного АМ-сигнала, присутствуют две группы боковых колебаний (верхних и нижних), которые расположены симметрично относительно несущей частоты ω_0 .

Однако в спектре БМ-сигнала отсутствует колебание несущей частоты, несмотря на то, что на осциллограмме можно видеть колебание именно этой частоты. Физически это можно объяснить следующим образом. При переходе огибающей биений через нуль фаза высокочастотного заполнения изменяется на 180° . Поэтому в колебательном контуре с резонансной частотой ω_0 колебания, возбуждаемые одним периодом биений, гасятся следующим периодом с противоположным знаком. Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше сигнал на ее выходе.

Несмотря на значительные энергетические преимущества по сравнению с обычной АМ, на практике БМ используется редко.

Однополосная амплитудная модуляция

Другая возможность улучшить характеристики АМ-сигнала заключается в подавлении одной из боковых полос частот в спектре. Передаваемая информация полностью содержится в каждой боковой полосе, следовательно, для передачи информации достаточно передавать только одну боковую полосу.

Способ передачи, при котором радиопередатчик создает, а его антенна излучает только одну полосу боковых частот, называется однополосной модуляцией.

Сигнал с одной боковой полосой (ОБП) (*SSB – single sideband*) можно представить в следующем виде:

$$U_{\text{обп}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0]. \quad (2.25)$$

В данном случае подавлена нижняя боковая полоса.

Выражение (2.25) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{\text{обп}}(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos(\Omega t + \Phi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &- \frac{U_m M}{2} \sin(\Omega t + \Phi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_m \left[1 + \frac{M}{2} \cos(\Omega t + \Phi_0) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &- \frac{U_m M}{2} \sin(\Omega t + \Phi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Каждое из полученных слагаемых является произведением медленной и быстрой функций с частотами соответственно Ω и ω_0 .

Медленно изменяющаяся огибающая ОБП-сигнала имеет следующий вид:

$$U(t) = U_m \sqrt{1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0) + M^2 / 4}. \quad (2.27)$$

Из рисунка 2.9 видно, что непосредственная демодуляция ОБП-сигнала по его огибающей приведет к значительным искажениям модулирующего информационного сигнала.

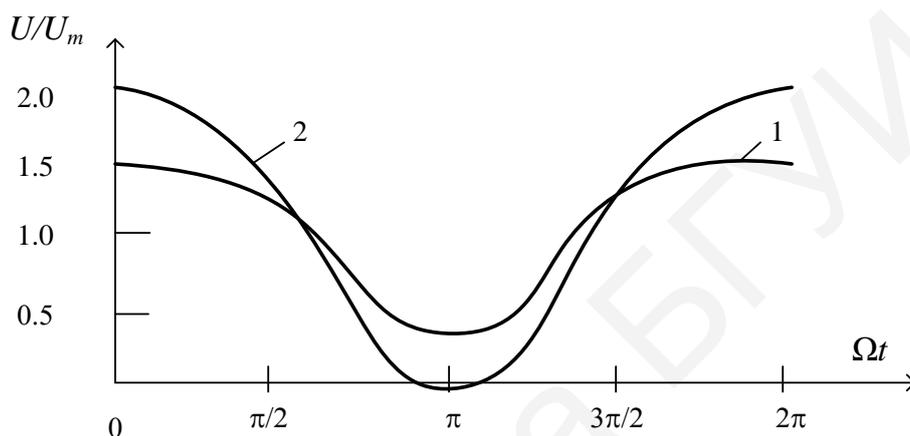


Рисунок 2.9 – Огибающая однотональных ОБП-сигнала при $M = 1$ (1) и огибающая обычного АМ-сигнала с $M = 1$ (2)

Главным достоинством ОБП-сигналов является сокращение полосы занимаемых сигналом частот в два раза, что позволяет разместить в выделенном диапазоне вдвое больше каналов связи.

Помимо этого, применение однополосной амплитудной модуляции в системах радиосвязи обеспечивает значительные энергетические преимущества по сравнению с двухполосной.

Улучшить характеристики ОБП-сигнала позволяет частичное или полное подавление несущего колебания. Как видно из рисунка 2.10, это повышает эффективность использования мощности передатчика.

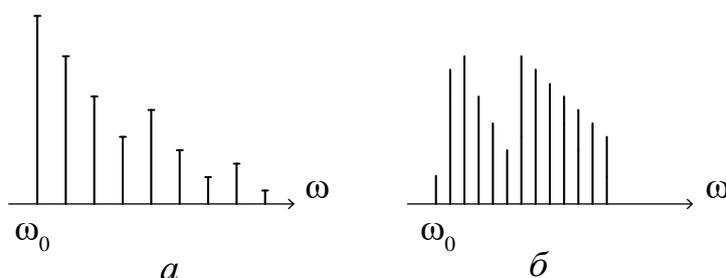


Рисунок 2.10 – Спектры однополосного сигнала (а) и однополосного сигнала с частично подавленной несущей частотой (б)

Угловая модуляция

При угловой модуляции амплитуда U_m несущего колебания $U_{\text{НЕС}}(t)$ остается постоянной, а изменяются во времени его частота ω или начальная фаза φ . Закон изменения частоты или фазы определяется передаваемым сообщением $S(t)$. Аргумент гармонического колебания

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi, \quad (2.28)$$

определяющий текущее значение фазового угла, называется полной фазой. Поэтому такие сигналы называют сигналами с угловой модуляцией.

Рассмотрим виды угловой модуляции.

Пусть полная фаза $\psi(t)$ определяется как

$$\psi(t) = \omega_0 t + k_\phi S(t) + \varphi_0, \quad (2.29)$$

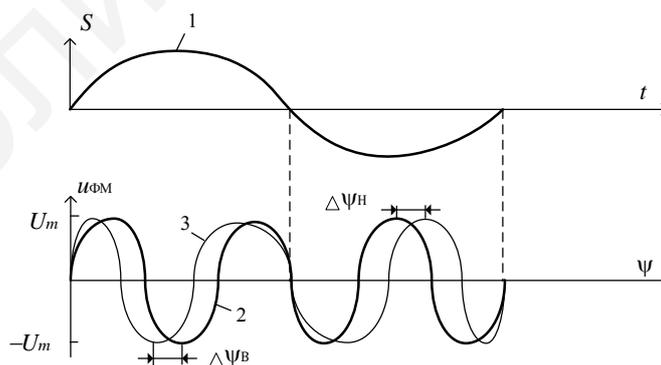
где ω_0 – значение частоты в отсутствие полезного сигнала $S(t)$;

k_ϕ – некоторый коэффициент пропорциональности.

Такую модуляцию называют фазовой модуляцией (ФМ). Закон изменения ФМ-сигнала:

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + k_\phi s(t)]. \quad (2.30)$$

Процесс формирования сигнала с ФМ иллюстрирует рисунок 2.11.



- 1 – модулирующий низкочастотный сигнал;
- 2 – немодулированное гармоническое колебание;
- 3 – сигнал с фазовой модуляцией

Рисунок 2.11 – Фазовая модуляция

В отсутствие модулирующего сигнала ($S(t) = 0$) ФМ-сигнал имеет вид обычного гармонического сигнала. С ростом значения $S(t)$ полная фаза нарастает во времени с опережением линейного закона. Уменьшение значений сигнала $S(t)$ замедляет скорость нарастания полной фазы. Таким образом, наибольший сдвиг фазы между немодулированным гармоническим колебанием и ФМ-сигналом имеет место тогда, когда модуль значения модулирующего сигнала $S(t)$ максимален. Максимальное значение сдвига фазы носит название девиации фазы $\psi(t)$. Различают девиацию фазы вверх $\Delta\Psi_B = ks_{\max}$ и девиацию фазы вниз $\Delta\Psi_H = ks_{\min}$.

Установим связь между изменением фазы и угловой частотой. Изменение фазы есть разность между значениями фазы в момент времени t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(t) &= \Psi(t_2) - \Psi(t_1) = (\omega_0 t_2 + \varphi_0) - (\omega_0 t_1 + \varphi_0) = \\ &= \omega_0 (t_2 - t_1) = \omega_0 \Delta t. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отсюда

$$\omega_0 = \frac{\Delta\Psi(t)}{\Delta t}. \quad (2.32)$$

Следовательно, мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала с угловой модуляцией определяется как производная от полной фазы по времени, т. е. *частота* – это *скорость изменения фазы*:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (2.33)$$

Тогда полную фазу можно найти как

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi_0. \quad (2.34)$$

В случае частотной модуляции (ЧМ) по закону модулирующего сигнала $S(t)$ изменяется частота несущего колебания $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{Ч}} S(t). \quad (2.35)$$

Тогда

$$\Psi(t) = [\omega_0 + k_{\text{Ч}} S(t)]t + \varphi_0. \quad (2.36)$$

Осциллограмма сигнала с частотной модуляцией представлена на рисунке 2.12.

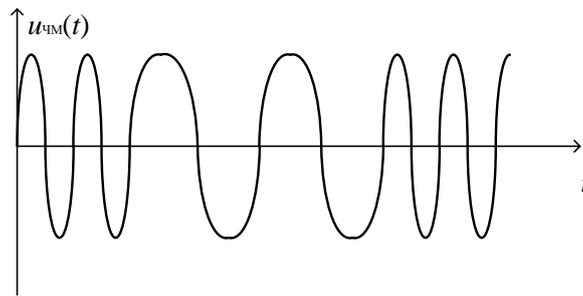


Рисунок 2.12 – Частотная модуляция

Для ЧМ-сигнала вводят понятия девиации частоты вверх $\Delta\omega_b = ks_{\max}$ и девиации частоты вниз $\Delta\omega_h = ks_{\min}$.

Осциллограммы ФМ- и ЧМ-сигналов практически не отличаются. Однако между ними есть принципиальная разница:

- 1) фазовый сдвиг между ФМ-сигналом и немодулированным колебанием пропорционален $S(t)$;
- 2) для ЧМ-сигнала фазовый сдвиг пропорционален интегралу от передаваемого сообщения [4].

Однотональные сигналы с угловой модуляцией

В простейшем случае модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание вида

$$S(t) = U_{ms} \cos \Omega t. \quad (2.37)$$

Тогда полную фазу ФМ-сигнала можно представить в виде

$$\psi(t) = \omega_0 t + \Delta\varphi_m \cos \Omega t + \varphi_0 = \omega_0 t + m \cos \Omega t + \varphi_0, \quad (2.38)$$

где $k_\Phi U_m = \Delta\varphi_m = m$ – индекс угловой модуляции. (2.39)

Зависимость частоты от времени имеет следующий вид:

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 - m\Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega_m \sin \Omega t. \quad (2.40)$$

Тогда

$$m = \Delta\omega_m / \Omega, \quad (2.41)$$

где $\Delta\omega_m = m\Omega$ – девиация. (2.42)

Следовательно, гармоническая модуляция фазы с индексом m эквивалентна ЧМ с девиацией $\Delta\omega_m = m\Omega$.

При однотоновой ЧМ закон изменения частоты имеет вид

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \cos \Omega t, \quad (2.43)$$

где девиация $\Delta\omega_m = k_{\text{ЧМ}} U_{ms}$. (2.44)

Полная фаза ЧМ-сигнала определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t + (\Delta\omega_m / \Omega) \sin \Omega t + \varphi_0 = \\ &= \omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi_0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Следует отметить, что в общем случае мгновенная частота ЧМ-сигнала равна

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

а его полная фаза –

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0,$$

где Φ_0 и φ_0 – постоянные фазовые углы.

Предположим, что

$$\varphi_0 = \Phi_0 = 0.$$

Тогда

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t). \quad (2.46)$$

Из (2.38) следует, что вид функций, описывающих однотоновые ЧМ- и ФМ-сигналы, аналогичны.

Однако изменение частоты модуляции и амплитуды модулирующего сигнала U_{MS} по-разному влияет на ЧМ- и ФМ-сигналы.

Так, модуляция частоты по закону $\Delta\omega_m \cos \Omega t$ приводит к модуляции фазы по закону $(\Delta\omega_m / \Omega) \sin \Omega t$.

Как видно из (2.44), при ЧМ девиация частоты $\Delta\omega_m$ прямо пропорциональна амплитуде низкочастотного сигнала. При этом $\Delta\omega_m$ не зависит от частоты модулирующего сигнала.

При ФМ, согласно (2.39), ее индекс m пропорционален амплитуде низкочастотного сигнала $S(t)$ и не зависит от его частоты. Поэтому девиация частоты $\Delta\omega_m$ при ФМ линейно возрастает при увеличении частоты модулирующего колебания Ω [4].

Индекс модуляции, определяемый по (2.41), не зависит от средней (немодулированной частоты) ω_0 , а определяется исключительно девиацией $\Delta\omega_m$ и модулирующей частотой Ω .

Спектр ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции

Рассмотрим случай, когда значение индекса модуляции удовлетворяет условию $M \ll 1$. Представим выражение (2.46) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = \\ &= U_m \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Для малых значений m известны приближенные равенства:

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1; \quad (2.48)$$

$$\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t. \quad (2.49)$$

Тогда

$$u(t) \approx U_M \cos \omega_0 t + \frac{mU}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{mU}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (2.50)$$

Следовательно, при малых индексах модуляции спектр сигнала с угловой модуляцией (рисунок 2.13) состоит из несущего колебания и двух боковых составляющих на частотах $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Индекс m в данном случае аналогичен коэффициенту амплитудной модуляции M при одностональной АМ. Но в отличие от спектра АМ-сигнала нижняя составляющая имеет сдвиг фазы на 180° относительно верхней составляющей. Ширина спектра при $m \ll 1$ равна 2Ω , как и при АМ. То есть при очень малых девиациях $\Delta\omega_m$ (по сравнению с Ω) ширина спектра от $\Delta\omega_m$ не зависит.

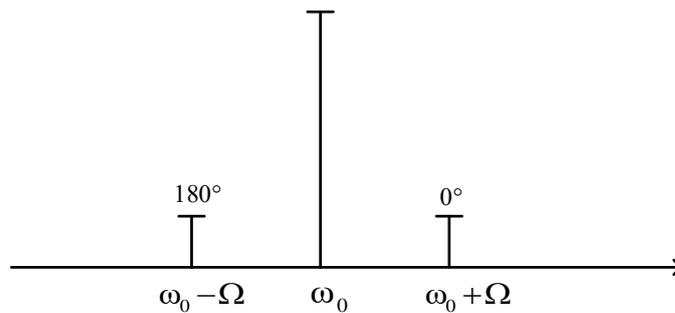


Рисунок 2.13 – Спектр сигнала с угловой модуляцией при $m \ll 1$

При возрастании m необходимо учитывать боковые частоты высших порядков.

При значениях m от 0,5 до 1 в спектре появляется вторая пара гармоник с частотами $\omega_0 - 2\Omega$ и $\omega_0 + 2\Omega$, а ширина спектра составит 4Ω . При $m = 1$ приходится учитывать третью пару (рисунок 2.14), при $m = 2$ – четвертую пару и т. д.

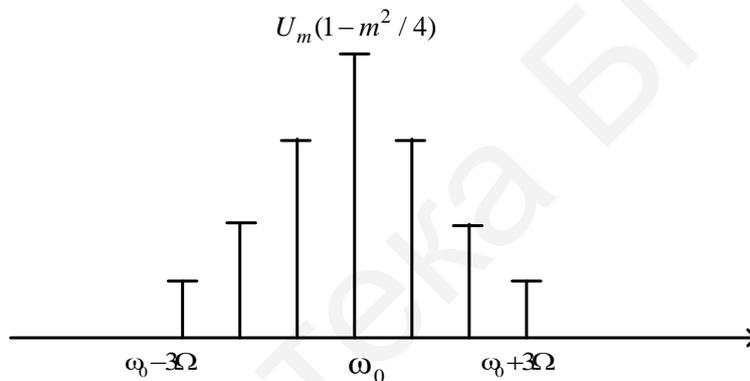


Рисунок 2.14 – Спектр сигнала с угловой модуляцией при $m \approx 1$

Начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k\Omega$ и $\omega_0 - k\Omega$ зависят от значения k : фазы совпадают, если k – четное число, противоположны (имеют сдвиг на 180°), если k – нечетное.

Появление новых спектральных составляющих приводит к перераспределению энергии по спектру. С ростом индекса модуляции m боковые составляющие растут, а амплитуда несущего колебания уменьшается пропорционально $1 - m^2 / 4$ [4].

Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса m

Рассмотрим однотональные сигналы с угловой модуляцией и с произвольным значением индекса модуляции m . Такие сигналы можно представить следующим образом:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t, \quad (2.51)$$

где $J_k(m)$ – функция Бесселя k -го порядка от аргумента m .

Графики функций Бесселя начальных порядков приведены на рисунке 2.15. Корни уравнения $J_0(m)$ равны 0; 2,405; 5,520; 8,654; 11,792;

Из (2.51) следует, что в спектре однотонального сигнала с угловой модуляцией содержится бесконечное число составляющих с частотами $\omega_0 \pm k\Omega$ и амплитудами, значения которых пропорциональны значениям функций Бесселя порядка k .

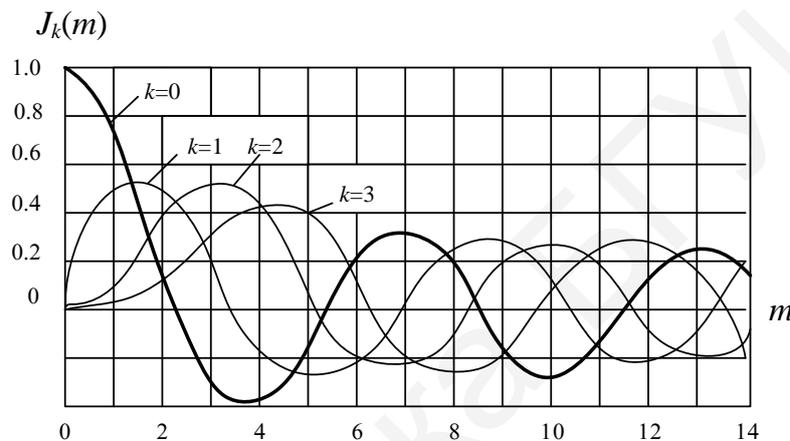


Рисунок 2.15 – Функции Бесселя

Для функций Бесселя справедлива следующая зависимость:

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m). \quad (2.52)$$

Поэтому у колебаний с частотами $\omega_0 - k\Omega$ и $\omega_0 + k\Omega$ начальные фазы совпадают, когда k – четное, и противоположны при нечетном значении k .

Другой особенностью функций Бесселя является то, что чем больше индекс k , тем длиннее интервал аргумента m , на котором значения функции малы.

Помимо этого, для больших значений m функция Бесселя принимает максимальное значение, когда k приблизительно равно m . Для иллюстрации данной зависимости на рисунке 2.16 приведены функции Бесселя второго и шестнадцатого порядка.

Известно также, что с ростом индекса k модуль максимального значения функции Бесселя убывает.

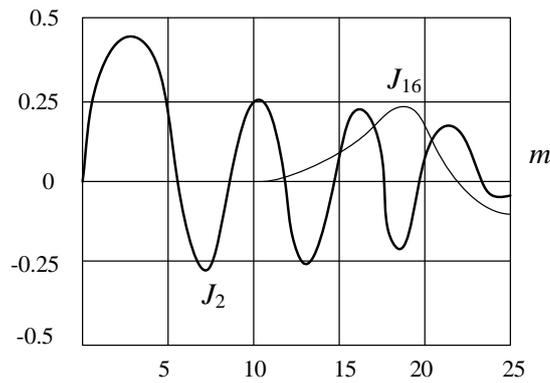


Рисунок 2.16 – Функции Бесселя второго и шестнадцатого порядка

Рассмотренные особенности позволяют сделать следующие выводы о спектре сигналов с однотоновой угловой модуляцией. Так, с увеличением индекса модуляции полоса частот сигнала увеличивается. На практике принято считать, что спектральные составляющие порядков $k > m + 1$ можно не учитывать. Поэтому практическую ширину спектра определяют следующим образом:

$$\Pi_{\text{практ}} = 2(m + 1)\Omega. \quad (2.53)$$

Поскольку обычно $m \gg 1$, то

$$\Pi_{\text{практ}} \approx 2m\Omega = 2\Delta\omega_m. \quad (2.54)$$

Следовательно, ширина спектра сигнала с угловой модуляцией примерно равна удвоенной девиации частоты. Эта ширина спектра в m раз превышает ширину спектра АМ-сигнала. Поэтому ЧМ- и ФМ-сигналы используются только на высоких частотах (в диапазонах метровых и более коротких волн). Преимуществом сигналов с угловой модуляцией в сравнении с АМ-сигналами является их большая помехоустойчивость, что определяется широкополосностью данных сигналов.

Рассмотрим пример. Пусть однотоновый ЧМ-сигнал характеризуется девиацией частоты $\Delta f = 240$ кГц. Найдём частоты модуляции F , при которых несущего колебания в спектре сигнала нет.

Индекс модуляции определяется как

$$m = \Delta\omega / \Omega = \Delta f / F.$$

Отсюда частота модуляции равна

$$F = \Delta f / m.$$

Корнями уравнения $J_0(m) = 0$ являются следующие значения индекса модуляции m : 2,405; 5,520; 8,654; 11,792

Следовательно,

$$F_1 = 240/2,405 = 99,792 \text{ кГц};$$

$$F_2 = 240/5,520 = 43,474 \text{ кГц};$$

$$F_3 = 240/8,654 = 27,732 \text{ кГц и т. д.}$$

Примеры спектров однотоновых сигналов с угловой модуляцией при различных значениях индекса модуляции приведены на рисунке 2.17.

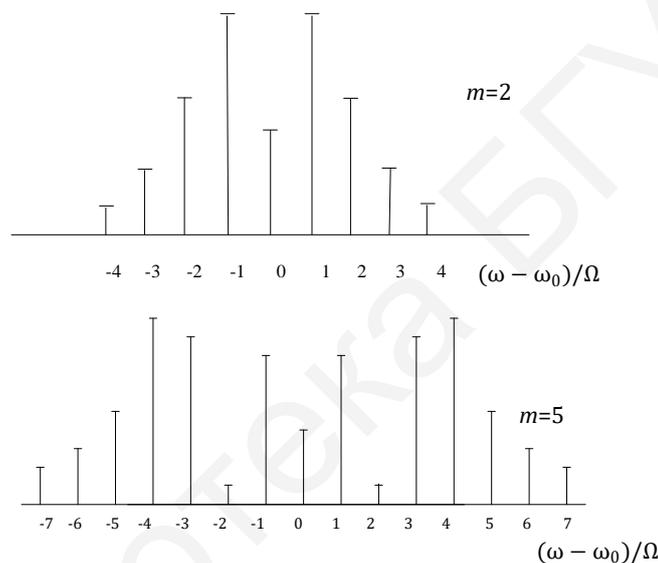


Рисунок 2.17 – Спектральные диаграммы сигнала с угловой модуляцией при двух значениях индекса m

Угловая модуляция при негармоническом модулирующем сигнале

Пусть несущее колебание модулируется колебанием, содержащим две низкие частоты Ω_1 и Ω_2 . Такой сигнал можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) = \\ &= U_m \cos(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \cos \omega_0 t - \\ &- U_m \sin(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Пусть парциальные индексы модуляции малы. Тогда можно применить приближенные формулы:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}; \quad (2.56)$$

$$\sin x \approx x. \quad (2.57)$$

Получим

$$\begin{aligned} u(t) = & U_m \left[\frac{1 - (m_1^2 + m_2^2)}{4} \right] \cos \omega_0 t + \\ & + \frac{1}{2} m_1 U_m [\cos(\omega_0 + \Omega_1)t - \cos(\omega_0 - \Omega_1)t] + \\ & + \frac{1}{2} m_2 U_m [\cos(\omega_0 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t] + \\ & + \frac{1}{8} m_1^2 U_m [\cos(\omega_0 + 2\Omega_1)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_1)t] + \\ & + \frac{1}{8} m_2^2 U_m [\cos(\omega_0 + 2\Omega_2)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_2)t] + \frac{1}{2} m_1 m_2 U_m \times \\ & \times [\cos(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t + \cos(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t - \\ & - \cos(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Таким образом, произошло обогащение спектра сигнала: наряду с частотами $\omega_0 \pm \Omega_1$ и $\omega_0 \pm \Omega_2$ и $\omega_0 \pm 2\Omega_1$ и $\omega_0 \pm 2\Omega_2$ появились комбинационные частоты $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$. Амплитуда комбинационных частот пропорциональна произведению парциальных индексов модуляции m_1 и m_2 . Вид спектра сигнала приведен на рисунке 2.18.

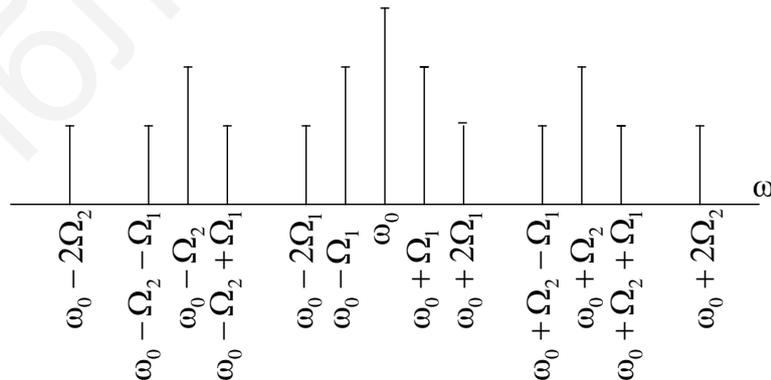


Рисунок 2.18 – Спектральная диаграмма сигнала с двухтональной угловой модуляцией при малых значениях парциальных индексов модуляции m_1 и m_2

Обобщим случай двухтональной угловой модуляции на сложный модулирующий сигнал, состоящий из набора низкочастотных колебаний, характери-

зующихся частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и парциальными индексами модуляции m_1, m_2, \dots, m_N . Такой сигнал имеет вид

$$u(t) = U_m \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} J_{k_1}(m_1) J_{k_2}(m_2) \dots \dots J_{k_N}(m_N) (\cos(\omega_0 + k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \dots + k_N\Omega_N)t). \quad (2.59)$$

Спектр сигнала с угловой модуляцией при сложном модулирующем сигнале богаче спектра сигнала с амплитудной модуляцией для того же модулирующего сигнала. В связи с появлением на выходе модулятора частот, которых не было на его входе, угловая модуляция представляет собой модуляцию *нелинейного типа*.

Процесс обогащения спектра можно объяснить следующим образом [3]. Представим колебание с угловой модуляцией в виде

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \Theta(t)]. \quad (2.60)$$

Согласно (2.29) и (2.36), информация о передаваемом сообщении $S(t)$ содержится в $\Theta(t)$.

При ФМ функции $\Theta(t)$ и $S(t)$ имеют одинаковую форму. Поэтому и спектры $\Theta(t)$ и $S(t)$ отличаются лишь коэффициентом.

В случае ЧМ функция $\Theta(t)$ есть интеграл от $S(t)$. Интегрирование – линейная операция, поэтому в спектре $\Theta(t)$ присутствуют те же спектральные составляющие, что и в спектре $S(t)$, но с другими амплитудами и фазами.

Попытаемся найти спектр модулированного колебания $u(t)$. Используя тригонометрические преобразования, функцию (2.60) можно представить в виде

$$u(t) = U_m \cos \Theta(t) \cos \omega_0 t - U_m \sin \Theta(t) \sin \omega_0 t = u_c(t) - u_s(t). \quad (2.61)$$

Функция

$$u_c(t) = U_m \cos \Theta(t) \cos \omega_0 t \quad (2.62)$$

называется косинусным колебанием, а

$$u_s(t) = U_m \sin \Theta(t) \sin \omega_0 t - \text{синусным.} \quad (2.63)$$

$u_c(t)$ и $u_s(t)$ называются квадратурными колебаниями. Они промодулированы по амплитуде медленными функциями $\cos \Theta(t)$ и $\sin \Theta(t)$ соответственно.

Согласно теореме о свертке, при амплитудной модуляции спектр огибающей амплитуд переносится на частоту несущего колебания ω_0 . Следовательно, чтобы построить спектр сигнала $u(t)$, нужно найти спектры огибающих квадратурных колебаний (спектры функций $\cos\Theta(t)$ и $\sin\Theta(t)$). Функции $\cos\Theta(t)$ и $\sin\Theta(t)$ – нелинейные функции аргумента $\Theta(t)$, поэтому в их спектре присутствуют составляющие, которых нет в спектре $\Theta(t)$ [3]. Таким образом, построить спектр сигнала с угловой модуляцией по спектру сигнала $S(t)$ значительно сложнее, чем при АМ.

Дискретные формы угловой модуляции

Рассмотрим информационный сигнал $u(t)$ в виде двоичной последовательности. Разделим эту последовательность на блоки, состоящие из k символов. Число различных блоков (кодовых слов) равно 2^k , $k = 1, 2, 3, \dots$. При дискретной ЧМ каждому блоку (слову) соответствует определенная частота радиосигнала. Правило отображения двоичных слов в значения частоты радиосигнала называется модуляционным кодом ЧМ-сигнала [1].

В простейшем случае $k = 1$. Тогда длина блока равна 1, число различных блоков (кодовых слов) $2^k = 2$, возможные кодовые слова – это символы 0 и 1. Такой вид модуляции называют частотной манипуляцией (ЧМн) или двоичной частотной модуляцией. Информационная последовательность и соответствующий ей ЧМн-сигнал приведены на рисунке 2.19.

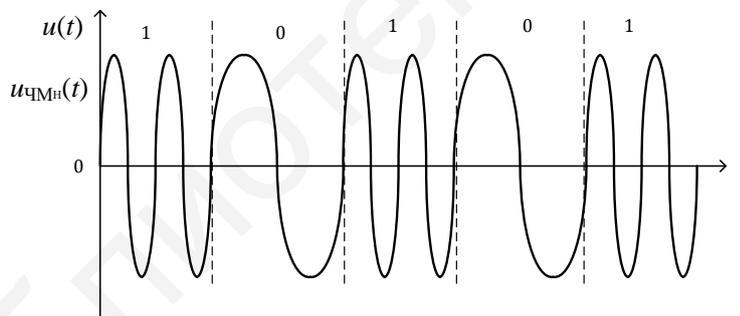


Рисунок 2.19 – Информационная последовательность $u(t)$ и ЧМн-сигнал

Двоичные ЧМ-сигналы являются сигналами с *активной паузой*, поскольку их энергия в любом единичном интервале не равна нулю [1].

Реализовать частотную манипуляцию можно на основании следующего правила:

$$u_{\text{ЧМн}}(t) = A \bar{u}(t) \cos \omega_1 t + A u(t) \cos \omega_2 t. \quad (2.64)$$

Структурная схема соответствующего модулятора приведена на рисунке 2.20, а временные диаграммы и спектры, поясняющие его работу, – на рисунке 2.21.

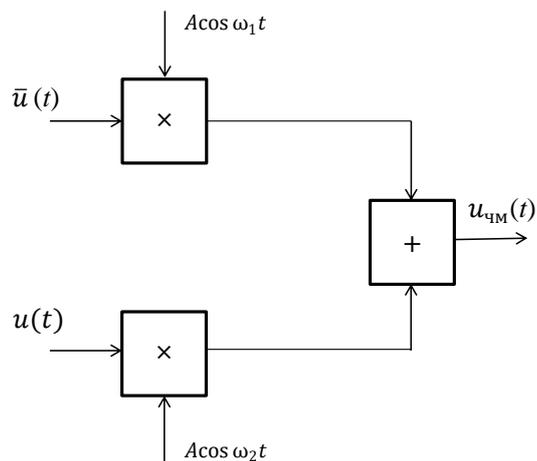


Рисунок 2.20 – Структурная схема модулятора двоичного ЧМ-сигнала

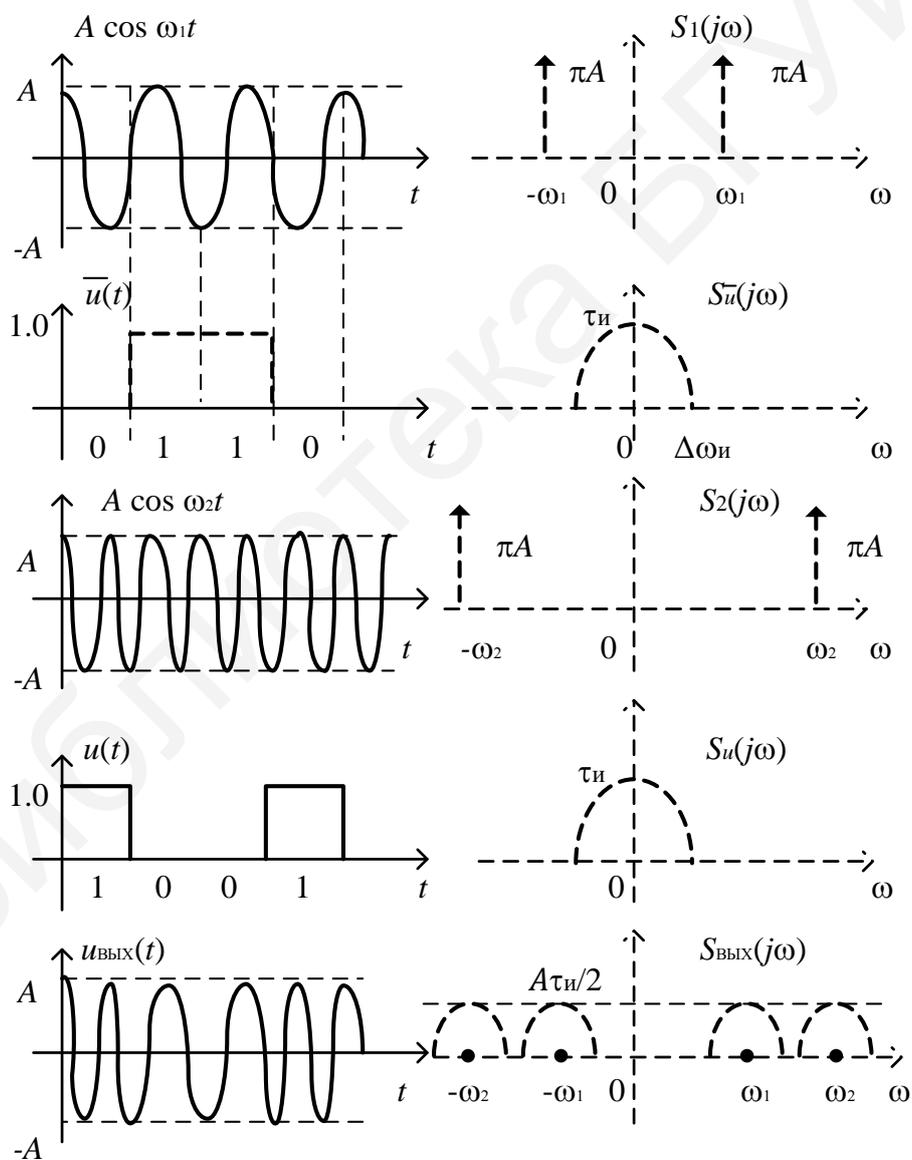


Рисунок 2.21 – Формирование двоичного ЧМ-сигнала

Согласно теоремам о спектрах, спектр двоичного ЧМ-сигнала есть сумма спектров радиоимпульсов длительностью $\tau_{\text{и}}$ (тактыый интервал двоичного информационного сигнала $u(t)$). Несущие частоты ω_1 и ω_2 спектров радиоимпульсов заданы модуляционным кодом.

Ширина спектра ЧМн-сигнала определяется шириной спектра видеоимпульса $\Delta\omega_{\text{и}} = 1/\tau_{\text{и}}$, разносом частот между соседними спектрами радиоимпульсов ($\omega_i - \omega_{i-1}, i = 2, 3, \dots, 2^k$) и числом используемых частот (2^k) [1]:

$$\Delta\omega = \sum_{i=2}^{2^k} (\omega_i - \omega_{i-1}) + 2\Delta\omega_{\text{и}}. \quad (2.65)$$

При дискретной ФМ дискретно изменяется фаза сигнала. Количество возможных значений фазы дает название модуляции [1]:

- если это число равно 2, то модуляция называется *двоичной*;
- если оно равно 2^k , где k – целое положительное число и $k > 2$, то модуляция носит название *многократной* или *многопозиционной*;
- если $k = 2$ (число возможных значений фазы равно 4), то модуляция называется *двукратной фазовой модуляцией*.

Рассмотрим фазовую манипуляцию (двоичную фазовую модуляцию). Как и в случае двоичной частотной модуляции, $k = 1$ (длина блока равна 1), $2^k = 2$, возможные кодовые слова: 0 и 1 (символы).

Информационная последовательность и соответствующий ей ФМн-сигнал приведены на рисунке 2.22.

Ширина спектра двоичного ФМ-сигнала определяется формулой (аналогичной формуле для двоичного АМ-сигнала):

$$\Delta\omega = 2\omega_{\text{в}}, \quad (2.66)$$

где $\omega_{\text{в}}$ – верхняя частота спектра информационной последовательности ($\omega_{\text{в}} = 2\pi/\tau_{\text{и}}$, где $\tau_{\text{и}}$ – длительность прямоугольного видеоимпульса информационной последовательности).

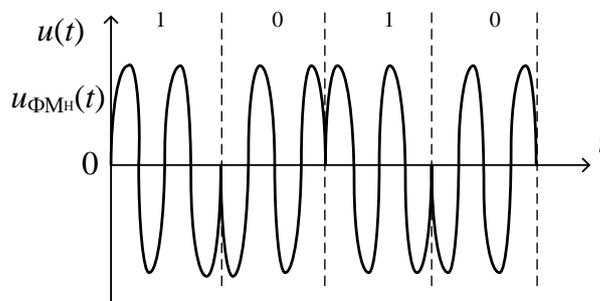


Рисунок 2.22 – Информационная последовательность $u(t)$ и ФМн-сигнал

Спектры, поясняющие работу фазового модулятора, приведены на рисунке 2.23.

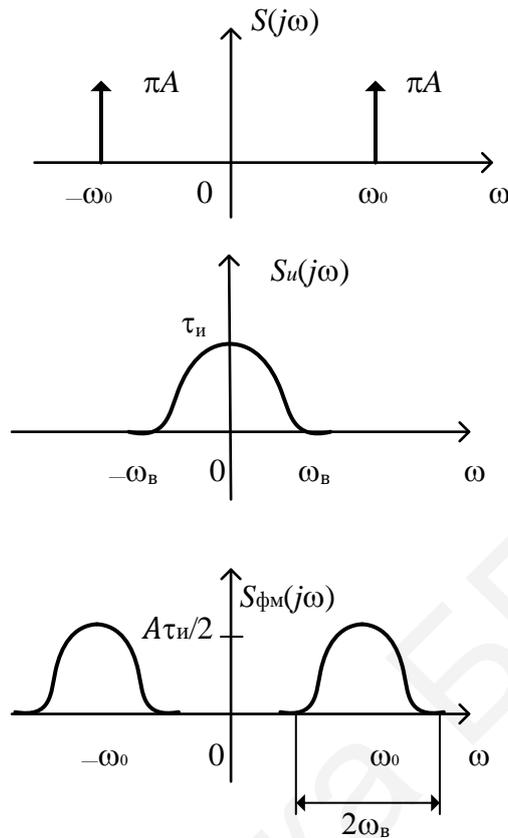


Рисунок 2.23 – Формирование двоичного ФМ-сигнала

Системам с ФМ присущ недостаток, который получил название «обратная работа». Согласно правилу формирования сигнала, на передающей стороне одна фаза несущей частоты из набора возможных принимается за нулевую, и ей ставится в соответствие определенный символ (например, «0»). Тогда символ «1» соответствует несущей с противоположной начальной фазой. На приемной стороне регистрируются сигналы с двумя противоположными фазами. Но приемному устройству в общем случае неизвестно, какая из этих фаз нулевая. Если на приемной стороне будет сделан правильный выбор фазы, переданное сообщение будет прочитано верно. В противном случае сообщение будет инвертировано.

В случае m -ичной дискретной фазовой модуляции (многократной ФМ) приемник может принять за нулевую любую из m возможных значений фазы. Если выбор не верен, сообщение исказится. В данном случае искажение не будет просто инверсией, поскольку из m возможных сообщений только одно является правильным.

Чтобы явление обратной работы отсутствовало, необходимо передать дополнительную информацию (небольшого объема, как правило, несколько бит) о

значении опорной фазы. Но алгоритм работы системы связи в этом случае становится более сложными.

Явление обратной работы отсутствует при относительной фазовой модуляции (ОФМ). Алгоритм двоичной ОФМ следующий [1]:

- если передаваемый информационный символ равен нулю, то начальная фаза радиоимпульса текущего i -го единичного интервала равна начальной фазе радиоимпульса в предыдущем $(i - 1)$ -м единичном интервале;

- если передаваемый информационный символ равен единице, то начальная фаза радиоимпульса текущего i -го единичного интервала меняется на противоположную относительно фазы радиоимпульса в предыдущем $(i - 1)$ -м единичном интервале.

В случае m -ичной ОФМ формируется модуляционный код, но в него заносятся не значения начальной фазы, как при ФМ, а значения сдвига фаз между текущим и предыдущим интервалами, соответствующие блоку сообщения длиной m .

Таким образом, при ОФМ передаваемая информация содержится не в значении начальной фазы сигнала, а в разности фаз предыдущего и текущего интервала. Поэтому демодуляция возможна только после приема предыдущего единичного интервала.

Ширина спектра сигнала с двоичной ОФМ совпадает с шириной спектра сигнала с однократной ФМ [1].

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Исследуйте амплитудно-манипулированный сигнал.

1.1. Запустите программу спектры.exe.

1.2. На панели выбора типа сигнала выберите «Амплитудно-манипулированный». На панели установки параметров сигнала введите значения амплитуды (A), периода (T_0), длительности (t_0) и частоты (f_0) из таблицы 2.1 в соответствии с вариантом, заданным преподавателем. Нажмите кнопку «Создать сигнал».

1.3. Используя курсор в графическом окне «Сигнал», определите значения амплитуды сигнала на временном интервале от 0 до 2 мс с шагом 0,125 мс и заполните таблицу 2.2. Зарисуйте сигнал.

1.4. На панели выбора вида спектра нажмите кнопку «Идеальное». Зарисуйте вид теоретического спектра, построенного на основе преобразования Фурье, и запишите значения частот составляющих спектра и их амплитуд.

1.5. На панели выбора вида спектра нажмите кнопку «Фурье». Зарисуйте спектр и сравните его с предыдущим спектром.

1.6. Изменяя параметры сигнала, зафиксируйте соответствующие им изменения спектра. Проанализируйте полученные результаты и сформулируйте выводы по работе.

2. Исследуйте фазоманипулированный и частотно-манипулированный сигналы.

Повторите пункт 1 для фазоманипулированного и частотно-манипулированного сигналов.

Таблица 2.1 – Исходные данные к лабораторной работе №2

Сигнал	Вариант			
	1	2	3	4
Амплитудно-манипулированный	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,25 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 0,75 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$
Фазоманипулированный	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,25 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 1 \text{ кГц}$
Частотно-манипулированный	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $T_0 = 2 \text{ мс},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_1 = 4 \text{ кГц}$

Таблица 2.2 – Результаты выполнения лабораторной работы №2

Сигнал	Момент времени, мс									
	0	0,125	0,25	0,375	0,5	...	1,625	1,75	1,875	2
Амплитудно-манипулированный										
Фазоманипулированный										
Частотно-манипулированный										

Контрольные задания

1. Пусть модулирующий сигнал – негармонический (пилообразный). Изобразите законы изменения частоты и фазы для ЧМ- и ФМ-сигналов.

2. Для однотонового ФМ-сигнала постройте зависимость индекса угловой модуляции m и девиации $\Delta\omega_m$ от частоты модулирующего сигнала Ω .

3. Для однотонового ЧМ-сигнала постройте зависимость индекса угловой модуляции m и девиации $\Delta\omega_m$ от частоты модулирующего сигнала Ω .

4. Радиостанция работает в диапазоне ультракоротких волн (УКВ) с несущей частотой $f_0 = 80 \text{ МГц}$. Сигнал модулируется по фазе с частотой $F = 15 \text{ кГц}$. Индекс модуляции $m = 12$. Найдите пределы, в которых изменяется мгновенная частота сигнала.

5. Используя графики функций Бесселя, изобразите спектр сигнала с однотоновой угловой модуляцией и индексом модуляции $m = 3$.

Лабораторная работа №3
Восстановление сигналов по дискретным отсчетам.
Теорема Котельникова

Цель работы: экспериментально исследовать дискретизацию и восстановление непрерывных сигналов, изучить влияние частоты дискретизации и параметров фильтра нижних частот на восстановление сигналов.

Краткие теоретические сведения

Сигналы, передаваемые в системах инфокоммуникаций, делятся на непрерывные и дискретные. Непрерывные или аналоговые сигналы существуют непрерывно в каждый момент времени и могут принимать любые значения из заданного интервала. Простейшим непрерывным сигналом является гармоническое колебание. Примерами аналогового сигнала являются также речевой сигнал (см. рисунок 1.1), световое изображение предметов и т. д.

Дискретные сигналы принимают только конечное число значений или состояний. Различают дискретизацию по времени и по уровню (квантование). Пример дискретного сигнала – сигнал, заданный в виде дискретных отсчетов (рисунок 3.1).

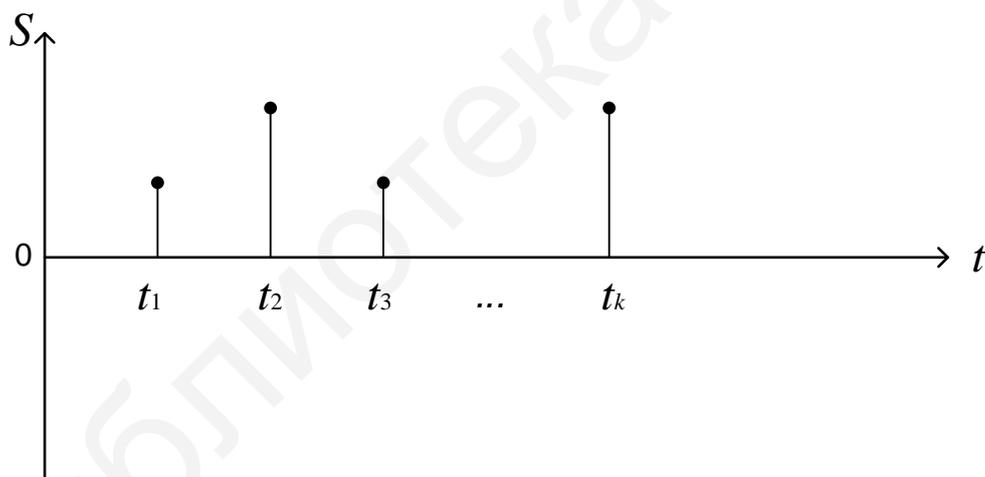


Рисунок 3.1 – Сигнал, заданный в виде дискретных отсчетов

Спектр аналоговых сигналов, как правило, бесконечный. Передать такой спектр по каналу связи физически невозможно. Но на практике в большинстве случаев это и не требуется. Во-первых, на частотах, стремящихся к бесконечности, значения составляющих спектра пренебрежимо малы по сравнению с составляющими на более низких частотах. Во-вторых, реальные устройства системы связи характеризуются конечной шириной полосы пропускания.

Поэтому в системах инфокоммуникаций пользуются моделью сигнала с ограниченным спектром. Сигналом с ограниченным спектром называют сигнал, спектр которого отличен от нуля на конечном интервале частот.

Идеальный низкочастотный сигнал

Примером сигнала с ограниченным спектром является идеальный низкочастотный сигнал (ИНС). Спектр такого сигнала задается следующей формулой и приведен на рисунке 3.2:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases} \quad (3.1)$$

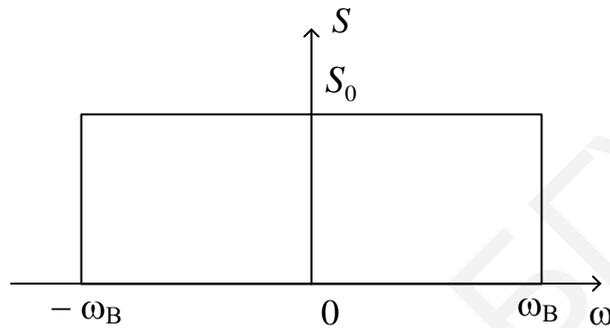


Рисунок 3.2 – Спектр идеального низкочастотного сигнала

Функцию, описывающую ИНС во временной области, можно найти, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье:

$$S(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0 \omega_B \sin \omega_B t}{\pi \omega_B t}. \quad (3.2)$$

Сигнал во временной области представляет собой функцию вида $\sin x/x$ и приведен на рисунке 3.3. Рост верхней граничной частоты спектра ω_B приводит к увеличению максимального значения $S(t)$ и частоты осцилляций функции.

Рассмотрим ИНС, смещенный относительно начала отсчета времени на величину t_0 :

$$S(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)}. \quad (3.3)$$

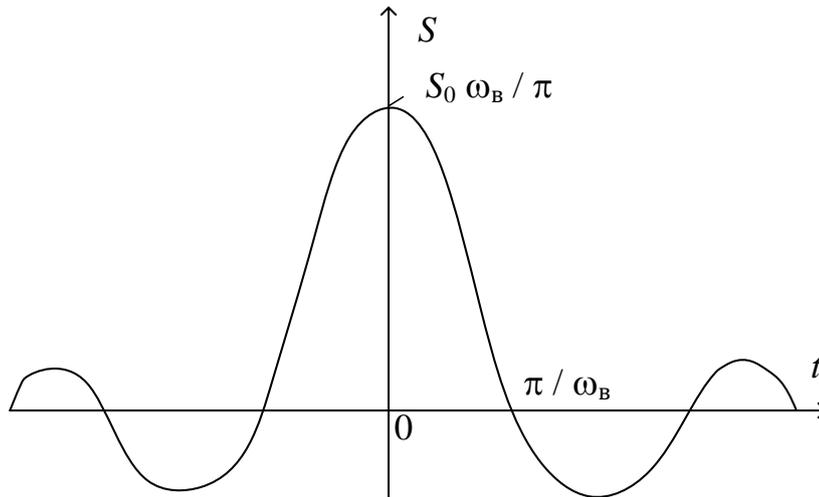


Рисунок 3.3 – Идеальный низкочастотный сигнал

Согласно теореме о сдвигах (о спектральной функции сигнала, смещенного во времени) спектр такого сигнала имеет вид

$$S(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases} \quad (3.4)$$

Как известно, частотная зависимость коэффициента передачи фильтра и его импульсная характеристика связаны преобразованием Фурье. То есть ИНС представляет собой реакцию фильтра нижних частот (ФНЧ) на входное воздействие в виде δ -функции.

Базис Котельникова

Рассмотрим возможность ортогонализации множества ИНС за счет их временного сдвига.

Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – два идеальных низкочастотных сигнала с одинаковыми значениями S_0 и ω_B . При этом сигнал $V(t)$ запаздывает во времени по отношению к $U(t)$ на величину t_0 . Тогда спектральная плотность $V(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega t_0)$. Выразим скалярное произведение сигналов $U(t)$ и $V(t)$ через их спектральные плотности. Согласно теореме Планшереля скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Поэтому

$$(U, V) = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_B \sin \omega_B t_0}{\pi \omega_B t_0}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что скалярное произведение двух одинаковых по форме ИНС равно нулю, и, следовательно, они ортогональны, если

$$\omega_B t_0 = k\pi, \quad (3.6)$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Минимальный временной сдвиг, при котором два ИНС ортогональны:

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_B} = \pm \frac{1}{2f_B}. \quad (3.7)$$

Временные диаграммы двух идеальных низкочастотных сигналов с временным сдвигом $t_0 = \pi / \omega_B$ и $t_0 = 2\pi / \omega_B$ приведены на рисунке 3.4.

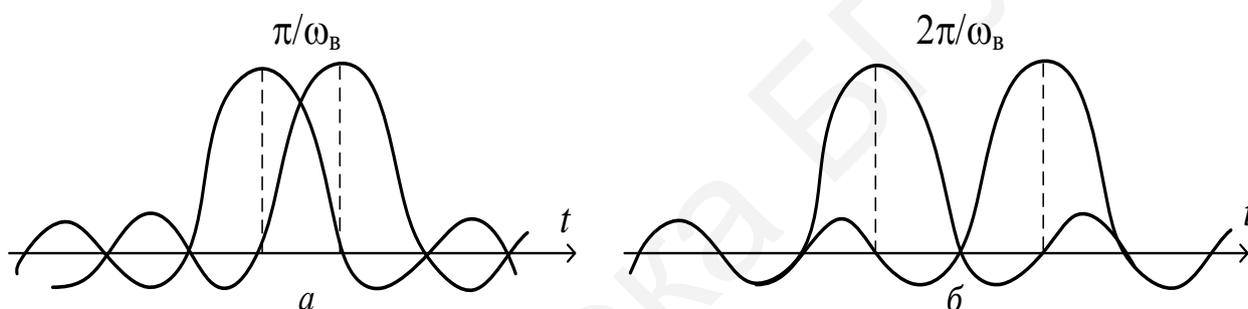


Рисунок 3.4 – Два идеальных низкочастотных сигнала с временным сдвигом $t_0 = \pi / \omega_B$ (а) и $t_0 = 2\pi / \omega_B$ (б)

Из рисунка 3.4 следует, что минимум одного ИНС соответствует максимуму другого ИНС.

В результате получен базис ортогональных функций для сигналов с ограниченным спектром.

Определим теперь, при каком значении коэффициента A норма функции вида (3.8) равна единице:

$$U_k(t) = A \left\{ \frac{\sin \omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}{\omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)} \right\}, \quad (3.8)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\frac{k\pi}{\omega_B} = t_0$.

Для этого достаточно рассмотреть одну функцию из множества (3.8), поскольку норма сигнала не зависит от временного сдвига. Проанализируем, например, $U_0(t)$ ($k = 0$):

$$U_0(t) = A \frac{\sin^2 \omega_B t}{\omega_B t}. \quad (3.9)$$

Вычислим квадрат нормы данной функции:

$$\|U_0\|^2 = \frac{A^2}{\omega_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_B t}{t^2} dt = \frac{\pi A^2}{\omega_B}. \quad (3.10)$$

Норма $\|U_0(t)\| = 1$, если

$$\frac{\pi A^2}{\omega_B} = 1, \quad (3.11)$$

где $A = \sqrt{\frac{\omega_B}{\pi}}$.

Следовательно, бесконечное множество функций

$$U_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_B}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}{\omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)} \quad (3.12)$$

образует ортонормированный базис. Это множество носит название базиса Котельникова в линейном пространстве сигналов с ограниченным спектром. Функция $U_k(t)$ вида (3.12) называется k -й отсчетной функцией. Произвольный сигнал со спектром, ограниченным сверху значением частоты ω_B , можно разложить в обобщенный ряд Фурье в этом базисе:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k U_k(t), \quad (3.13)$$

где

$$C_k = (S(t), U_k(t)). \quad (3.14)$$

Рассмотрим, как определить значения коэффициентов C_k . Используя преобразование Фурье, можно показать, что на интервале $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$ спектральная плотность отсчетной функции равна

$$U(j\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} \exp\left(\frac{-j\omega k\pi}{\omega_B}\right). \quad (3.15)$$

Воспользуемся теоремой Планшереля (формулой Рэлея). Тогда

$$C_k = (S(t), U_k(t)) = \frac{1}{2\pi} (S(j\omega), U(j\omega)),$$

$$C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp\left[\frac{jk\pi\omega}{\omega_B}\right] d\omega \right\}, \quad (3.16)$$

где $S(\omega)$ – спектр сигнала $S(t)$.

В фигурных скобках – значение функции $S(t)$ в момент времени $t = t_k$:

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_B} = \frac{k}{2f_B}. \quad (3.17)$$

Следовательно:

$$C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} S_k. \quad (3.18)$$

Таким образом, сигнал с ограниченным спектром может быть представлен в виде ряда Котельникова:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin \omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}{\omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}, \quad (3.19)$$

где S_k – мгновенное значение сигнала $S(t)$ в k -й отсчетной точке ($S_k = S(t_k)$, $t = t_k$).

Реальные сигналы имеют конечную длительность. Поэтому ряд (3.19) для сигнала длительностью от $t = 0$ до $t = (N - 1) \cdot \Delta t = (N - 1) / (2f_B)$ имеет вид

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin \omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}{\omega_B \left(t - \frac{k\pi}{\omega_B} \right)}. \quad (3.20)$$

Конечное число отсчетов N называют *выборкой* сигнала.

Теорема Котельникова

В 1933 году академиком В. А. Котельниковым была доказана теорема, получившая его имя. Она звучит так: **произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_s (Гц), может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/(2f_s)$ секунд [4].**

Погрешность восстановления реального сигнала по конечной выборке его значений зависит от отношения энергии сигнала за границей частот $\pm\omega_B$ к суммарной энергии сигнала.

Теорема Котельникова имеет фундаментальное значение для развития инфокоммуникаций. Она открыла путь к «цифровизации» аналоговых сигналов. Появилась возможность передавать непрерывные сообщения по дискретным каналам связи.

Дискретный способ передачи непрерывного сообщения позволяет:

- сократить время, в течение которого канал связи занят передачей сигнала;
- осуществить временное уплотнение канала связи, т. к. в этом случае по одному каналу можно передавать одновременно информацию о нескольких непрерывных сигналах;
- уменьшить влияние помех на качество передаваемых сообщений, поскольку появляется возможность использования оптимальных методов приема сигналов и помехоустойчивого кодирования;
- использовать для формирования и обработки аналоговых сигналов современную элементную базу в виде микроэлектронных устройств и процессоров.

Порядок выполнения лабораторной работы

Запустите программу `sampling.exe`.

1. Исследуйте видеоимпульс.

1.1. На панели «Генерирование сигнала» («*Signal Generation*») выберите вкладку «Видеоимпульс» («*Pulse*») и введите значения амплитуды («*Amplitude A*») и длительности («*Duration t₀*») сигнала из таблицы 3.1 в соответствии с заданным вариантом. Включите фильтрацию сигнала на панели «Генерирование сигнала» («*Filtered*») и установите частоту среза фильтра («*Cut-off frequency*»)

из таблицы 3.1 в соответствии с заданным вариантом. Таким образом, будет сформирован сигнал с ограниченным спектром.

Таблица 3.1 – Исходные данные к лабораторной работе №3

Исследуемый сигнал	Вариант				
	1	2	3	4	5
Видеоимпульс	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $t_0 = 0,5 \text{ мс},$ $f_{\text{среза}} = 6 \text{ кГц}$	$A = 1,5 \text{ В},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_{\text{среза}} = 2 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 2 \text{ мс},$ $f_{\text{среза}} = 2 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В},$ $t_0 = 0,75 \text{ мс},$ $f_{\text{среза}} = 6 \text{ кГц}$
Радиоимпульс	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 3 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 6 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_0 = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 6 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $t_0 = 2 \text{ мс},$ $f_0 = 1 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 0,75 \text{ В},$ $t_0 = 3 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$
Синусоида	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $f_0 = 1 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 1,5 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1,5 \text{ В},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 3 \text{ кГц},$ $f_{\text{среза}} = 4 \text{ кГц}$

1.2. На панели «Восстановление сигнала» («*Reconstruction*») выберите фильтр Баттерворта («*Butterworth*») с частотой среза 2 кГц. Установите частоту дискретизации («*Sampling rate*») 2 кГц. Нажмите кнопку «*Analyze*».

Ознакомьтесь с осциллограммами сигналов: сформированного (*Generated Signal*), дискретизированного (*Sampled signal*) и восстановленного (*Reconstructed signal*), а также с амплитудными спектрами сигналов. В окне «Восстановленный сигнал» («*Reconstructed signal*») будут изображены восстановленный сигнал (красный) и исходный сигнал (синий), сдвинутый на время задержки сигнала в восстанавливающем фильтре. Изменяя частоту дискретизации (*Sampling rate*) от 2 до 20 кГц с шагом 2 кГц, занесите в таблицу 3.2 значения ошибки восстановления (*Reconstruction Error*).

1.3. Повторите пункт 1.2 для фильтров Баттерворта (*Butterworth*) с частотами среза 4, 6, 8, 10 кГц (панель «Восстановление сигнала» («*Reconstruction*»)). Заполните таблицу 3.2.

1.4. Выберите минимальную частоту среза восстанавливающего фильтра и минимальную частоту дискретизации, при которой погрешность восстановления составляет около 1 % или менее. При этих параметрах зарисуйте осциллограммы сигналов: сформированного, дискретизированного и восстановленного, а также амплитудные спектры этих сигналов. Зарисуйте амплитудно-частотную (*Magnitude frequency response*), фазочастотную (*Phase frequency response*) и импульсную (*Impulse response*) характеристики фильтра Баттерворта с выбранной частотой среза. Для получения характеристик фильтра нажмите кнопку «*Filter responses*».

Таблица 3.2 – Результаты выполнения лабораторной работы №3

Частота среза восстанавливающего фильтра (кГц)	Частота дискретизации (кГц)									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2										
4										
6										
8										
10										

1.5. Выберите фильтр «*Max Flat*», установите выбранные в подпункте 1.4 частоту среза и частоту дискретизации и произведите моделирование. Запишите погрешность восстановления и зарисуйте осциллограмму восстановленного сигнала и его амплитудный спектр. Зарисуйте характеристики фильтра «*Max Flat*» с выбранной частотой среза.

1.6. Повторите подпункт 1.5 для фильтра Чебышева.

1.7. Выключите фильтрацию сигнала на панели «Генерирование сигнала» («*Unfiltered*»). Повторите подпункты 1.2, 1.3 и заполните таблицу 3.2 для сигнала с бесконечным спектром (без фильтрации).

1.8. Зарисуйте осциллограммы сигналов: сформированного, дискретизированного и восстановленного, а также амплитудные спектры этих сигналов, когда сигнал был восстановлен наиболее точно.

2. Исследуйте радиоимпульс.

Повторите пункт 1 для сигнала радиоимпульса, параметры которого приведены в таблице 3.1 согласно варианту. Характеристики фильтров зарисовывать не нужно.

3. Исследуйте синусоиду.

Повторите пункт 1 для сигнала синусоиды, параметры которого приведены в таблице 3.1 согласно варианту. Характеристики фильтров зарисовывать не нужно.

Контрольные задания

1. Сформулируйте теорему Котельникова и объясните область ее применения в инфокоммуникациях.

2. Как определить величину интервала дискретизации сигнала?

3. Изобразите характеристики идеального фильтра нижних частот.

4. Как по зависимости коэффициента передачи фильтра от частоты найти его импульсную характеристику?

5. От чего зависит ошибка восстановления сигнала?

Лабораторная работа №4 Импульсно-кодовая модуляция

Цель работы: экспериментально исследовать дискретизацию и восстановление непрерывных сигналов, изучить влияние параметров дискретизации и квантования, а также качества канала связи на восстановление сигнала.

Краткие теоретические сведения

Преимущества дискретных каналов связи очевидны. Поэтому возникает необходимость передачи аналоговых сообщений по дискретным каналам.

Для этого нужно представить непрерывное сообщение в цифровом виде. Цифровые сигналы – разновидность дискретных сигналов, когда квантованные отсчетные значения представляются в виде последовательности цифр (символов). При реализации преобразования «аналог – цифра» необходимо сохранить и передать без искажений основную значимую часть информации, содержащуюся в аналоговом сигнале.

Основным достоинством цифровых систем передачи информации является их помехоустойчивость, которая дает возможность обеспечить требуемые дальность и качество связи даже для каналов с плохими характеристиками.

Повысить помехоустойчивость можно, используя многократную ретрансляцию (переприем) сигналов. Для этого в пунктах ретрансляции осуществляется не только усиление, но и регенерация сигналов. Регенерация состоит в демодуляции и восстановлении цифровой последовательности с ее повторной модуляцией для последующей передачи по каналу.

Часто для передачи непрерывных сообщений по дискретному каналу используются системы с импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ).

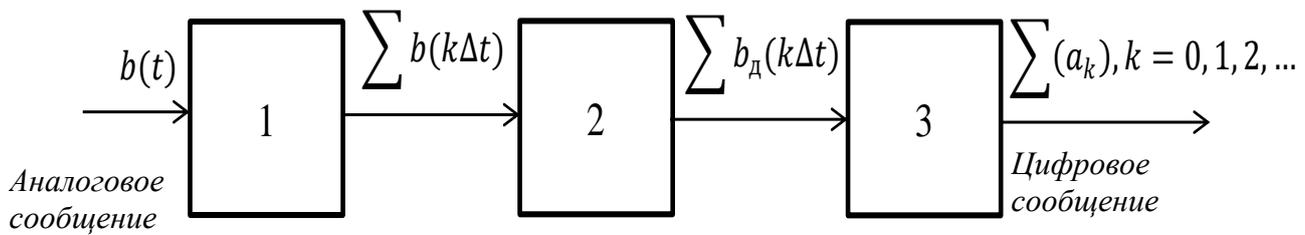
Несущим колебанием при импульсной модуляции является последовательность видеоимпульсов, как правило, прямоугольных.

В системах цифровой передачи непрерывных сообщений на передающей стороне преобразование аналогового сообщения в цифровое реализуется в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). На приемной стороне обратное преобразование «цифра – аналог» осуществляет цифроаналоговый преобразователь (ЦАП).

Аналого-цифровое преобразование включает следующие операции:

- дискретизация непрерывного сообщения по времени через интервалы Δt в соответствии с теоремой Котельникова;
- квантование по уровню полученных отсчетов мгновенных значений;
- кодирование полученной последовательности квантованных значений передаваемого сообщения в последовательность кодовых комбинаций (кодовых слов). Сформированная последовательность кодовых комбинаций передается по дискретному каналу как дискретное сообщение.

Структурная схема аналого-цифрового преобразователя приведена на рисунке 4.1.



1 – дискретизатор; 2 – квантователь; 3 – кодирующее устройство

Рисунок 4.1 – Структурная схема аналого-цифрового преобразователя

Интервал Δt , выбираемый в соответствии с теоремой Котельникова, получил название *интервала дискретизации* [1]. На выходе дискретизатора сформированы отсчетные значения сигнала.

Каждое отсчетное значение сравнивается с заранее заданными постоянными уровнями напряжения (тока), которые называются *уровнями квантования*, и округляется до ближайшего уровня. Эта операция носит название *квантования* [1].

Множество всех возможных уровней квантования формирует *шкалу квантования*. Разница между ближайшими уровнями квантования называется *интервалом квантования*. Как правило, это разница одинакова на всей шкале. В этом случае шкала квантования называется *линейной* [1].

При *кодировании* значение полученного уровня квантования переводится в двоичное число. Чаще всего десятичный номер уровня квантования переводится в двоичную систему счисления [1; 2].

Графики, поясняющие работу аналого-цифрового преобразователя, приведены на рисунке 4.2.

Погрешность, связанная с округлением значения амплитуды отсчета $b(k\Delta t)$ до значения ближайшего уровня квантования $b_д(k\Delta t)$, называется *погрешностью квантования*. Очевидно, что величина погрешности квантования уменьшается, если увеличить количество уровней квантования L . Как видно из рисунка 4.3, погрешность квантования неустранима, но ее можно контролировать. Погрешность квантования не превышает половины шага квантования Δb .

В простейшем случае, если кодирование производится безызыбычным кодом, число двоичных символов на один отсчет можно определить по формуле

$$n = \log_2 L. \quad (4.1)$$

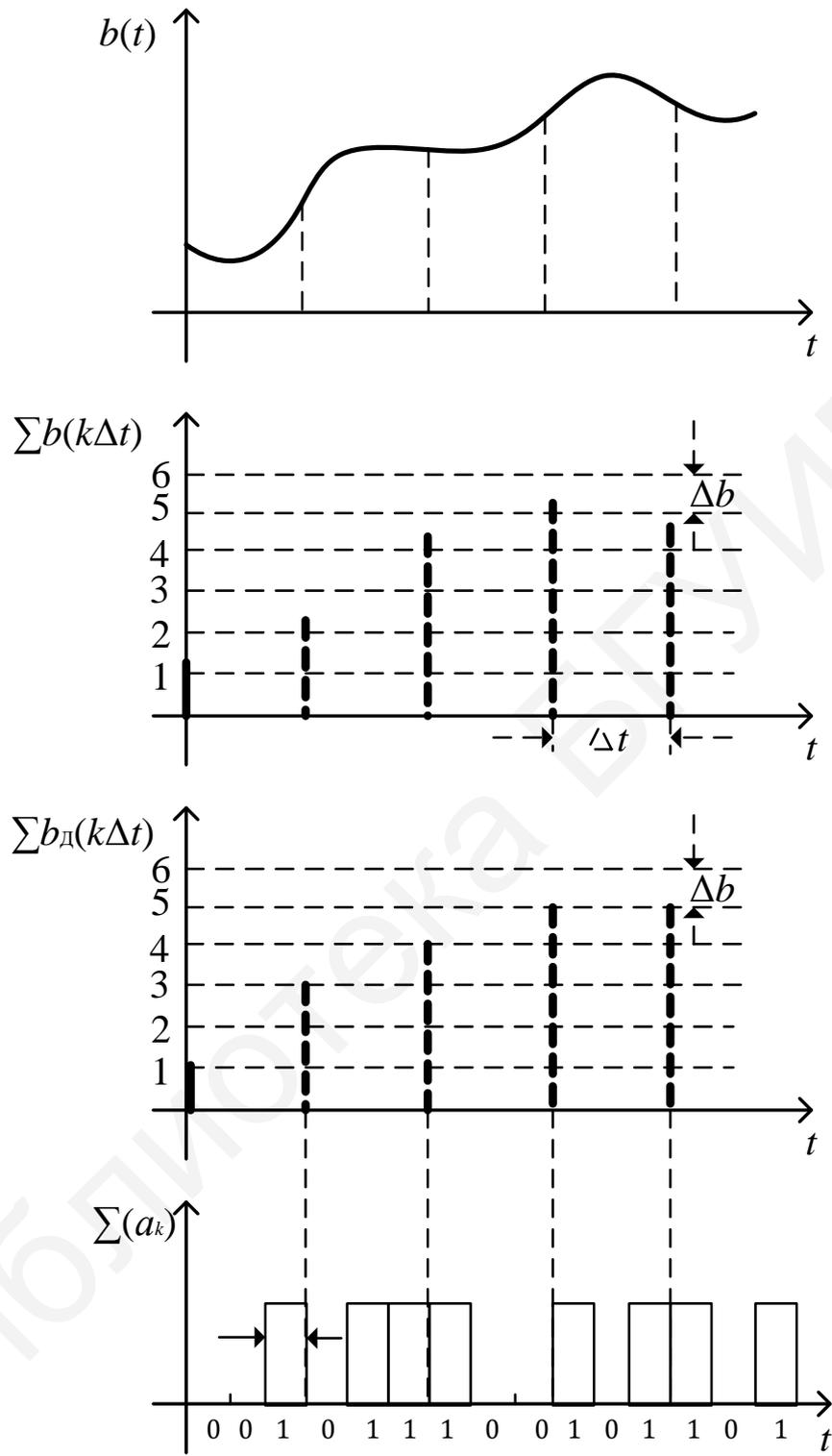


Рисунок 4.2 – Графики, поясняющие работу аналого-цифрового преобразователя

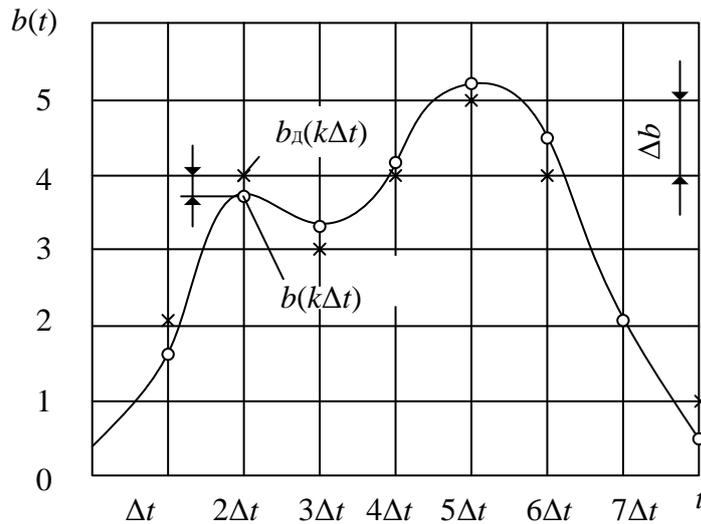


Рисунок 4.3 – Графики, поясняющие определение величины погрешности квантования

Очевидно, длина кодового слова, приходящегося на один отсчет, не должна превышать интервал дискретизации. То есть (см. рисунок 4.2)

$$n\tau_{\text{и}} \leq \Delta t, \quad (4.2)$$

где $\tau_{\text{и}}$ – длительность передачи одного символа кодового слова.

Отсюда

$$\tau_{\text{и}} \leq \Delta t / n = 1 / (2F_{\text{в}} n) = 1 / (2F_{\text{в}} \log_2 L). \quad (4.3)$$

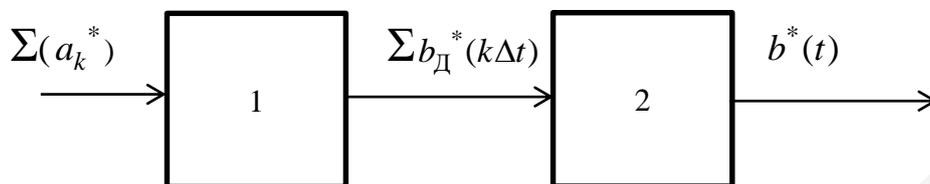
В большинстве практических применений сигнал на выходе АЦП состоит из импульсов прямоугольной формы. В этом случае ширина его спектра определяется следующим образом:

$$1 / \tau_{\text{и}} = 2F_{\text{в}} \log_2 L. \quad (4.4)$$

На практике полученный на выходе АЦП цифровой сигнал перед передачей в канал связи подвергается вторичной модуляции. При вторичной модуляции используют различные виды модуляции гармонического несущего колебания.

На приемной стороне полученный сигнал демодулируется и поступает на вход цифроаналогового преобразователя. Структурная схема ЦАП приведена на рисунке 4.4. На его вход поступает двоичная последовательность (код) a_k^* . Символ «*» означает оценочное значение. Код преобразовывается в оценки отсчетных значений $b_d^*(k\Delta t)$, которые поступают на вход фильтра нижних частот. Сумма импульсных откликов фильтра нижних частот на воздействия в

виде коротких импульсов с амплитудами $b_{д}^*(k\Delta t)$ формирует переданный первичный сигнал $b^*(t)$. Графики, поясняющие работу цифроаналогового преобразователя, приведены на рисунке 4.5.



1 – преобразователь двоичных сигналов в оценки отсчетных значений; 2 – ФНЧ

Рисунок 4.4 – Структурная схема цифроаналогового преобразователя

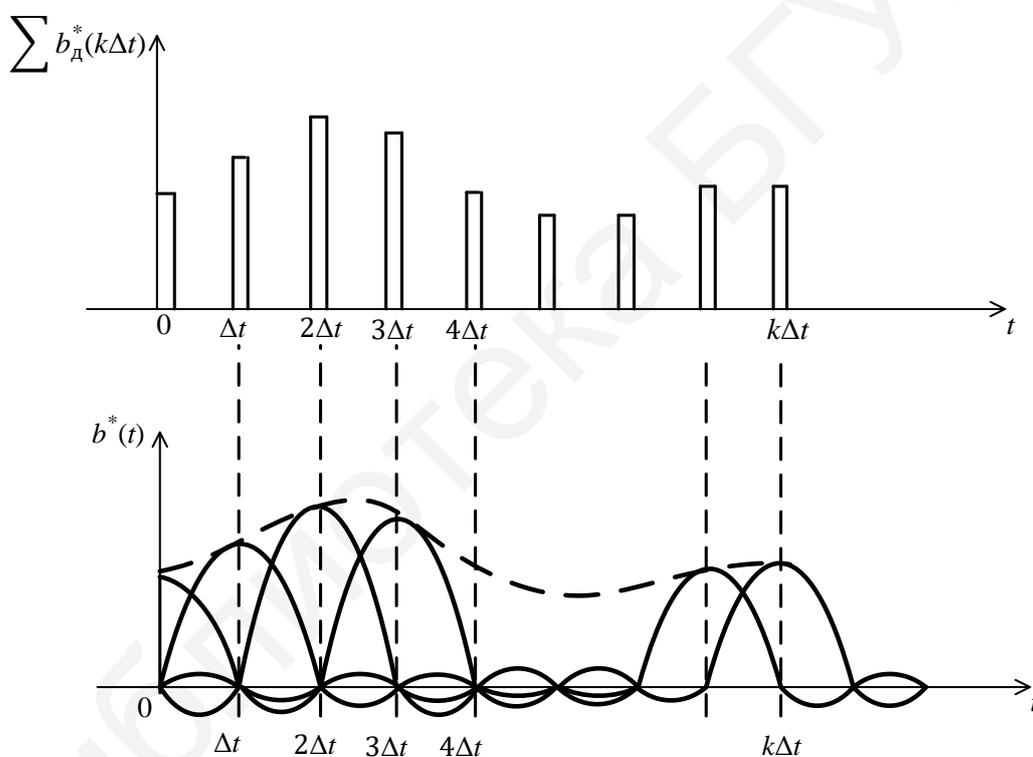


Рисунок 4.5 – Графики, поясняющие работу цифроаналогового преобразователя

Порядок выполнения лабораторной работы

Запустите программу `sampling.exe`.

1. Исследуйте видеоимпульс.

1.1. На панели «Генерирование сигнала» («*Signal Generation*») выберите вкладку «Видеоимпульс» («*Pulse*») и введите значения амплитуды («*Amplitude A*»), длительности («*Duration t_0* ») сигнала и частоту среза фильтра («*Cut-off frequency $f_{ср gen}$* ») из таблицы 4.1 в соответствии с заданным вариантом.

Под надписью «*Sampling*» установите частоту дискретизации («*Sampling rate* $f_{\text{дискр}}$ ») из таблицы 4.1 в соответствии с заданным вариантом.

Под надписью «*Reconstruction*» («Восстановление сигнала») установите частоту среза восстанавливающего фильтра $f_{\text{ср rec}}$ из таблицы 4.1 в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 4.1 – Исходные данные к лабораторной работе №4

Исследуемый сигнал	Вариант				
	1	2	3	4	5
Видеоимпульс	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 12 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $t_0 = 0,5 \text{ мс},$ $f_{\text{ср gen}} = 6 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 16 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1,5 \text{ В},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_{\text{ср gen}} = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 2 \text{ мс},$ $f_{\text{ср gen}} = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В},$ $t_0 = 0,75 \text{ мс},$ $f_{\text{ср gen}} = 6 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 16 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 6 \text{ кГц}$
Радиоимпульс	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 3 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 12 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 6 \text{ кГц}$	$A = 0,5 \text{ В},$ $t_0 = 1 \text{ мс},$ $f_0 = 3 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 6 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 16 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 8 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $t_0 = 1,5 \text{ мс},$ $f_0 = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 6 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 16 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 8 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $t_0 = 2 \text{ мс},$ $f_0 = 1 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 12 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 6 \text{ кГц}$	$A = 0,75 \text{ В},$ $t_0 = 3 \text{ мс},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 12 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 6 \text{ кГц}$
Синусоида	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 2 \text{ В},$ $f_0 = 1 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 1,5 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1,5 \text{ В},$ $f_0 = 2 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$	$A = 1 \text{ В},$ $f_0 = 3 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср gen}} = 4 \text{ кГц},$ $f_{\text{дискр}} = 8 \text{ кГц},$ $f_{\text{ср rec}} = 4 \text{ кГц}$

1.2. Под надписью «*Quantization & Coding*» установите длину кодовой комбинации (*Codeword size*) – 8. Под надписью «*Channel*» установите коэффициент битовых ошибок в канале (*BER – Bit Error Rate*) – 0. Нажмите кнопку «*Analyze*».

Ознакомьтесь с осциллограммами сигналов: сформированного (*Generated signal*), дискретизированного (*Sampled signal*), квантованного (*Quantized signal*), декодированного (*Decoded signal*) и восстановленного (*Reconstructed signal*). В окне «Восстановленный сигнал» («*Reconstructed signal*») будут изображены восстановленный сигнал (красный) и исходный сигнал (синий), сдвинутый на время задержки сигнала в восстанавливающем фильтре.

Изменяя длину кодовой комбинации от 1 до 10, занесите в таблицу 4.2 значения ошибки восстановления (*Reconstruction Error*).

Для каждого значения длины кодовой комбинации вычислите количество уровней квантования и битовую скорость передачи, результаты занесите в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Зависимость ошибки восстановления от длины кодовой комбинации

Длина кодовой комбинации	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ошибка восстановления										
Количество уровней квантования										
Битовая скорость передачи										

1.3. Зарисуйте осциллограммы всех сигналов для длины кодовой комбинации, равной 8.

Зарисуйте осциллограммы квантованного и восстановленного сигналов для длины кодовой комбинации, равной 2.

1.4. Под надписью «*Quantization & Coding*» установите длину кодовой комбинации (*Codeword size*) – 8.

Изменяя коэффициент битовых ошибок в канале, занесите в таблицу 4.3 значения ошибки восстановления.

Таблица 4.3 – Зависимость ошибки восстановления от коэффициента битовых ошибок в канале

Коэффициент битовых ошибок в канале	0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Ошибка восстановления					

1.5 Под надписью «*Channel*» установите коэффициент битовых ошибок в канале (*BER – Bit Error Rate*) – 10^{-3} . Нажимая кнопку «*Analyze*», добейтесь видимых искажений восстановленного сигнала и зарисуйте восстановленный сигнал. Повторите этот пункт для коэффициентов битовых ошибок 10^{-2} , 10^{-1} .

2. Исследуйте радиоимпульс.

Повторите пункт 1 для сигнала радиоимпульса, параметры которого приведены в таблице 4.1 согласно варианту.

3. Исследуйте синусоиду.

Повторите пункт 1 для сигнала синусоиды, параметры которого приведены в таблице 4.1 согласно варианту.

Контрольные задания

1. Что представляют собой сигналы с импульсной модуляцией?
2. Почему восстановленный сигнал на выходе фильтра нижних частот не точно соответствует исходному аналоговому сигналу $b(t)$?
3. Число уровней квантования $L = 256$. Чему равна длина кодового слова, приходящегося на один отсчет?
4. Как определить погрешность квантования для линейной шкалы?
5. Изобразите структурные схемы АЦП и ЦАП и поясните принцип их работы.

Лабораторная работа №5

Исследование законов распределения мгновенных значений случайных сигналов

Цель работы: приобрести первичные навыки статистического анализа случайных сигналов, экспериментально определить основные статистические характеристики случайных сигналов.

Краткие теоретические сведения

Большинство сигналов, с которыми работают системы связи, являются случайными. Особенностью случайного процесса является то, что значения, которые он принимает в момент времени t , случайны (в отличие от детерминированных сигналов). Если речь идет об электрических сигналах, то это значения напряжения или тока.

Различают теорию случайных величин и теорию случайных процессов. В теории случайных величин изучаются результаты экспериментов и их значения фиксированы. А случайные сигналы являются функциями времени, и для их рассмотрения методов классической теории вероятностей недостаточно. Случайные сигналы изучаются в теории случайных процессов.

Известно, что детерминированные сигналы можно описать функциональными зависимостями. Если построить зависимость мгновенных значений случайного сигнала от времени, то в общем случае получим только реализацию случайного процесса. Случайным процессом, как показано на рисунке 5.1, будет являться бесконечная совокупность реализаций, формирующая статистический ансамбль [1]. Примеры ансамбля реализаций – сигналы, которые одновременно вырабатывают одинаковые генераторы шумового напряжения, либо сигналы на выходах многоканальной системы связи.

На практике часто работают с сигналами, у которых случайной величиной является только один параметр, а другие параметры определены (детерминированы). Таким сигналом является, например, гармонический сигнал вида $U \cos(\omega t + \varphi)$ со случайной амплитудой U . При этом два других параметра (частота ω и фаза φ) известны. Амплитуда принимает определенное значение в каждой реализации, которое заранее не известно. Такие случайные процессы называются квазидетерминированными случайными процессами.

Вид детерминированных сигналов известен заранее (до опыта). Вид реализации случайного процесса заранее не известен. Однако, изучая многократные реализации случайного процесса в одинаковых условиях, можно установить определенные закономерности.

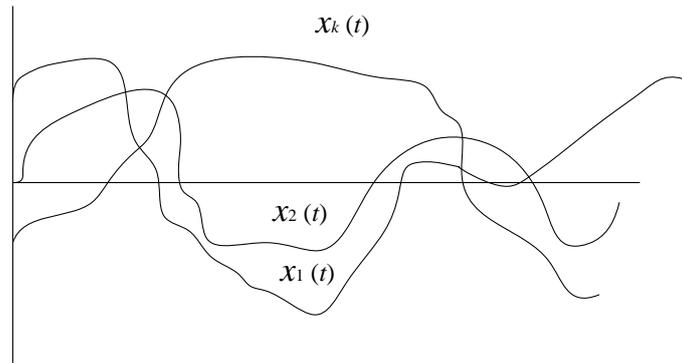


Рисунок 5.1 – Ансамбль реализаций случайного процесса

**Статистические характеристики случайных величин
и случайных процессов**

Обозначим X случайную величину, которая в i -м эксперименте принимает случайное значение x_i из множества вещественных чисел. Рассмотрим функцию $F(x)$ вещественного аргумента x , определяемую как вероятность P того, что случайная величина X примет значение, равное или меньшее конкретного x :

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (5.1)$$

Определенная таким образом функция $F(x)$ будет неслучайной функцией. Она называется функцией распределения (интегральным законом распределения вероятностей) случайной величины X .

Когда случайная величина X определена на всем множестве вещественных чисел, функция $F(x)$ имеет вид гладкой неубывающей функции с областью значений от 0 до 1:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (5.2)$$

При этом, как видно из рисунка 5.2,

$$F(-\infty) = 0; \quad (5.3)$$

$$F(\infty) = 1. \quad (5.4)$$

Очевидно, что вероятность попадания случайной величины в интервал значений от x_1 до x_2 можно определить следующим образом:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.5)$$

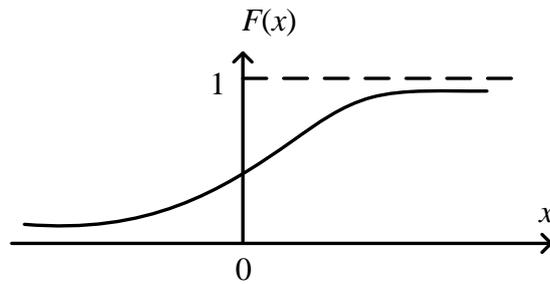


Рисунок 5.2 – Вид функции распределения (интегрального закона распределения вероятностей) случайной величины X

Найдем производную $p(x)$ функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x) / dx. \quad (5.6)$$

Функция $p(x)$ называется плотностью распределения вероятности (плотностью вероятности) случайной величины X или дифференциальным законом. Взаимосвязь функций $p(x)$ и $F(x)$ можно показать следующим образом:

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx. \quad (5.7)$$

Тогда

$$P(x_1 \leq x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.8)$$

Таким образом, величина $p(x)dx$ представляет собой вероятность попадания случайной величины X в интервал значений $(x, x + dx)$.

Если X – непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $p(x)$ является гладкой функцией (рисунок 5.3).

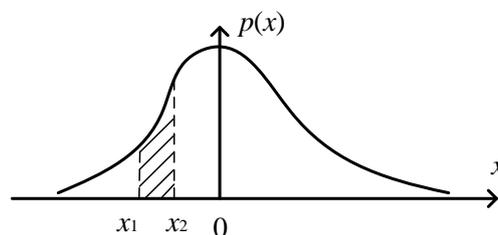


Рисунок 5.3 – Вид плотности распределения вероятности (дифференциального закона распределения вероятностей) непрерывной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина, т. е. величина, принимающая только фиксированные значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с вероятностями $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Причем P_i – вероятность того, что $X = x_i$. В этом случае плотность вероятности является суммой дельта-функций (рисунок 5.4):

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i). \quad (5.9)$$

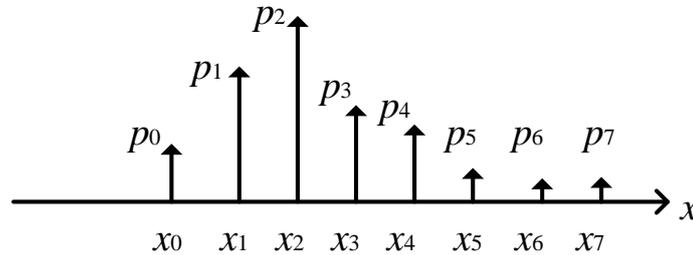


Рисунок 5.4 – Вид плотности распределения вероятности (дифференциального закона распределения вероятностей) дискретной случайной величины

Очевидно, что плотность вероятности и для дискретной, и для непрерывной случайной величины является *неотрицательной*:

$$p(x) \geq 0 \text{ – для непрерывной случайной величины;} \quad (5.10)$$

$$P_i \geq 0 \text{ – для дискретной случайной величины.} \quad (5.11)$$

Очевидно также, что плотность вероятности должна удовлетворять *условию нормировки*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \text{ – для непрерывной случайной величины;} \quad (5.12)$$

$$\sum_i P_i = 1 \text{ – для дискретной случайной величины.} \quad (5.13)$$

Рассмотрим характеристики развивающихся во времени случайных процессов. Обозначим как $X(t)$ случайный процесс, представляющий собой ансамбль из n реализаций $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Пусть t_1 – произвольный момент времени. Определив значения $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)\}$, получим одномерное сечение случайного процесса и случайную величину $X(t_1)$. Плотность вероятности этой случайной величины $p(X, t_1)$ есть одномерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ в момент времени t_1 (рисунок 5.5).

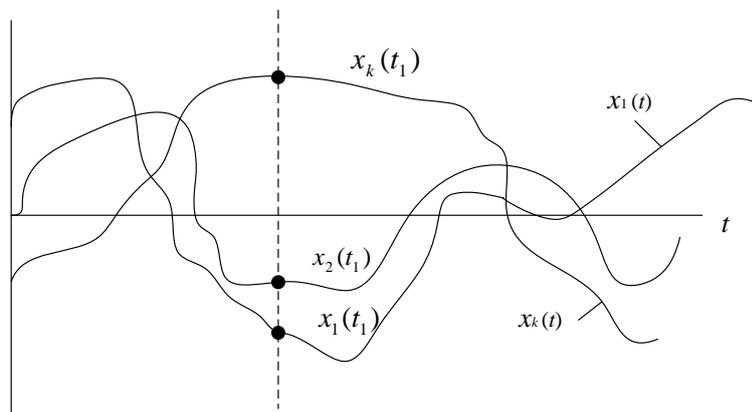


Рисунок 5.5 – Определение одномерной плотности вероятности случайного процесса $X(t)$ в момент времени t_1

Одномерная плотность вероятности характеризует случайный процесс лишь в один момент времени и не позволяет судить о развитии и поведении случайного процесса во времени. Дополнить сведения о рассматриваемом процессе позволяет рассмотрение двух его сечений в моменты времени t_1 и t_2 ($t_1 \neq t_2$). Получаем двумерную случайную величину $\{X_1, X_2\}$, которая описывается двумерной плотностью вероятности $p(X_1, X_2, t_1, t_2)$. Двумерная плотность вероятности характеризует статистическую взаимосвязь между значениями случайной величины в два момента времени.

Рассматривая случайный процесс в n моментов времени ($n > 2$), получим многомерную плотность вероятности $p(X_1, X_2, \dots, X_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Необходимо, чтобы многомерная плотность вероятности удовлетворяла условию нормировки и была неотрицательной. Кроме того, многомерная плотность вероятности должна удовлетворять условию симметрии, т. е. не зависеть от порядка аргументов.

Случайный процесс описывается при помощи n -мерной плотности вероятности тем детальнее, чем больше n .

Моментные функции случайных процессов

В ряде случаев на практике необходимо получить менее детальные характеристики случайных процессов. Для этого определяют моменты случайных величин в сечениях случайного процесса. В общем случае моменты зависят от времени, поэтому называются моментными функциями. Наибольшее практическое значение имеют математическое ожидание, дисперсия и функция корреляции.

Математическим ожиданием называется начальный момент первого порядка:

$$m(t) = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) dx. \quad (5.14)$$

Математическое ожидание – это среднее значение процесса $X(t)$ по ансамблю реализаций в момент времени t . Таким образом, усреднение проводится по ансамблю реализаций случайного процесса.

Разность между случайным процессом и его математическим ожиданием называется центрированным процессом.

Дисперсия или центральный момент второго порядка – это математическое ожидание квадрата центрированного процесса:

$$D(t) = \sigma^2(t) = \overline{[X(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m(t)]^2 p(x, t) dx. \quad (5.15)$$

Дисперсия характеризует степень разброса мгновенных значений реализаций процесса в фиксированном сечении (в момент времени t) относительно среднего значения. Величина σ называется среднеквадратичным отклонением (СКО).

Рассмотрим пример. На рисунке 5.6, *a* показаны возможные реализации процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ с различными математическими ожиданиями, а на рисунке 5.6, *б* – с одинаковыми математическими ожиданиями, но разными дисперсиями.

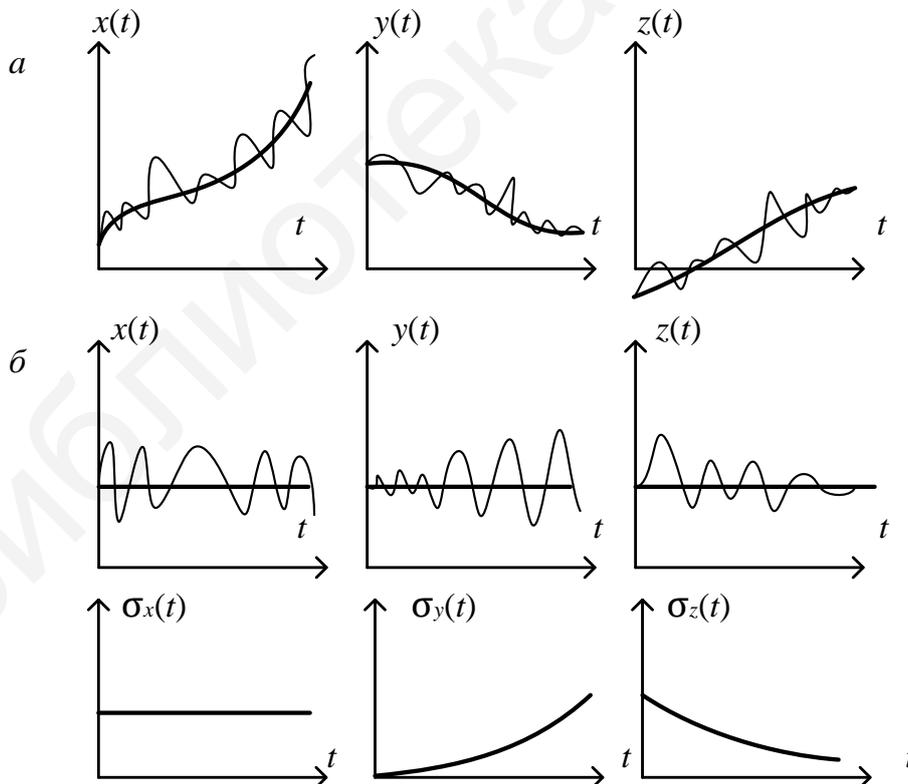


Рисунок 5.6 – Реализации процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Важнейшей характеристикой случайного процесса является двумерный центральный момент второго порядка – функция корреляции случайного процесса $X(t)$, определяемая следующим образом:

$$R(t_1, t_2) = \overline{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int [X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)] p(X_1, X_2, t_1, t_2) dX_1 dX_2. \quad (5.16)$$

Функция корреляции есть математическое ожидание произведения двух сечений центрированного случайного процесса. Эта функция характеризует степень статистической связи случайных величин в сечениях $t = t_1, t = t_2$.

В случае $t_1 = t_2$ функция корреляции является дисперсией:

$$R(t_1, t_2) = D(t) = \sigma^2(t). \quad (5.17)$$

Свойства случайных процессов

1. Стационарность.

Случайные процессы можно разделить на два больших класса: нестационарные и стационарные.

Случайные процессы с одинаковыми статистическими характеристиками во всех сечениях называются **стационарными** случайными процессами. Вероятностные характеристики стационарных процессов не меняются при изменении начала отсчета времени.

Различают стационарные случайные процессы в узком и широком смысле. Процесс является стационарным в *узком* смысле, если любая n -мерная плотность вероятности не зависит от временного сдвига τ .

Случайный процесс называется стационарным в *широком смысле*, если его математическое ожидание m и дисперсия σ^2 не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от $\tau = |t_2 - t_1|$. Для такого процесса

$$R(t_1, t_2) = R(\tau). \quad (5.18)$$

Если процесс стационарен в узком смысле, то он является стационарным в широком смысле. Обратное утверждение не верно.

Функция корреляции стационарного случайного процесса является четной:

$$R(\tau) = R(-\tau). \quad (5.19)$$

Модуль функции корреляции стационарного случайного процесса максимален при $\tau = 0$:

$$|R(\tau)| = R(0) = \sigma^2. \quad (5.20)$$

Нормированная функция корреляции определяется следующим образом:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}; \quad (5.21)$$

$$r(0) = 1. \quad (5.22)$$

2. Эргодичность.

Среди всех стационарных случайных процессов наиболее удобны для анализа (особенно аппаратного) так называемые эргодические процессы. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при нахождении его моментных функций усреднение по статистическому ансамблю можно заменить усреднением *по времени* для достаточно длительной реализации. То есть для определения характеристик процесса операция усреднения выполняется над единственной реализацией $x(t)$ длительностью T . Таким образом, статистические характеристики эргодических процессов, полученные усреднением по ансамблю возможных реализаций, не отличаются от характеристик, полученных усреднением во времени в пределах одной реализации. Свойства случайных процессов можно проиллюстрировать рисунком 5.7.

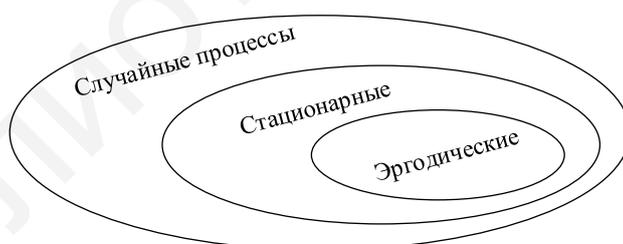


Рисунок 5.7 – Свойства случайных процессов

Обозначим усреднение по времени как $\langle \rangle$.

Тогда математическое ожидание эргодического случайного процесса определяется по формуле

$$m = X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (5.23)$$

и является постоянной составляющей выбранной реализации.

Дисперсия эргодического случайного процесса определяется как

$$\sigma^2 = \langle [X(t) - m]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - m]^2 dt = X^2(t) - m^2. \quad (5.24)$$

Значение $\langle X^2(t) \rangle$ есть мощность реализации, величина m^2 – мощность постоянной составляющей. Следовательно, дисперсия является мощностью переменной (флуктуационной) составляющей эргодического процесса.

Функция корреляции эргодического случайного процесса определяется по формуле

$$R(\tau) = \langle [X(t) - m][X(t + \tau) - m] \rangle. \quad (5.25)$$

Чтобы случайный процесс, стационарный в широком смысле, являлся эргодическим, достаточно стремление к нулю функции корреляции при временном сдвиге $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0. \quad (5.26)$$

Для дискретной эргодической случайной величины математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$m = \sum_i x_i P_i; \quad (5.27)$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - m)^2 P_i. \quad (5.28)$$

Для непрерывной эргодической случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют следующий вид:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx; \quad (5.29)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx. \quad (5.30)$$

Функция корреляции двух случайных процессов

Часто необходимо установить степень статистической связи между двумя стационарными случайными процессами $X(t)$ и $Y(t)$. Поэтому вводят понятие взаимной функции корреляции этих процессов:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{[X(t_1) - m_x][Y(t_2) - m_y]}; \quad (5.31)$$

$$R_{yx}(t_1, t_2) = \overline{[Y(t_1) - m_y][X(t_2) - m_x]}. \quad (5.32)$$

Говорят, что случайные процессы стационарно связаны, если функции $R_{xy}(t_1, t_2)$ и $R_{yx}(t_1, t_2)$ зависят не от аргументов t_1 и t_2 , а от разности $\tau = t_2 - t_1$. Тогда

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau). \quad (5.33)$$

Рассмотрим статистически независимые случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$. Тогда для мгновенных значений $X = X(t)$ и $Y_\tau = Y(t + \tau)$ двумерная совместная плотность вероятности равна

$$P(X, Y_\tau) = P(X)P(Y_\tau). \quad (5.34)$$

Следовательно,

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)P(X)dX \int_{-\infty}^{\infty} (Y_\tau - m_y)P(Y_\tau)dY_\tau = 0. \quad (5.35)$$

Таким образом, статистически независимые случайные процессы некоррелированы. Обратное утверждение верно не всегда.

Рассмотрим примеры статистических характеристик случайных процессов.

На рисунке 5.8 приведены дифференциальный закон (плотность распределения вероятности) и реализация случайных процессов.

На рисунке 5.8, *а* изображено синусоидальное колебание с постоянной амплитудой и случайной начальной фазой, фаза распределена равномерно в интервале $[0, 2\pi]$.

На рисунке 5.8, *б* изображено пилообразное периодическое колебание с постоянной амплитудой A случайным равномерно распределенным на интервале $[0, T_0]$ параметром сдвига (T_0 – период сигнала).

На рисунке 5.8, *в* изображен нормальный случайный процесс с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (5.36)$$

где m – математическое ожидание;
 σ^2 – дисперсия.

На рисунке 5.8, z изображен случайный клипированный сигнал, образованный путем квантования на два уровня нормального случайного процесса $X_3(t)$, где u – уровень квантования.

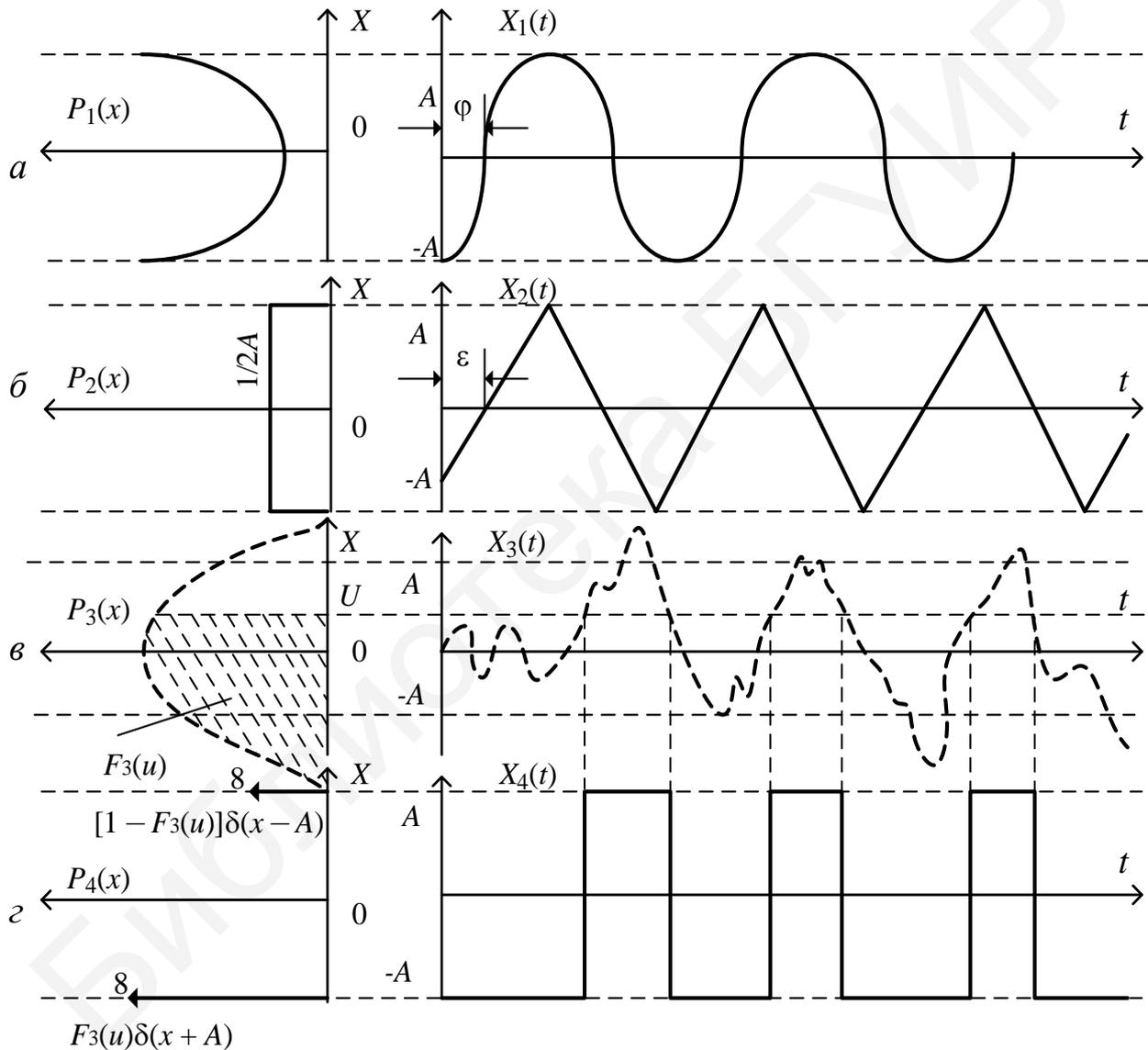


Рисунок 5.8 – Дифференциальный закон (плотность распределения вероятности) и реализация случайных процессов

Нормальный (гауссов) случайный процесс занимает особое место в теории электрической связи. Это обусловлено следующими особенностями этого процесса:

1) в природе большинство процессов либо нормальные, либо близки к нормальному;

2) согласно центральной предельной теореме, плотность вероятности суммы приближается к нормальной с увеличением количества слагаемых, вне зависимости от того, какой вид имеют плотности вероятности отдельных слагаемых;

3) при прохождении нормальных случайных сигналов через линейные цепи процесс остается нормальным.

Определение закона распределения и статистических параметров

Для определения вида и параметров исследуемого закона распределения область возможных значений случайной функции $x(t)$ разбивается на N интервалов (дифференциальных коридоров) шириной Δx_i , $i = 1, N$. Проводятся M экспериментов, в результате которых определяются M значений случайной функции $x(t)$, т. е. определяются случайные числа x_j , $j = 1, M$. С целью получения достаточно большого объема статистического материала количество экспериментов $M > 2000$. После выполнения экспериментов фиксируется число n_i попаданий случайных чисел x_j в интервал Δx_i . Очевидно, что $\sum n_i = M$. Частоты попаданий значений случайной функции $x(t)$ в эти интервалы принимаются за оценки вероятности P_i попадания значений случайной функции $x(t)$ в i -й дифференциальный коридор:

$$P_i = \frac{n_i}{M}.$$

В свою очередь, оценку плотности распределения в каждом из дифференциальных коридоров можно определить следующим образом:

$$p_i(x) = \frac{P_i}{\Delta x_i}.$$

Пользуясь полученными результатами, т. е. значениями $p_i(x)$, Δx_i и x_i (середины дифференциального коридора), можно построить ступенчатую кривую $p^*(x)$, которая называется гистограммой плотности распределения. Площадь под каждым фрагментом гистограммы в пределах Δx_i численно равна площади, занимаемой истинной кривой распределения $p(x)$ на данном интервале.

Количество N дифференциальных коридоров должно быть в пределах 10–30. Дальнейшее увеличение их количества не приводит к получению более точного

закона $p(x)$, т. к. с ростом N уменьшается величина интервала Δx_i , что ухудшает условия для точного измерения n_i .

Полученные результаты позволяют вычислить оценки математического ожидания и дисперсии случайного процесса $x(t)$:

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i \cdot P_i; \quad D_x = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 \cdot P_i.$$

При вычислении m_x и D_x по этим формулам учитывается, что если значение реализации случайного процесса $x(t)$ попадает в i -й дифференциальный коридор, то ему приписывается значение x_i (середина дифференциального коридора).

Порядок экспериментального определения закона распределения и статистических параметров проиллюстрирован на рисунках 5.9 и 5.10.

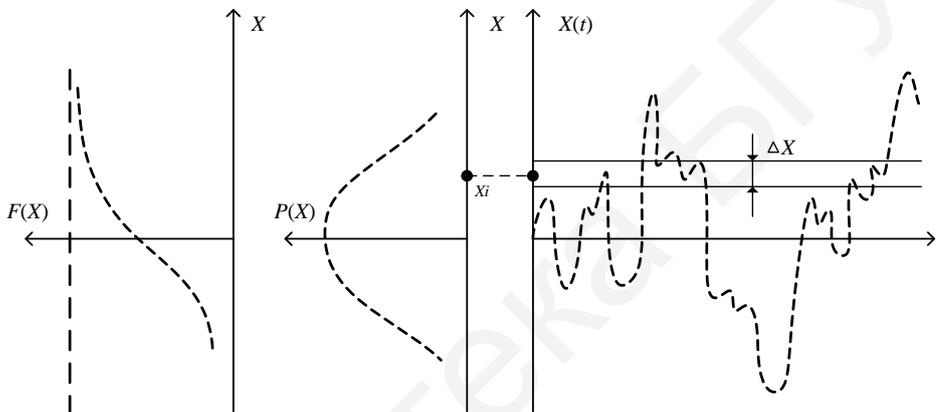


Рисунок 5.9 – Случайный сигнал $X(t)$ и его законы распределения

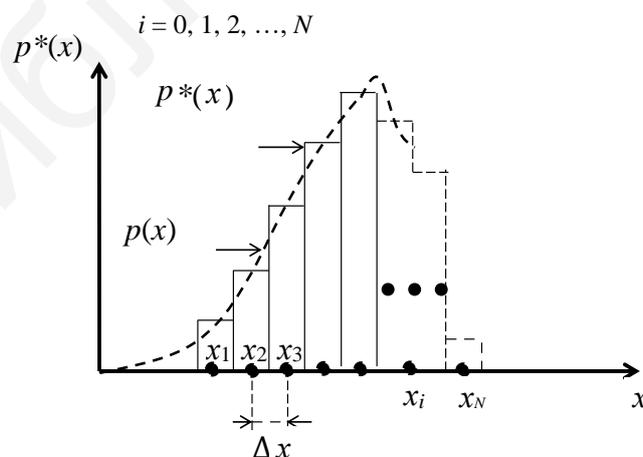


Рисунок 5.10 – Истинная кривая дифференциального закона распределения вероятностей $p(x)$ и гистограмма $p^*(x)$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Исследуйте статистические характеристики узкополосного случайного сигнала:

1.1. Закон распределения узкополосного случайного сигнала $x(t)$.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab1sig1* и нажмите «*Enter*».

В графическом окне «Реализация №1» будут изображены гистограмма и график плотности распределения вероятностей реализации узкополосного случайного сигнала $x(t)$. В окне «Таблица №1» выводятся значения n_i – число попаданий случайных чисел x_j в интервал Δx_i , которые определяют высоты столбиков гистограммы.

В графических окнах «Реализация №2» и «Реализация №3» изображается только график плотности распределения вероятностей.

Для реализации №1:

- зарисуйте гистограмму и график $p(x)$;
- пользуясь полученными статистическими данными, вычислите P_i и $p_i(x)$, заполните таблицу 5.1;
- укажите на графике закона распределения численные значения $p(x)$;
- вычислите оценки математического ожидания m_x и дисперсии D_x ;
- вычислите ΣP_i ;
- по данным таблицы 5.1 постройте график интегрального закона распределения (функции распределения) узкополосного случайного сигнала;
- определите вероятность попадания мгновенного значения случайного сигнала в интервал $[-2, 1]$.

Для реализаций №2 и №3:

- зарисуйте графики $p(x)$;
- определите **приблизительно** (не производя вычислений) значения m_x и D_x .

Таблица 5.1 – Таблица статистических данных

i	1	2	3	...	29	30
n_i				...		
P_i				...		
$p_i(x)$...		

1.2. Закон распределения огибающей узкополосного случайного сигнала.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab1sig2* и нажмите «*Enter*».

Выполните все действия согласно подпункту 1.1. При вычисление вероятности попадания мгновенного значения случайного сигнала в заданный интервал используйте интервал $[1, 4]$.

1.3. Закон распределения начальной фазы узкополосного случайного сигнала.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab1sig3* и нажмите «Enter».

Выполните все действия согласно подпункту 1.1.

2. Исследуйте статистические характеристики клипированного сигнала.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab1sig4* и нажмите «Enter».

В графических окнах «Реализация №X» будут изображены гистограммы плотности распределения вероятностей клипированного случайного сигнала. В окнах «Таблица №X» выводятся значения n_i – число попаданий случайных чисел x_j в интервал Δx_i , которые определяют высоты столбиков гистограммы.

Для каждой реализации:

- зарисуйте гистограмму $p(x)$;
- пользуясь полученными статистическими данными, вычислите вероятности $P_1 = P(x(t) = x_1)$ и $P_2 = P(x(t) = x_2)$;
- вычислите оценки математического ожидания m_x и дисперсии D_x ;
- вычислите ΣP_i ;
- по статистическим данным постройте график интегрального закона распределения (функции распределения) клипированного сигнала.

3. Исследуйте статистические характеристики гармонического сигнала со случайной фазой.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab1sig5* и нажмите «Enter».

Выполните все действия согласно подпункту 1.1.

Контрольные задания

1. Какими характеристиками описывается случайный процесс (случайный электрический сигнал)?

2. В чем заключаются эргодические свойства случайных процессов?

3. Приведите схемы устройств для измерения математического ожидания и дисперсии случайного сигнала.

4. Как объяснить вид законов распределения случайных процессов, исследованных в данной лабораторной работе?

Лабораторная работа №6

Исследование прохождения случайных сигналов через электрические цепи

Цель работы: приобрести первичные навыки в исследовании статистических характеристик случайных сигналов, экспериментально определить законы распределения случайных сигналов на выходе линейных и нелинейных электрических цепей.

Краткие теоретические сведения

Линейные цепи

Линейные цепи характеризуются тем, что к ним применим принцип суперпозиции. Этот принцип используется во всех методах анализа прохождения сигналов через линейные цепи (за исключением классического, основанного на законах Кирхгофа). Сущность принципа суперпозиции заключается в том, что сигнал на входе цепи разбивается на сумму элементарных сигналов. Используя одну из характеристик цепи (передаточную функцию, импульсную характеристику), рассчитывают отклик на каждый элементарный сигнал. Сумма всех откликов образует искомый выходной сигнал.

При анализе прохождения случайных сигналов через линейные цепи, используют следующие постулаты:

1. Безынерционная линейная цепь не изменяет вид функции, описывающей закон распределения вероятностей входного сигнала.

2. Нормальный процесс на входе при прохождении через линейную цепь остается нормальным (как следствие из предыдущего постулата).

3. Для инерционных линейных цепей характерен эффект нормализации, т. е. независимо от закона распределения вероятностей входного сигнала закон распределения вероятностей выходного сигнала стремится к нормальному. Причем этот эффект проявляется тем заметнее, чем более узкополосной является линейная цепь по сравнению с шириной спектра сигнала на ее входе.

Энергетический спектр $W_y(\omega)$ выходного эргодического случайного процесса можно определить по энергетическому спектру $W_x(\omega)$ входного сигнала $x(t)$ (случайного процесса):

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2, \quad (6.1)$$

где $K(j\omega)$ – передаточная функция линейной цепи.

Корреляционную функцию случайного процесса в соответствии с теоремой Винера – Хинчина можно найти как обратное cos-преобразование Фурье от энергетического спектра выходного сигнала:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_y(\omega) \cdot \cos \omega \tau d\omega. \quad (6.2)$$

Значение корреляционной функции при нулевом сдвиге $\tau = 0$ представляет собой дисперсию, т. е. среднюю мощность флуктуации выходного сигнала:

$$\sigma_y^2 = R_y(0). \quad (6.3)$$

Математическое ожидание (среднее значение, постоянную составляющую) выходного процесса m_y можно определить как

$$m_y = m_x \cdot K(0), \quad (6.4)$$

где m_x – математическое ожидание процесса на входе цепи;

$K(0)$ – передаточная функция цепи на нулевой частоте, т. е. коэффициент передачи постоянной составляющей.

Из (6.4) следует, что постоянная составляющая выходного процесса не равна нулю, только если и коэффициент передачи линейной цепи по постоянному напряжению (току), и математическое ожидание входного процесса отличны от нуля. Таким образом, когда между цепями присутствует трансформаторная или емкостная связь, т. е. когда постоянная составляющая отфильтровывается, математическое ожидание в последующем каскаде не зависит от его значения в предыдущем каскаде.

Рассмотрим качественно линейное инерционное преобразование. Пусть на вход высокодобротного колебательного контура поступает последовательность коротких, не перекрывающихся друг с другом, со случайным временем прихода, импульсов [3]. Предположим также, что значение постоянной времени контура τ_k велико по сравнению с величиной интервалов между импульсами, как показано на рисунке 6.1. Переходная характеристика колебательного контура имеет вид

$$\sqrt{C/L} \exp(-t/\tau_k) \sin \omega_p t, \quad (6.5)$$

где τ_k – постоянная времени контура;

ω_p – резонансная частота.

Причем

$$\omega_p = 1/\sqrt{C/L}; \quad (6.6)$$

$$\tau = 2Q/\omega_p, \quad (6.7)$$

где Q – добротность контура.

В произвольный момент времени t_1 напряжение на выходе колебательного контура представляет собой сумму колебаний резонансной частоты, вызванных предыдущими импульсами. Согласно (6.7), чем выше добротность контура, тем дольше в нем не затухают колебания. Соответственно тем большее количество составляющих формируют суммарное напряжение в рассматриваемый момент времени t_1 . Из центральной предельной теоремы следует, что при этом

закон распределения сигнала на выходе колебательного контура стремится к нормальному.

Аналогичный результат можно получить, рассмотрев сигналы не во временном, а в частотном представлении. Поскольку цепь линейна, спектр результирующего колебания в контуре есть сумма спектров каждого прямоугольного импульса входного сигнала. В каждом отдельном спектре входного импульса фазы спектральных составляющих взаимосвязаны (коррелированы). При этом, поскольку время прихода импульсов случайно, между фазами спектральных составляющих из спектров разных импульсов взаимосвязь отсутствует. Кроме того, чем выше добротность и уже полоса пропускания контура, тем меньше значение корреляции фаз в спектре каждого импульса. Все это в совокупности обуславливает нормализацию случайного процесса на выходе узкополосной цепи.

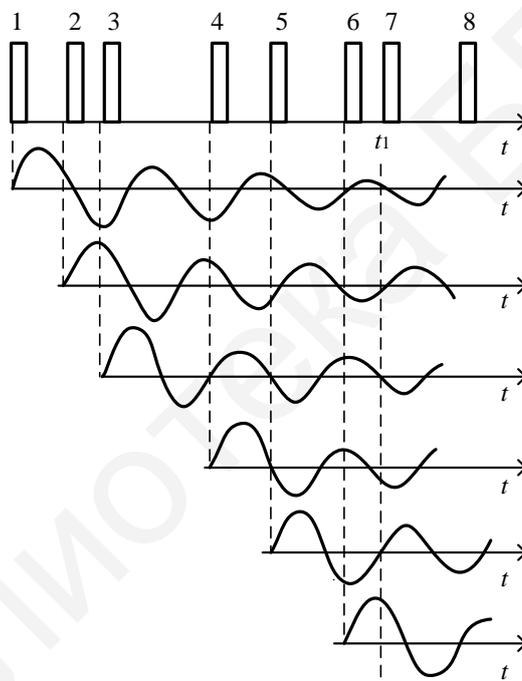


Рисунок 6.1 – Отклики колебательного контура на воздействие в виде случайной последовательности импульсов

Нелинейные безынерционные цепи

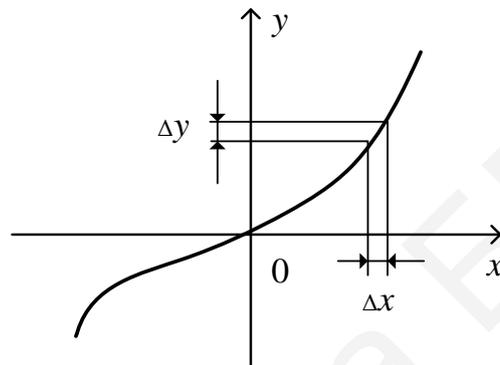
Рассмотрим нелинейное безынерционное преобразование. Как и в случае детерминированных сигналов, значение случайного выходного сигнала y определяется значением входного сигнала x и характеристикой нелинейного элемента $y = f(x)$. Результат расчетов – плотность вероятности и моментные функции выходного сигнала.

В зависимости от вида характеристики нелинейного элемента при расчете одномерной плотности вероятности различают три случая:

1. Характеристика нелинейного элемента $y = f(x)$ и его обратная характеристика $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ представляют собой однозначные функции. Пример такой зависимости приведен на рисунке 6.2.

Ясно, вероятность попадания реализации случайного процесса на входе $x(t)$ в интервал значений Δx равна вероятности нахождения реализации процесса на выходе $y(t)$ в интервале значений Δy . Тогда для бесконечно малых величин можно получить

$$p(x)dx = p(y)dy. \quad (6.8)$$



Рисунке 6.2 – Однозначная характеристика нелинейного элемента

Отсюда, устремив рассматриваемый интервал значений к бесконечно малой величине, получим

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}. \quad (6.9)$$

В выражении (6.9) учтено то, что плотность вероятности не может принимать отрицательное значение, а производная – может. Поэтому в общем случае значение производной берется по модулю.

2. Характеристика нелинейного элемента $y = f(x)$ состоит из нескольких ветвей и, следовательно, его обратная характеристика $x = \varphi(y)$ – неоднозначная функция (рисунок 6.3).

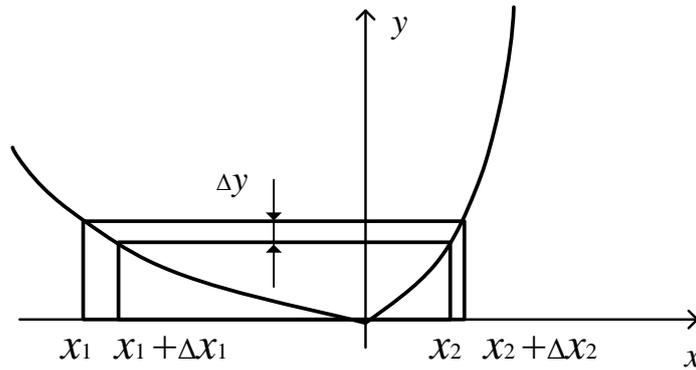


Рисунок 6.3 – Неоднозначная характеристика нелинейного элемента

Рассуждая аналогично с предыдущим случаем, получаем

$$p(y)dy = p(x)dx_1 + p(x)dx_2. \quad (6.10)$$

Тогда

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}} + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2}}. \quad (6.11)$$

3. В характеристике нелинейного элемента $y = f(x)$ присутствует горизонтальный участок.

В качестве примера рассмотрим двусторонний ограничитель, характеристика которого имеет два горизонтальных участка, как показано на рисунке 6.4. Когда значения входного сигнала $x(t) < a$, происходит отсечка, и значения сигнала на выходе нелинейного элемента равны нулю: $y(t) = 0$. Вероятность того, что сигнал на выходе $y(t)$ примет нулевое значение, определяется как

$$P_1 = \int_{-\infty}^a p(x)dx, \quad (6.12)$$

а плотность вероятности выходного сигнала в точке $y(t) = 0$ определяется как

$$p(y)|_{y=0} = P_1 \cdot \delta(y). \quad (6.13)$$

Когда значения входного сигнала $x(t) > b$, происходит насыщение, и значения сигнала на выходе нелинейного элемента в этом случае $y(t) = c$. Тогда

$$P_2 = \int_b^{\infty} p(x) dx; \quad (6.14)$$

$$p(y)|_{y=c} = P_2 \cdot \delta(y - c). \quad (6.15)$$

Если же значения входного сигнала попадают в интервал от a до b , то каждому значению входного сигнала соответствует значение выходного сигнала из интервала от 0 до c в соответствии с функцией $y = f(x)$.

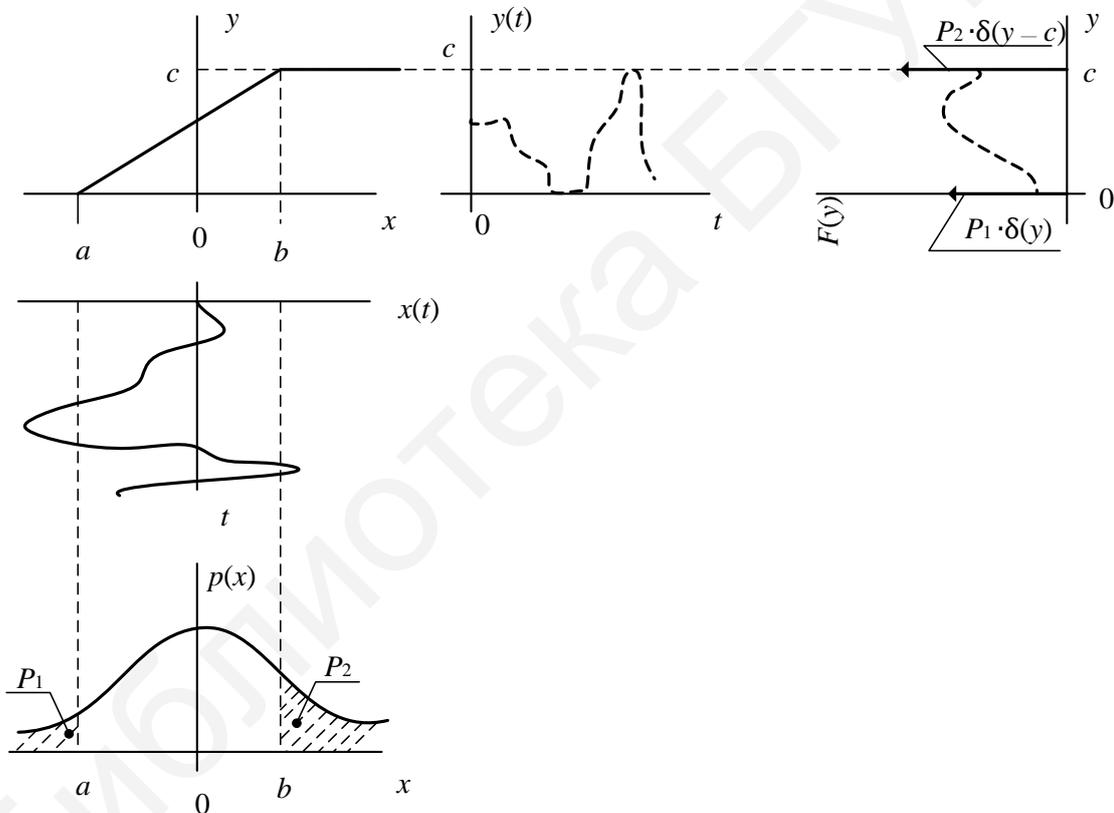


Рисунок 6.4 – Характеристика нелинейного элемента с двумя горизонтальными участками (двусторонний ограничитель)

Таким образом, плотность вероятности процесса на выходе двустороннего ограничителя можно представить следующим образом:

$$p(y) = P_1 \delta(y) + P_2 \delta(y - c) + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{y \in (0, c)}}. \quad (6.16)$$

Математическое ожидание случайного процесса, задаваемого формулой (6.16), имеет следующий вид:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(y) \cdot dy = \left| \begin{array}{l} y = f(x); \\ p(y) \cdot dy = p(x) dx \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) dx. \quad (6.17)$$

Рассмотрим воздействие гауссова случайного процесса $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x^2 на однополупериодный детектор. В этом случае плотность вероятности входного сигнала определяется как

$$p_{\text{вх}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (6.18)$$

Характеристика детектора представлена на рисунке 6.5 и задается формулой

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax, & x \geq 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Требуется найти плотность вероятности сигнала на выходе детектора. При неотрицательных значениях входного сигнала ($x > 0$) обратная характеристика детектора

$$x = y / a. \quad (6.20)$$

Тогда

$$|dx / dy| = 1 / |a|. \quad (6.21)$$

Из (6.9) следует, что при $y > 0$

$$p_{\text{вых}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x |a|} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}\right). \quad (6.22)$$

На интервале отрицательных значений x сигнал на выходе нелинейного элемента равен нулю ($y = 0$). Чтобы выполнялось условие нормировки плотности вероятности выходного сигнала, необходимо дельта-функцию в точке $y = 0$

умножить на 0,5. Тогда получим искомую плотность вероятности сигнала на выходе детектора:

$$p_{\text{вых}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x|a|} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}\right) & \text{при } y \geq 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Полученный результат имеет важное принципиальное значение. Из (6.23) следует, что при воздействии нормального процесса на вход нелинейной цепи сигнал на выходе не будет иметь вид гауссова сигнала (в отличие от линейных цепей).

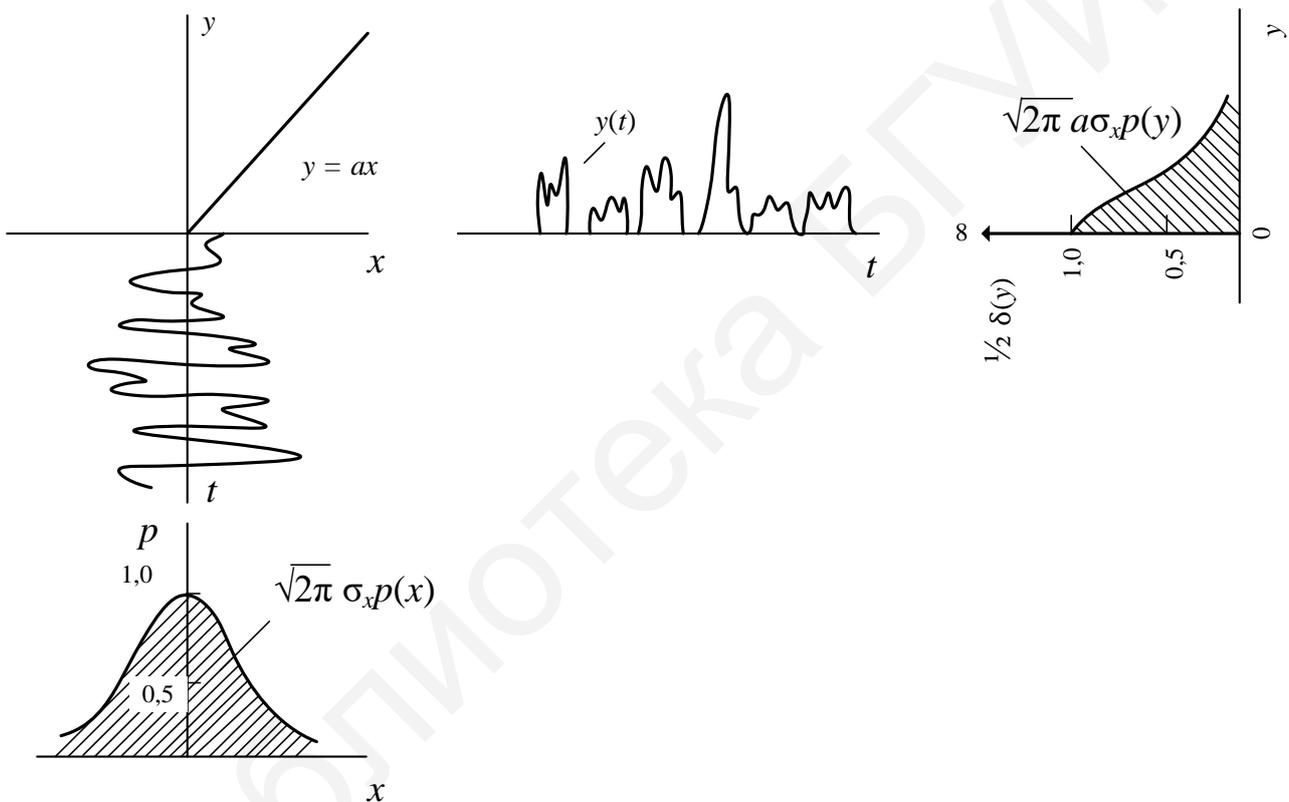


Рисунок 6.5 – Нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой (однополупериодный детектор)

Замечание. Дисперсия выходного процесса для участка с нормальным распределением $\sigma_y = a\sigma_x$. Сигнал на выходе детектора не принимает отрицательные значения и с вероятностью 0,5 равен нулю.

Рассмотрим воздействие нормально распределенного случайного процесса на квантователь. Характеристика нелинейного элемента, а также вид плотностей вероятности процесса и реализаций сигнала на входе и выходе приведены на рисунке 6.6.

Для расчета дисперсии процесса на выходе исследуемой цепи сначала вычисляется начальный момент второго порядка:

$$m_y^{(2)} = \langle y^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) p(x) dx. \quad (6.24)$$

Предполагается, что процесс – эргодический, поэтому в формуле (6.24) знак $\langle \rangle$ означает усреднение по времени. Тогда дисперсия

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - m_y^2. \quad (6.25)$$

Согласно теореме Винера – Хинчина, энергетический спектр выходного сигнала есть обратное cos-преобразование Фурье от корреляционной функции:

$$W_y(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cdot \cos \omega \tau d\tau. \quad (6.26)$$

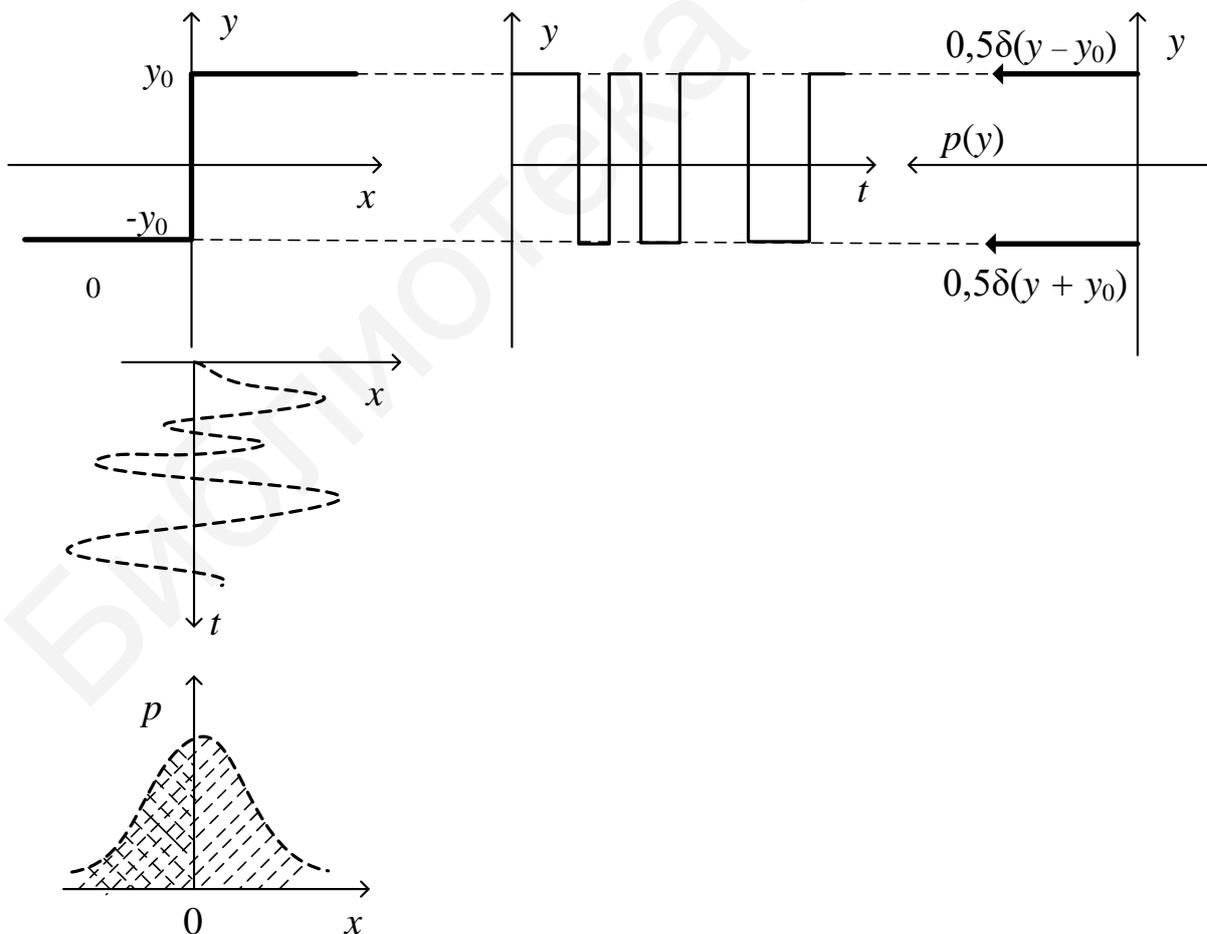


Рисунок 6.6 – Характеристика квантователя

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Исследуйте линейное безынерционное преобразование:

1.1. Белый гауссов шум.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_1_1* и нажмите «*Enter*».

В графическом окне 1 «Распределение входного сигнала» будет изображен график плотности распределения вероятностей (ПРВ) белого гауссова шума, подаваемого на вход усилителя. В остальных графических окнах изображаются графики ПРВ случайных процессов на выходе усилителя при различных параметрах усиления (коэффициент усиления и смещение).

Необходимо:

- для первой пары параметров усилителя зарисовать графики ПРВ входного и выходного случайных сигналов в одной системе координат в одинаковом масштабе;

- вычислить математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайного процесса на выходе усилителя;

- повторить оба предыдущих пункта для всех остальных пар параметров усилителя.

1.2. Клиппированный сигнал.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_1_2* и нажмите «*Enter*».

Выполните все действия согласно подпункту 1.1.

1.3. Пилообразный сигнал.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_1_3* и нажмите «*Enter*».

Выполните все действия согласно подпункту 1.1.

2. Исследуйте линейное инерционное преобразование.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_2* и нажмите «*Enter*».

В графических окнах 1, 2, 3 «Распределение входного сигнала» изображаются графики ПРВ клиппированных сигналов с различными значениями математического ожидания и среднеквадратичного отклонения. В графических окнах 4, 5, 6 «Распределение выходного сигнала» изображаются графики ПРВ случайных процессов на выходе фильтра.

Необходимо:

- зарисовать графики ПРВ входного и выходного случайных сигналов в одной системе координат в одинаковом масштабе;

- вычислить математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайного процесса на выходе фильтра;

- повторить оба предыдущих пункта для остальных реализаций сигнала.

3. Исследуйте нелинейное безынерционное преобразование:

3.1. Квантователь.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_3_1* и нажмите «*Enter*».

В графическом окне 1 «Распределение входного сигнала» будет изображен график плотности распределения вероятностей белого гауссова шума, подаваемого на вход квантователя. В остальных графических окнах изображаются графики ПРВ случайных процессов на выходе квантователя при различных параметрах квантователя (параметр – уровень превышения).

Необходимо:

- для первого значения параметра зарисовать графики ПРВ входного и выходного случайных сигналов в одной системе координат в одинаковом масштабе;

- вычислить математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайного процесса на выходе усилителя;

- повторить оба предыдущих пункта для всех остальных параметров квантователя.

3.2. Усилитель-ограничитель:

3.2.1. В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_3_2* и нажмите «*Enter*».

Содержимое графических окон аналогично подпункту 3.1 (параметры – коэффициент усиления, уровень ограничения).

Выполните все действия согласно подпункту 3.1.

3.2.2. В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab2_3_3* и нажмите «*Enter*».

Содержимое графических окон аналогично подпунктам 3.1 и 3.2 (изменилось математическое ожидание входного сигнала).

Выполните все действия согласно подпункту 3.1.

Контрольные задания

1. Объясните, что такое линейные, нелинейные, инерционные, безынерционные электрические цепи.

2. При каких условиях происходит нормализация случайного процесса?

3. Изобразите закон распределения случайного процесса на выходе квантователя при воздействии на его вход нормально распределенного случайного процесса с математическим ожиданием $m_x \neq 0$.

4. Изобразите закон распределения случайного процесса на выходе цепи с характеристикой, изображенной на рисунке 6.7, при воздействии на его вход нормально распределенного случайного процесса.

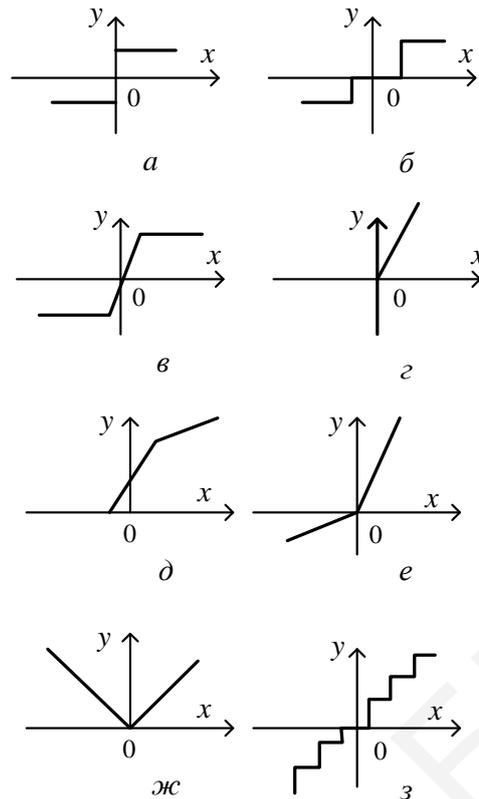


Рисунок 6.7 – Характеристики нелинейных цепей

Лабораторная работа №7

Оптимальная линейная фильтрация сигналов. Согласованный фильтр и его характеристики

Цель работы: изучить характеристики и структуру согласованных фильтров, экспериментально исследовать оптимальную фильтрацию сигналов, известных точно.

Краткие теоретические сведения

Одной из основных операций, реализуемой в системах инфокоммуникаций, является выделение сигнала из смеси сигнала и шума, которая поступает из канала связи. Очевидным решением данной задачи является использование фильтра с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и полосой пропускания, равной ширине спектра сигнала. Такой фильтр не искажает форму сигнала и подавляет помехи, частота которых лежит за пределами полосы пропускания фильтра.

Однако данное решение не является оптимальным, поскольку не учитывается форма сигнала. Ведь в пределах одинаковой полосы пропускания могут передаваться сигналы различной формы. Следовательно, отношение мощности сигнала к мощности помехи (отношение сигнал/шум) на выходе такого фильтра не будет максимальным.

При синтезе оптимального фильтра ставится задача максимизировать отношение сигнал/шум. При этом не требуется сохранить форму сигнала, поскольку в задаче обнаружения сигнала на фоне помех вид сигнала не имеет значения.

Фильтром, согласованным с сигналом $S(t)$, называется линейный фильтр с постоянными параметрами и импульсной характеристикой следующего вида:

$$h(t) = b \cdot S(t_0 - t), \text{ где } b \text{ и } t_0 - \text{const.} \quad (7.1)$$

Известно, что импульсная характеристика и коэффициент передачи электрической цепи связаны парой преобразований Фурье:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (7.2)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.3)$$

Поэтому коэффициент передачи согласованного фильтра имеет вид

$$K(j\omega)_{\text{CF}} = aS^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0), \quad (7.4)$$

где $S^*(j\omega)$ – комплексно-сопряженная функция со спектральной плотностью сигнала $S(t)$.

Таким образом, АЧХ согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента a совпадает с амплитудным спектром сигнала $S(t)$, а фазочастотная характеристика фильтра противоположна по знаку ФЧХ сигнала. Согласно теореме о спектре сигнала, смещенного во времени, множитель $\exp(-j\omega t_0)$ связан с запаздыванием сигнала во времени на величину t_0 . Характеристики сигнала и шума на входе и выходе согласованного фильтра приведены на рисунке 7.1. На рисунке 7.1, а изображены фазочастотные характеристики сигнала φ_c и коэффициента передачи фильтра φ_k . Амплитудно-частотные характеристики сигнала S и коэффициента передачи фильтра K изображены на рисунке 7.1, б. Энергетический спектр шума на входе фильтра постоянен и равен $N_0/2$, а на выходе (при условии $a/S(j0)=1$) имеет вид заштрихованной области, как показано на рисунке 7.1, в.

Из рисунка 7.1 следует, что в согласованном фильтре происходит ослабление шума относительно сигнала. Причем это ослабление выражено сильнее, чем в случае фильтра с прямоугольной АЧХ. В самом деле, у сигнала из-за неравномерности модуля коэффициента передачи фильтра ослабляются только те спектральные составляющие, вклад которых в сигнал минимален. Энергетический спектр шума на входе фильтра равномерен. Поэтому спектральные со-

ставляющие шума ослабляются тем больше, чем меньше $|S(j\omega)|$. Мощность шума на выходе фильтра, определяемая заштрихованной площадью на рисунке 7.1, в, значительно меньше мощности шума на входе. Кроме того, за счет вида ФЧХ фильтра устраняются фазовые сдвиги между спектральными составляющими сигнала. В результате происходит максимизация отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

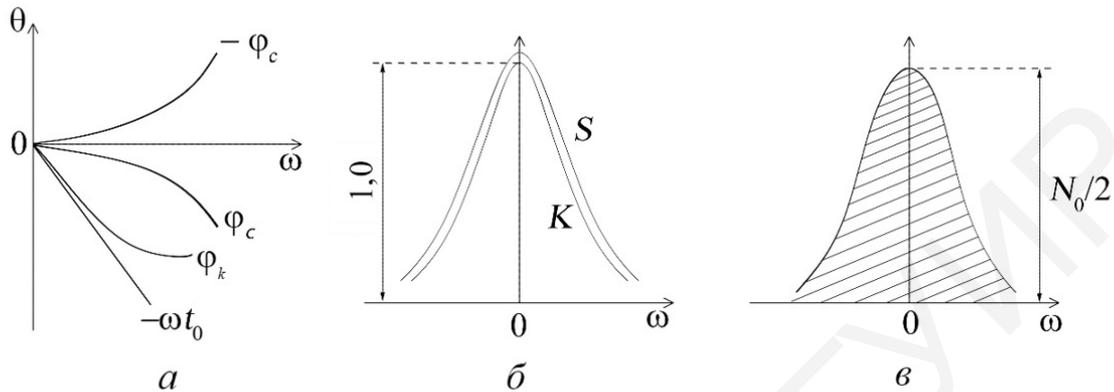


Рисунок 7.1 – Характеристики сигнала (а, б) и шума (в) на входе и выходе согласованного фильтра

Подтвердим эти качественные рассуждения математически [5]. Пусть $S(j\omega)$ – спектр сигнала, $K(j\omega)$ – коэффициент передачи некоторой линейной цепи. Как известно, спектр сигнала на выходе цепи равен

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S(j\omega)K(j\omega). \quad (7.5)$$

Используя обратное преобразование Фурье, вычислим значение сигнала на выходе цепи в момент $t = t_0$:

$$y_c(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K(j\omega)\exp(j\omega t_0)df; \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (7.6)$$

Зная коэффициент передачи цепи и энергетический спектр шума на ее входе, определим мощность шума на выходе:

$$P_{\text{шум}} = \left(\frac{N_0}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 df. \quad (7.7)$$

Тогда отношение мгновенной мощности сигнальной составляющей к средней мощности шума на выходе имеет вид

$$\rho_{\text{пик}} = \frac{|y_c(t_0)|^2}{P_{\text{ш}}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) \exp(j\omega_0 t) df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 df}. \quad (7.8)$$

Известно неравенство Коши – Буняковского для комплексных функций $A(x)$ и $B(x)$ [4]:

$$\left| \int_a^b A^*(x) \times B(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |A(x)|^2 dx \int_a^b |B(x)|^2 dx \quad (7.9)$$

при условии $b > a$. Известно также, что в формуле (7.9) левая часть неравенства равна правой, только в случае, когда

$$\dot{B}(x) = a\dot{A}(x), \quad (7.10)$$

где a – константа.

Пусть

$$A(j\omega) = S^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0); \quad (7.11)$$

$$B(j\omega) = K(j\omega); \quad (7.12)$$

$$A^*(j\omega) = S(j\omega) \exp(j\omega t_0); \quad (7.13)$$

$$B(j\omega) = K(j\omega) = aA(j\omega). \quad (7.14)$$

Применив неравенство (7.9) к числителю формулы (7.8), получим

$$\rho_{\text{пик}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 df} = \frac{2E}{N_0} = 2h^2; \quad (7.15)$$

$$E_j = \int_0^T s_j^2(t) dt, \quad (7.16)$$

где E – энергия сигнала.

Заметим, что модуль функции $\exp(-j\omega t_0)$ равен единице, а энергия сигнала, согласно равенству Парсеваля, равна интегралу квадрата модуля спектральной плотности сигнала.

Отношение мгновенной мощности сигнальной составляющей к средней мощности шума на выходе максимально, когда в (7.15) присутствует знак равенства. Из формулы (7.10) следует, что это условие будет выполняться в том случае, когда

$$K(j\omega) = aS^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0),$$

т. е. когда цепь с коэффициентом передачи $K(j\omega)$ является фильтром, согласованным с сигналом $S(t)$.

Рассмотрим особенности импульсной характеристики согласованного фильтра.

Покажем, что функция $h(t)$ представляет собой зеркальное отражение сигнала $S(t)$ относительно прямой $t_0/2$. Обозначим

$$t = (t_0 / 2 + c).$$

Тогда, согласно (7.1)

$$h(t_0 / 2 + c) = b \cdot S(t_0 / 2 - c).$$

Данное свойство импульсной характеристики согласованного фильтра иллюстрирует рисунок 7.2.

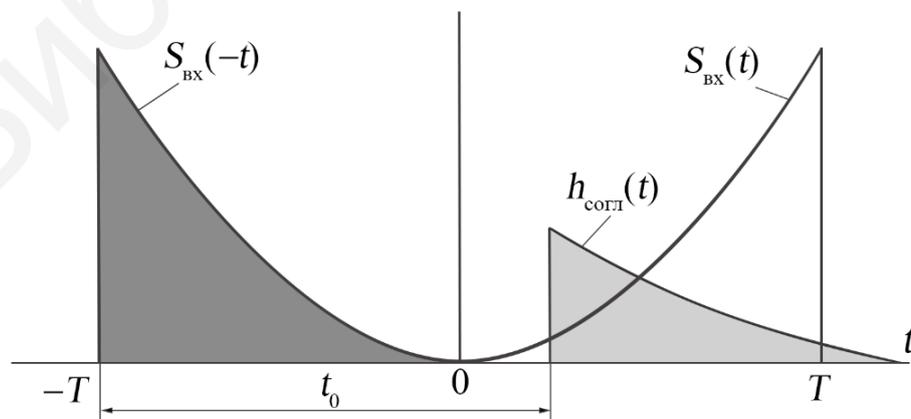


Рисунок 7.2 – Нахождение импульсной характеристики согласованного фильтра

Для физической реализуемости фильтра, согласованного с сигналом конечной длительности T , необходимо, чтобы значение временного сдвига t_0 удовлетворяло условию

$$t_0 \geq T. \quad (7.17)$$

Если данное условие не выполняется, то, как показано на рисунке 7.3, импульсная реакция фильтра опережает воздействие сигнала на вход фильтра, что физически невозможно [7].

Известно, что если на вход цепи поступает сигнал $S(t)$, то сигнал на ее выходе $y(t)$ определяется как

$$y(t) = \int_0^T h(t - \tau)Z(\tau)d\tau, \quad (7.18)$$

где $h(t - \tau)$ – импульсная характеристика.

С учетом (7.1)

$$y(t) = b \cdot R_s(t_0 - t), \quad (7.19)$$

где $R_s(t_0 - t)$ – функция корреляции сигнала.

Временные диаграммы на входе и выходе фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом, приведены на рисунке 7.4.

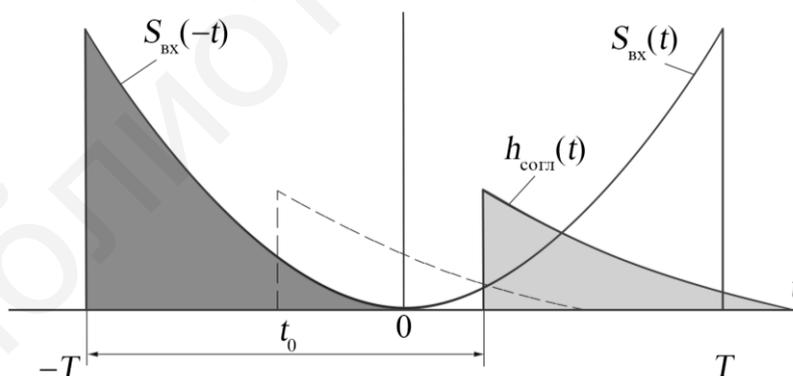


Рисунок 7.3 – Условие физической реализуемости согласованного фильтра

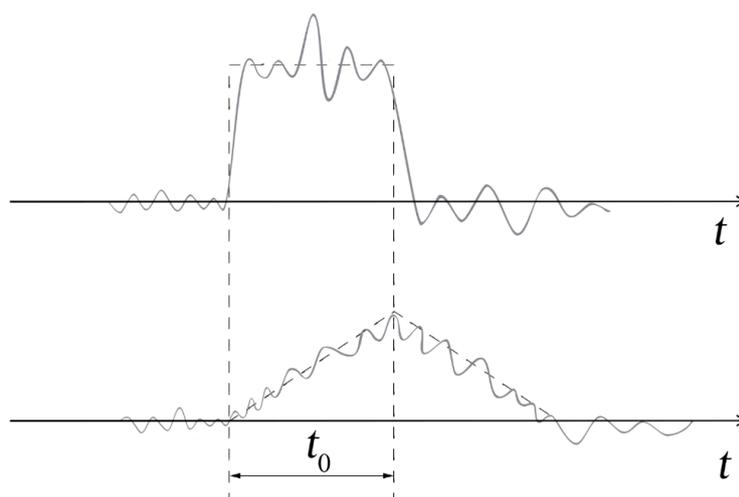


Рисунок 7.4 – Временные диаграммы на входе и выходе согласованного фильтра

Отношение сигнал/шум на выходе СФ в момент времени $t_0 = T$ [7]:

$$q = 2E / N_0 = 2h^2. \quad (7.20)$$

Примеры реализации согласованных фильтров

1. Построим согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса. Пример схемы для рассматриваемого сигнала и временные диаграммы, поясняющие ее работу, приведены на рисунке 7.5. Импульсная реакция фильтра соответствует (7.1).

Схема состоит из линии задержки на время, равное длительности импульса T , вычитающего устройства и интегрирующей цепи. Временные диаграммы приведены для двух случаев: 1 – входной сигнал в виде δ -функции (соответствующие диаграммы расположены над схемой) и 2 – сигнал на входе представляет собой прямоугольный видеоимпульс (диаграммы расположены под схемой). Без потери общности предполагается, что в (7.1) значение коэффициента $a = 1$. Известно, что при интегрировании δ -функции получаем единичный скачок напряжения. Импульс противоположной полярности, поступающий на интегрирующую цепь, вызывает единичный скачок напряжения обратной полярности. В результате в первом случае получаем искомую импульсную реакцию цепи в виде прямоугольного видеоимпульса. Во втором случае процесс формирования выходного сигнала происходит аналогично.

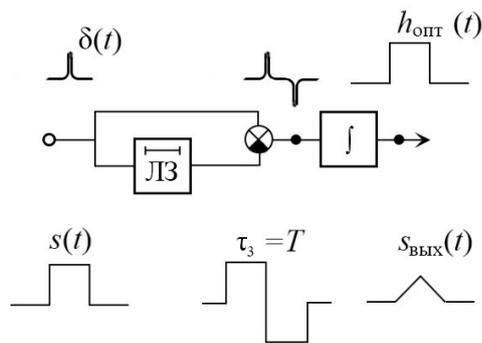


Рисунок 7.5 – Фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом (первый вариант)

Заметим, что фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом, можно построить также по схеме, представленной на рисунке 7.6.

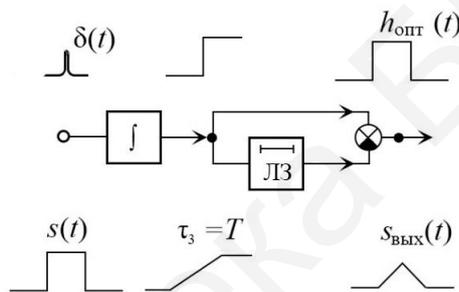


Рисунок 7.6 – Фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом (второй вариант)

2. Рассмотрим фильтр, согласованный с прямоугольным радиоимпульсом вида $S(t) = \sin(\omega_0 t)$. Импульс существует на временном интервале $[0, T]$. Фильтр содержит идеальный колебательный контур без потерь с резонансной частотой ω_0 . Он является интегрирующей цепью для огибающей сигнала. В состав схемы входят также линия задержки на время T , равное длительности сигнала, и инвертор, задачей которого является гашение колебаний. Два варианта схемы фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом, приведены на рисунке 7.7. На данном рисунке изображены также временные диаграммы, поясняющие работу схем.

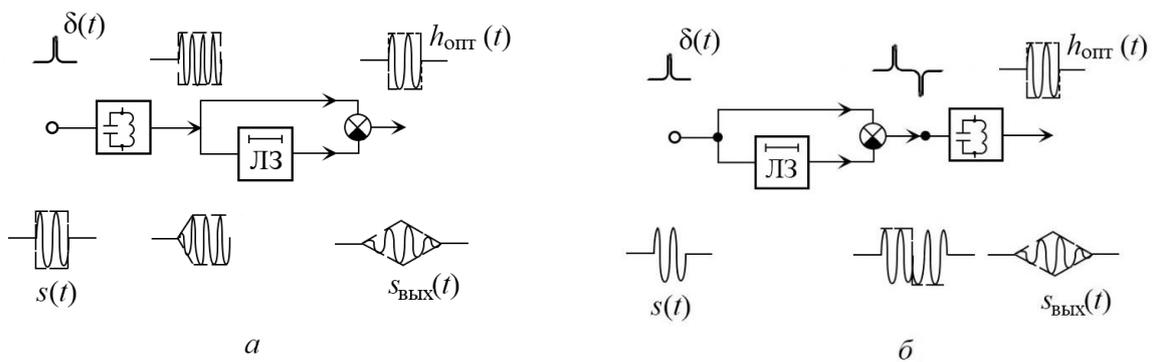


Рисунок 7.7 – Фильтр, согласованный с прямоугольным радиоимпульсом

3. Построим согласованный фильтр для последовательности знакопеременных импульсов. Фильтр состоит из многоотводной линии задержки, блока весовых коэффициентов (БВК), содержащего инверторы, и сумматора. На выходе сумматора включен оконечный согласованный фильтр (ОСФ). Число отводов линии задержки равно количеству импульсов в последовательности. Блок весовых коэффициентов формируется согласно виду импульсной характеристики согласованного фильтра, определяемой по (7.1). Оконечный фильтр согласован с одиночным элементом последовательности, который представляет собой прямоугольный видеоимпульс длительностью τ_3 . ОСФ может иметь вид, представленный на рисунке 7.5 или 7.6.

Работу схемы рассмотрим на примере [7]. Пусть последовательность знакопеременных импульсов представляет собой псевдослучайную последовательность (ПСП) длиной $N = 7$ вида $+++--+-$. На рисунке 7.8 приведены сигнал $S(t)$ и импульсная характеристика $h(t)$ согласованного с ним фильтра. Схема фильтра и диаграммы, поясняющие его работу, изображены на рисунке 7.9. Как видим, на выходе согласованного фильтра для ПСП находится ее автокорреляционная функция, что соответствует формуле (7.19). В данном случае происходит сжатие сигнала: эффективная длительность сложного сигнала на выходе согласованного фильтра меньше, чем на его входе. Эффективная длительность определяется на уровне половины максимального значения выходного напряжения (см. рисунок 7.9). Тогда коэффициент сжатия

$$T/\tau_3 = N,$$

где N – длина ПСП.

Из рассмотренных примеров видно, что ширина спектра сигнала на выходе согласованного фильтра равна ширине спектра входного сигнала. Однако форма сигнала на выходе фильтра отличается от формы сигнала на его входе.

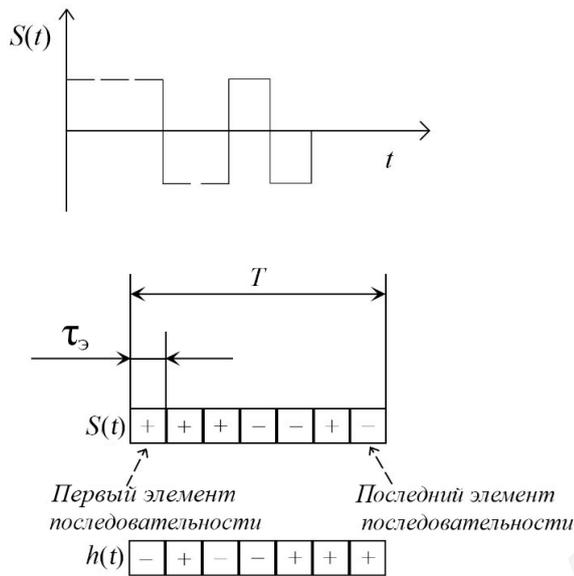


Рисунок 7.8 – Псевдослучайная последовательность длиной $7S(t)$ и импульсная характеристика $h(t)$ согласованного с ней фильтра

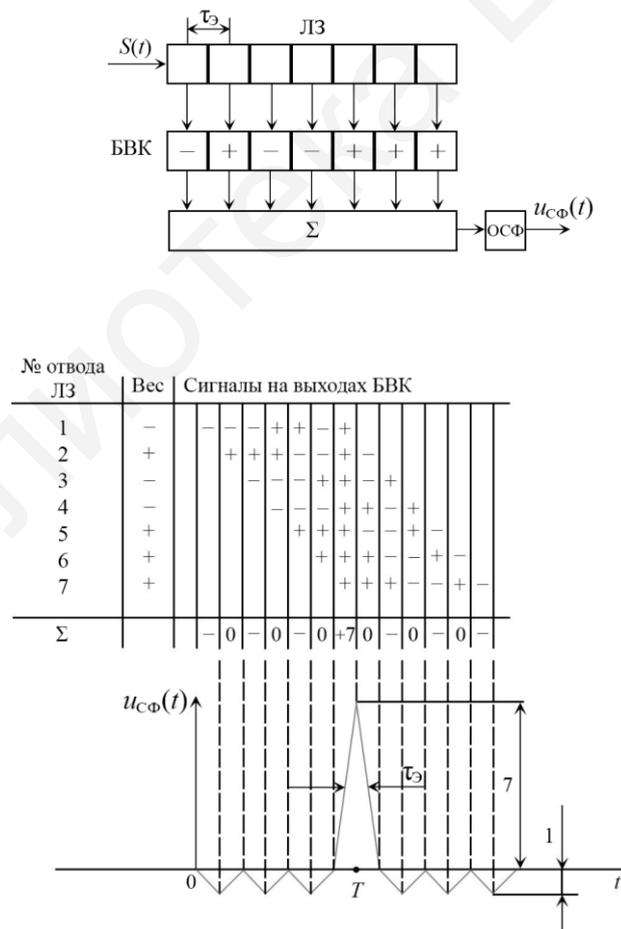


Рисунок 7.9 – Согласованный фильтр для псевдослучайной последовательности длиной 7 и диаграммы, поясняющие его работу

4. В общем случае для произвольного финитного сигнала (т. е. сигнала конечной длительности) согласованный фильтр можно построить, основываясь на теореме Котельникова. Такой фильтр состоит из линии задержки на время, равное длительности сигнала, отводов от линии, разнесенными друг от друга на временной интервал $\Delta t = \frac{1}{2F}$, где F – эффективная ширина спектра сигнала, суммирующего устройства и фильтра нижних частот [5]. Соответствующая схема приведена на рисунке 7.10.

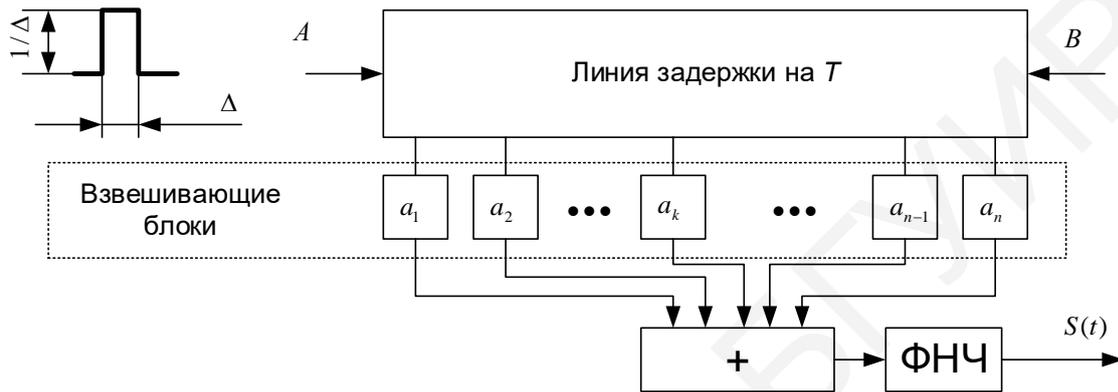


Рисунок 7.10 – Согласованный фильтр для произвольного финитного сигнала

Схема работает следующим образом. Пусть на вход A схемы подается импульс в виде δ -функции. С отводов линии задержки поступают δ -импульсы, умноженные на соответствующие сигналу $S(t)$ коэффициенты a_k и разнесенные по времени на величину Δt . Эти импульсы подаются на вход ФНЧ, импульсная реакция которого формирует базис Котельникова с соответствующими сигналу коэффициентами a_k . В результате на выходе схемы – сигнал $S(t)$. Следовательно, импульсной характеристикой рассматриваемой схемы является сигнал $S(t)$. На практике вместо δ -функции на вход схемы подается короткий прямоугольный импульс длительностью Δ и амплитудой $1/\Delta$. Если импульс поступает на вход B , на выходе ФНЧ формируется сигнал, который является зеркальным относительно $S(t)$. Таким образом, рассматриваемая схема является фильтром, согласованным с сигналом $S(t)$, если входом схемы является точка B .

Иногда в технике связи используют фильтры, характеристики которых только частично согласованы с характеристиками сигнала. Такие фильтры называются *квазиоптимальными*. Основное требование к квазиоптимальному фильтру – без ослабления пропускать колебания из области частот, где сосредоточена основная доля энергии сигнала.

Например, простейшая интегрирующая RC -цепь является квазиоптимальным фильтром для прямоугольного видеоимпульса. Если выполняется условие

$$\tau_{\text{и}} / (RC) = 1,25,$$

то отношение сигнал/шум на выходе данного фильтра всего на 20 % меньше, чем в согласованном фильтре [4].

Однако квазиоптимальную фильтрацию возможно осуществить лишь в случае простых сигналов.

Итак, можно сделать следующие выводы:

- 1) ширина спектра выходного сигнала согласованного фильтра остается такой же, как и у входного сигнала;
- 2) согласованный фильтр обеспечивает максимальное отношение сигнал/шум на выходе;
- 3) согласованный фильтр существенно изменяет форму входного сигнала.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Исследуйте сигналы:

1.1. Одиночный прямоугольный видеоимпульс.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab3sig1* и нажмите «*Enter*».

Зарисуйте сигнал и амплитудный спектр сигнала. Фазовый спектр можно не рисовать.

1.2. Повторите вышеперечисленные действия для следующих сигналов: радиоимпульс (*lab3sig2*); последовательность прямоугольных импульсов (*lab3sig3*), последовательность Баркера (*lab3sig4*).

2. Исследуйте согласованные фильтры:

2.1. Фильтр, согласованный с одиночным прямоугольным видеоимпульсом.

В командном окне (*Command window*) программы *Matlab* наберите *lab3fil1* и нажмите «*Enter*».

Зарисуйте импульсную характеристику фильтра и сигналы на выходе данного фильтра. Сигналы на выходе фильтра получены при подаче на вход следующих сигналов (слева направо):

- одиночный прямоугольный импульс;
- радиоимпульс;
- последовательность прямоугольных импульсов;
- последовательность Баркера.

2.2. Повторите подпункт 2.1 для следующих фильтров: фильтр, согласованный с радиоимпульсом (*lab3fil2*); фильтр, согласованный с последовательностью прямоугольных импульсов (*lab3fil3*); фильтр, согласованный с последовательностью Баркера (*lab3fil4*).

Контрольные задания

1. Что такое согласованный фильтр?
2. Назовите свойства согласованного фильтра.
3. Изобразите временные диаграммы на входе и выходе фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом, при отсутствии шума.

4. Изобразите схему окончного согласованного фильтра для последовательности прямоугольных знакопеременных импульсов.

5. Какую форму имеет сигнал на выходе согласованного фильтра, если на его вход подать сигнал, с которым фильтр согласован?

6. Какую форму имеет сигнал на выходе согласованного фильтра, если на его вход подать сигнал, с которым фильтр не согласован?

Лабораторная работа №8

Исследование оптимального приема сигналов на фоне помех

Цель работы: ознакомиться с методами оптимального приема сигналов на основе согласованных фильтров, экспериментально исследовать рабочие характеристики приемника.

Краткие теоретические сведения

При передаче дискретных сообщений используют символы из конечного множества (алфавита) $\{b_i, i = 1, \dots, m\}$. Сообщение состоит из последовательности элементов алфавита. Каждому элементу сообщения b_i соответствует определенный сигнал $U_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, m$, который передается в канал связи. На приемной стороне по принятому сигналу $S_i(t)$ необходимо определить, какой из m возможных символов передавался.

На вид принятого сообщения влияют помехи в канале связи. Например, сигнал может затухать, причем затухание может случайным образом изменяться. Случайной величиной может быть и задержка сигнала в канале связи. В простейшем случае аддитивной помехи принятый сигнал $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t) = S_i(t) + n(t), \quad (8.1)$$

где $S_i(t)$ – полезный сигнал на входе приемника;

$n(t)$ – помеха в канале связи.

Принятое колебание может отличаться от возможных сигналов $U_i(t)$. Задачей приемного устройства является выбор по определенному критерию одной из вероятных гипотез [5]:

- передан сигнал $U_1(t)$, т. е. символ b_1 ;
- или передан сигнал $U_2(t)$, т. е. символ b_2 ;
- ...
- или передан сигнал $U_m(t)$, т. е. символ b_m .

Задачей оптимального приема является минимизация вероятности ошибочных решений. Тогда будет достигнута максимально возможная точность передачи сообщения, т. е. вероятность правильного приема. Для гауссова канала эта задача была решена В. А. Котельниковым [5]. Потенциальной помехоустойчивостью, согласно В. А. Котельникову, называют максимальную вероятность

правильного приема сигнала. Приемник, который позволяет обеспечить эту вероятность, получил название идеального (оптимального) приемника.

Рассмотрим пространство сигналов, в котором все возможные сигналы представлены точками, как показано на рисунке 8.1. Разделим это пространство на m непересекающихся областей \hat{B}_i . Причем область \hat{B}_i содержит точку S_i . Если принятый сигнал попадает в i -ю область, то принимается решение, что передавался сигнал U_i (которому соответствует символ сообщения b_i). Под влиянием аддитивной помехи (вектора n) поступающий на вход приемника сигнал S_i трансформируется в вектор Z . Вектор Z может остаться в области сигнала S_i (как в случае S_k), тогда сигнал U_i будет принят верно. Если же Z выйдет за рамки области, соответствующей правильному приему (как в случае S_1), будет выбрана одна из ошибочных гипотез.

В случае двоичной системы ($m = 2$) все пространство сигналов разбивается на две области. Рассматриваются две альтернативные гипотезы: передан символ «1» либо «0».

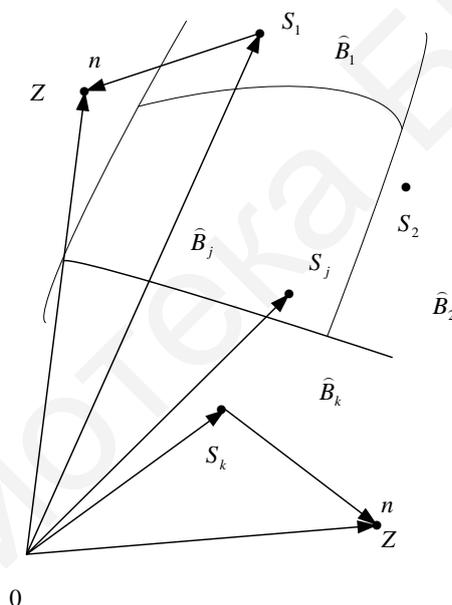


Рисунок 8.1 – Пространство сигналов на входе приемника с разбиением на непересекающиеся области

Области, соответствующие m возможным сигналам, могут не занимать все пространство. В этом случае приходящий сигнал Z может не попасть ни в одну из m областей. Тогда схема принимает решение, что невозможно определить передаваемый сигнал. Такую схему называют схемой со стиранием (с отказом от решения).

Реализовать разбиение пространства принимаемых сигналов на области принятия решения можно различными способами. Называют данное разбиение решающей схемой [5]. Приемные устройства характеризуются видом решающей схемы и соответствующим схеме алгоритмом принятия решения.

Вероятность ошибочного приема символа определяется границами соответствующей ему области. При изменении разбиения пространства сигналов на области происходит изменение вероятностей ошибочного приема символов. Рассмотрим две области: i -ю и k -ю. Увеличим i -ю область за счет уменьшения k -й. В этом случае уменьшается вероятность ошибочного приема k -го символа вместо переданного символа b_i . Одновременно увеличивается вероятность ошибочного приема символа b_i вместо символа b_k .

При разбиении пространства принимаемых сигналов на области руководствуются одним из заданных при проектировании системы критерием качества:

1. Критерий Котельникова, называемый также **критерием идеального наблюдателя** или **критерием максимума апостериорной вероятности**, широко применяется в системах инфокоммуникаций. Суть его в следующем. Пусть приемник по полученному сигналу Z принял решение, что передавался символ b_i . Вероятность правильного приема соответствует условной вероятности того, что при приеме сигнала Z был передан именно символ b_i . Обозначается данная условная вероятность как $P(b_i / Z)$ и называется *апостериорной вероятностью*, т. е. полученной после опыта.

Максимум вероятности правильного приема достигается в случае максимума апостериорной вероятности. Алгоритм принятия решения в данном случае заключается в проверке $m - 1$ неравенств:

$$P(b_i / Z) > P(b_j / Z), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad j \neq i. \quad (8.2)$$

Воспользуемся формулой Байеса:

$$P(b_i / Z) = [P(b_i)w(Z / b_i) / w(Z)], \quad (8.3)$$

где $w(Z)$ – n -мерная плотность вероятности принятого сигнала Z ;

$P(b_i)$ – *априорная вероятность* передачи символа b_i . Априорной называют вероятность, известную до опыта. Она определяется вероятностными характеристиками источника сообщений и алгоритмом кодирования сообщений источника.

Безусловная плотность вероятности $w(Z)$ не зависит от i . Поэтому выражение (8.2) можно записать в следующем виде:

$$P(b_i)w(Z / b_i) > P(b_j)w(Z / b_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad j \neq i. \quad (8.4)$$

Условную плотность вероятности $w(Z / b_i)$ называют функцией правдоподобия i -й гипотезы. Она определяется вероятностными характеристиками модулирующего устройства и канала связи. При проектировании приемного

устройства априорные вероятности символов $P(b_i)$ и условные плотности вероятности $w(Z/b_i)$ известны заранее.

Критерий идеального наблюдателя увеличивает вероятность правильного приема за счет увеличения области приема в пространстве входящих сигналов для более вероятных символов. При этом уменьшаются области для менее вероятных сигналов. Однако большее количество информации содержат именно маловероятные символы, а вероятность правильного приема именно этих сигналов уменьшается. В этом состоит недостаток рассматриваемого критерия.

2. В некоторых случаях вместо плотностей вероятности удобно использовать их отношение. Запишем выражение (8.4) в следующем виде:

$$\frac{w(Z/b_i)}{w(Z/b_j)} > \frac{P(b_j)}{P(b_i)}, \quad j \neq i. \quad (8.5)$$

Отношение

$$\Lambda_{i,j} = \frac{w(Z/b_i)}{w(Z/b_j)} \quad (8.6)$$

называют отношением правдоподобия, а рассматриваемый критерий – **критерием максимума отношения правдоподобия**. Данный критерий наиболее часто применяют в системах инфокоммуникаций. Следует заметить, что когда все символы характеризуются равной априорной вероятностью, критерий максимального правдоподобия соответствует критерию максимума апостериорной вероятности.

На практике часто последствия ошибок различны. Так, пропуск цели в радиолокации принесет более тяжкие последствия, чем ложная тревога. При разработке систем противопожарной сигнализации также следует учитывать, что необнаружение пожара нанесет больший вред, чем ложное срабатывание. В этом случае используют критерии, в которых учитываются последствия ошибочного приема.

3. **Критерий минимального среднего риска (байесовский критерий)** основан на величине потерь, к которым приводит та или иная ошибка. Для каждой пары передаваемых символов b_i и b_j определяют величину потерь L_{ij} . Данная величина зависит от того, какой символ b_j ошибочно принят в случае, когда передавался символ b_i . При правильном приеме величина потерь равна нулю.

Риск для символа b_j определяется следующим образом:

$$R_i = \sum_{j=0}^{m-1} P(\hat{b}_j / b_i) L_{ij} = \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij} \int_{\tilde{B}_j} w(Z/b_i) dZ. \quad (8.7)$$

Величина интеграла равна вероятности того, что при передаче символа b_j сигнал Z находится в области, соответствующей символу b_j . Средний риск определяется по всем возможным b_j . Оптимальным в данном случае является приемник, для которого значение среднего риска минимально.

Когда величина потерь для всех ошибок одинакова ($L_{ij} = \text{const}$ при $i \neq j$) и при безошибочном приеме величина потерь равна нулю, критерий минимального среднего риска соответствует критерию Котельникова.

Известны и другие критерии: критерий Неймана – Пирсона, критерий взвешенной вероятности ошибки, минимаксный критерий и т. д. [5].

Различают задачи обнаружения и распознавания (исторически эти термины использовались в задачах радиолокации). Примером задачи обнаружения является передача с пассивной паузой. Задача распознавания двух сигналов характерна для частотной и фазовой манипуляции.

Рассмотрим когерентный прием, т. е. прием сигналов с известными информационными параметрами.

Пусть в канале связи действует аддитивный белый гауссов шум $n(t)$. В этом случае сигнал на входе приемника имеет вид (8.1). Набор всех возможных сигналов $S_i(t)$ известен. Необходимо определить, какой именно сигнал был передан, т. е. определить значение i . В качестве критерия, по которому делает выбор решающая схема, применим максимум отношения правдоподобия.

В отсутствие сигнала, т. е. когда $S(t) = 0$, на входе приемника присутствует лишь шум и принятый сигнал $Z(t) = n(t)$.

Белый шум имеет бесконечный спектр с постоянной спектральной плотностью N_0 . Теоретически сигнал также определен в бесконечной полосе частот. Следовательно, пространство сигналов бесконечно и плотности вероятности сигналов не существует. Поэтому будем рассматривать n -мерные плотности вероятностей, а вместо белого шума будем рассматривать квазيبелый шум в конечной полосе частот F .

Разобьем конечный интервал существования сигнала T на отсчеты, взятые через промежуток времени:

$$\Delta t = 1 / (2F) = T / n. \quad (8.8)$$

Отсчеты шума в этих сечениях независимы. Поскольку шум в канале связи гауссов, условная плотность вероятности равна

$$w(Z_1, Z_2, \dots, Z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / Z(t)) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n Z^2(t_k) \right], \quad (8.9)$$

$$\text{где } \sigma^2 - \text{дисперсия шума } (\sigma^2 = N_0 F); \quad (8.10)$$

$$Z(t) = n(t).$$

Из (8.1) следует, что, если в канал был отправлен символ b_i , то

$$n(t) = z(t) - S_i(t). \quad (8.11)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w(Z_1, \dots, Z_n; t_1, \dots, t_n / b_i) &= \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_i(t_k)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Следовательно, для i -го сигнала отношение правдоподобия (для n сечений) имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{[n]} &= \frac{w_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / b_i)}{w_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n; t_1, t_2, \dots, t_n / Z(t))} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_i(t_k)]^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n Z^2(t_k) \right\}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Из (8.8) и (8.10) следует, что

$$\sigma^2 = N_0 P = \frac{N_0}{(2\Delta t)}. \quad (8.14)$$

В этом случае (8.13) можно представить в следующем виде:

$$\Lambda_i^{[n]} = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_i(t_k)]^2 \Delta t + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n Z^2(t_k) \Delta t \right\}. \quad (8.15)$$

Согласно критерию максимума отношения правдоподобия, решающую схему в качестве переданного выбирает тот символ b_i , для которого значение $\Lambda_i^{[n]}$ максимально.

При практической реализации приемника обычно определяют максимум не $\Lambda_i^{[n]}$, а логарифма $\Lambda_i^{[n]}$:

$$\ln \Lambda_i^{[n]} = -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_i(t_k)]^2 \Delta t + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^n Z^2(t_k) \Delta t. \quad (8.16)$$

Поскольку в (8.16) второе слагаемое от b_i не зависит, алгоритм работы решающей схемы заключается в проверке системы неравенств:

$$\sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_i(t_k)]^2 < \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - S_j(t_k)]^2, \quad j \neq i. \quad (8.17)$$

Устремим полосу частот шума F к бесконечности. При этом согласно (8.8) к бесконечности стремится также количество сечений n , а интервал Δt стремится к нулю. В этом случае (8.17) можно представить следующим образом [5]:

$$\int_0^t [Z(t) - S_i(t)]^2 dt < \int_0^t [Z(t) - S_j(t)]^2 dt, \quad j \neq i. \quad (8.18)$$

Рассмотрим случай, когда приемнику необходимо различить два символа b_i и b_j ($m = 2$). Структурная схема приемного устройства, реализующего алгоритм (8.18), приведена на рисунке 8.2.

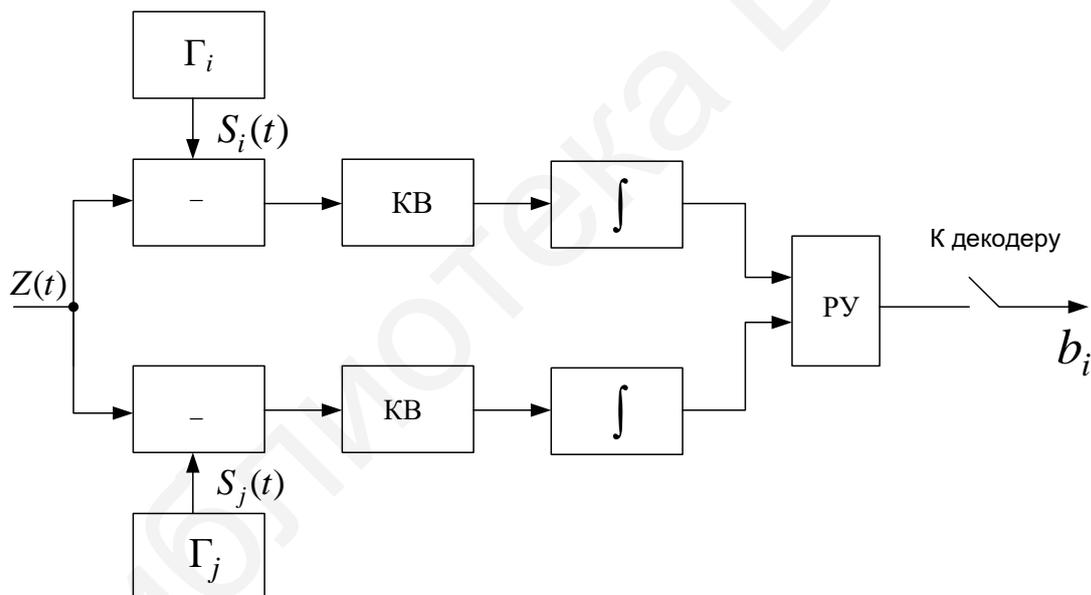


Рисунок 8.2 – Структурная схема приемного устройства с квадраторами для различения двух полностью известных сигналов

На схеме знаком « \leftarrow » обозначены вычитающие устройства; Γ_i, Γ_j – генераторы опорных сигналов $S_i(t), S_j(t)$; КВ – квадраторы, т. е. устройства возведения сигнала, поступающего на вход, в квадрат; \int – устройства интегрирования; РУ – решающее устройство, которое выбирает ветвь с максимальным значением сигнала. Ключ замыкается в моменты времени, кратные длительности сигнала T .

Количество ветвей в схеме равно количеству всех возможных символов m .

Практическая реализация квадраторов сложна. Приведем алгоритм, описываемый (8.18), к виду, не требующему квадратичного преобразования. Для этого достаточно в (8.18) раскрыть скобки, сократить слагаемое $\int_0^T Z^2(t)dt$ и учесть, что энергия j -го сигнала

$$E_j = \int_0^T S_j^2(t)dt, \quad j \neq i. \quad (8.19)$$

Тогда получим

$$\int_0^T Z(t)S_i(t)dt - 0,5E_i > \int_0^T Z(t)S_j(t)dt - 0,5E_j, \quad j \neq i. \quad (8.20)$$

Вычисление скалярного произведения

$$(Z, S_i) = \int_0^T Z(t)S_i(t)dt \quad (8.21)$$

реализуется устройством, которое называется *коррелятором*. Приемник, в состав которого входит коррелятор и работающий по алгоритму (8.20), называется корреляционным.

При распознавании двух сигналов $S_0(t)$ и $S_1(t)$ правило (8.20) имеет вид

$$\int_0^T Z(t)S_1(t)dt - 0,5E_1 > \int_0^T Z(t)S_0(t)dt - 0,5E_0. \quad (8.22)$$

Соответствующая схема приведена на рисунке 8.3.

На рисунке введены следующие обозначения: X – устройства перемножения; Γ_0, Γ_1 – генераторы опорных сигналов $S_0(t), S_1(t)$; \int – интегрирующие устройства; « \leftarrow » – вычитающие устройства; PY – решающее устройство, которое в моменты времени, кратные длительности сигнала T , определяет ветвь с максимальным сигналом.

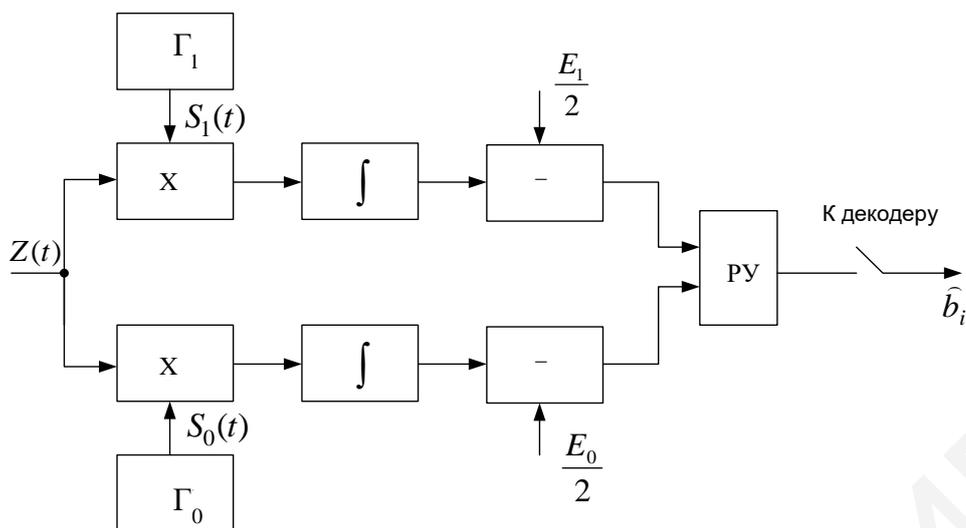


Рисунок 8.3 – Структурная схема приемного устройства для различения двух полностью известных сигналов с корреляторами

В задаче обнаружения сигнала $S(t)$ структурная схема корреляционного приемника имеет вид, представленный на рисунке 8.4.

На схеме: X – перемножитель; ГОС – генератор опорного сигнала $S(t)$; \int – интегратор; ПУ – пороговое устройство, определяющее в моменты времени, кратные T (при замыкании ключа), наличие или отсутствие сигнала [7].

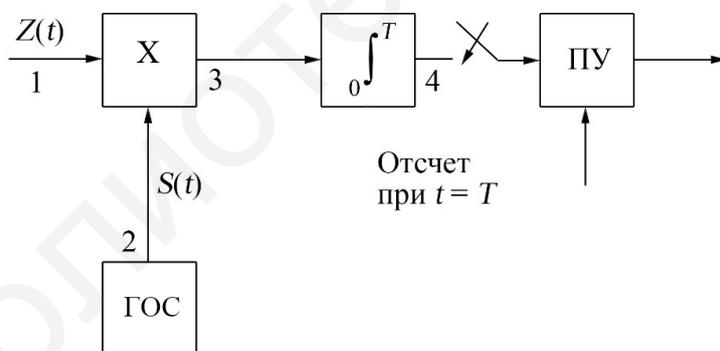


Рисунок 8.4 – Корреляционный оптимальный обнаружитель

Рассмотрим работу схемы. Пусть сигнал $S(t)$ – прямоугольный видеоимпульс. Временные диаграммы работы обнаружителя приведены на рисунке 8.5.

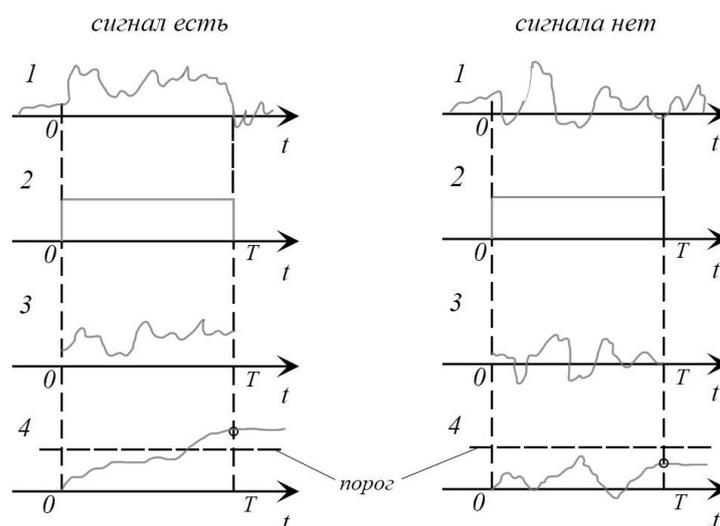


Рисунок 8.5 – Временные диаграммы работы корреляционного оптимального обнаружителя

На рисунке 8.5 рассмотрены два возможных случая:

1) сигнал есть, т. е. на входе приемника

$$Z(t) = S(t) + n(t);$$

2) сигнала нет, тогда на вход приемника поступает только шум и, следовательно,

$$Z(t) = n(t).$$

Заметим, что значение сигнала на выходе интегрирующего устройства является случайной величиной и определяется реализацией шума на интервале существования сигнала (от 0 до T) [7]:

$$B(T) = (Z, S_i) = \int_0^T Z(t) S_i(t) dt = \int_0^T S_i^2(t) dt + \int_0^T N(t) S_i(t) dt. \quad (8.23)$$

Сравнение с порогом осуществляется в момент времени $t = T$.

Можно показать, что отношение мгновенной мощности сигнальной составляющей к средней мощности шума на выходе коррелятора равно

$$\rho = 2E / N_0 = 2h^2. \quad (8.24)$$

Таким образом, отношение сигнал/шум на выходе коррелятора определяется энергией сигнала и спектральной плотностью белого шума. Отношение сигнал/шум на выходе коррелятора не зависит от формы обнаруживаемого сигнала [7].

При обнаружении сигнала возможны следующие события:

- правильное обнаружение;
- правильное необнаружение;
- ложная тревога (сигнал не передавался, но приемное устройство приняло решение, что сигнал есть);
- пропуск цели (пропуск сигнала).

Чтобы определить вероятности этих событий, рассмотрим условные плотности вероятности сигнала $B(T)$ на выходе интегрирующего устройства коррелятора. При отсутствии полезного сигнала $S(t)$ на вход приемника поступает только шум (т. е. $Z(t) = n(t)$). Для рассматриваемого канала связи характерен гауссов шум. Следовательно, плотность вероятности $w_n(B)$ случайной величины $B(T)$ также является гауссовой с нулевым математическим ожиданием и дисперсией вида [7]

$$\sigma^2 = EN_0 / 2. \quad (8.25)$$

Если же на входе коррелятора действует смесь полезного сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$, то $Z(t) = S(t) + n(t)$. Функциональная зависимость $w_{сн}(B)$ плотности вероятности случайной величины $B(T)$ в этом случае также является гауссовой с дисперсией вида (8.25), но математическое ожидание равно энергии сигнала E [7]. Условные плотности вероятности $w_n(B)$ и $w_{сн}(B)$ приведены на рисунке 8.6.

Из рисунка видно, что, изменяя значение порога, можно изменять вероятности пропуска цели – ложной тревоги (и, соответственно, правильного обнаружения – правильного необнаружения).

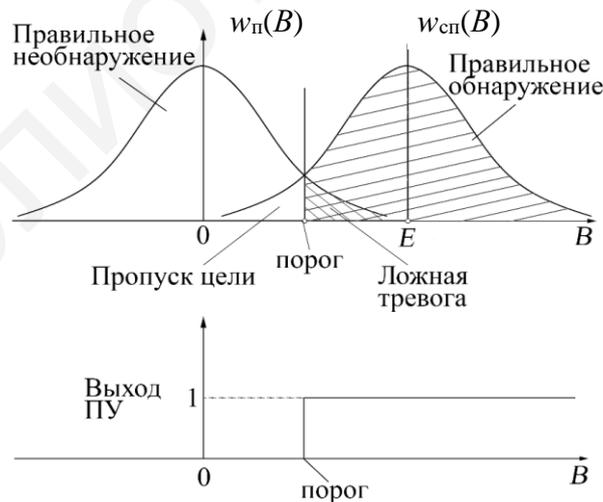


Рисунок 8.6 – Условные плотности вероятности $w_n(B)$ и $w_{сн}(B)$ сигнала $B(T)$ на выходе интегрирующего устройства коррелятора и сигнал на выходе порогового устройства

Если все сигналы $U_i(t)$, а следовательно, и сигналы $S_i(t)$, имеют одинаковую энергию, алгоритм (8.20) можно представить следующим образом:

$$\int_0^T Z(t)S_i(t)dt > \int_0^T Z(t)S_j(t)dt, \quad j \neq i. \quad (8.26)$$

В данном случае схема приемного устройства упрощается, т. к. в ней отсутствуют вычитающие устройства. Кроме того, в схему не нужно вносить изменения, если приходящий из канала связи сигнал $Z(t)$ умножить на константу. Поэтому в каналах с замираниями используют сигналы с равной энергией. Такие системы связи получили название систем с активной паузой, т. к. энергия сигнала в любом единичном интервале отлична от нуля.

Примером сигнала с активной паузой является сигнал с частотной манипуляцией (двоичной частотной модуляцией). В этом случае длина блока k равна единице, $2^k = 2$, т. е. возможные кодовые слова (символы b_i) – 0 и 1. Пример последовательности информационных символов $u(t)$ и соответствующий ей частотно-манипулированный сигнал $u_{\text{чмн}}(t)$ приведены на рисунке 2.19.

Рассмотрим системы с пассивной паузой. Примером такой системы является передача однополярных прямоугольных видеоимпульсов, т. е. видеосигнала с пассивной паузой. Тогда

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a, \quad s_0(t) = 0; \quad s_{\Delta}(t) = s_1(t) - s_0(t) = s_1(t) = a; \\ E_1 &= a^2T, \quad E_0 = 0; \\ \lambda &= 0,5(E_1 - E_0) = \frac{a^2T}{2}. \end{aligned}$$

Алгоритм обнаружения, реализуемый приемным устройством:

$$\int_0^T Z(t)dt > \frac{aT}{2}.$$

На практике видеоимпульсы в системах связи используют редко и лишь в простейших проводных устройствах. На смену им давно пришли системы с высокочастотными сигналами. Рассмотрим алгоритм работы приемного устройства для систем с различными видами манипуляции.

В системах связи с двоичной амплитудной модуляцией (с двоичным радиосигналом)

$$s_1(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad s_0(t) = 0,$$

где постоянные a , ω_0 , φ заданы. В этом случае

$$s_{\Delta}(t) = s_1(t), E_1 = \frac{a^2 T}{2}, E_0 = 0.$$

Тогда алгоритм работы приемника принимает следующий вид:

$$\int_0^T Z(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt > \frac{aT}{4}.$$

Опорным сигналом в данном случае является колебание вида $\cos(\omega_0 t + \varphi)$, а значение порогового уровня $\lambda = E_1 / 2a$.

Замечание 1. Энергия двоичного радиосигнала в два раза меньше энергии двоичного видеосигнала.

Замечание 2. Если опорный сигнал имеет вид $a \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то $\lambda = E_1 / 2$.

Рассмотрим двоичную фазовую модуляцию. В этом случае

$$s_1(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi), s_0(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -s_1(t).$$

В отличие от системы с двоичной амплитудной модуляцией – это система с активной паузой, следовательно, порог $\lambda = 0$. Алгоритм работы приемного устройства заключается в проверке неравенства

$$\int_0^T Z(t) \cos(\omega_0 + \varphi) dt > 0.$$

Схема приемного устройства та же, что и для двоичной амплитудной модуляции. Однако в этом случае значение порога равно нулю.

Сравним реализации приемников на корреляторах и согласованных фильтрах.

Очевидным преимуществом схемы, построенной на основе согласованных фильтров, является отсутствие генераторов опорных сигналов. Поэтому нет необходимости в согласовании их по фазе с сигналом, поступающим на вход приемника.

Рассмотрим временные диаграммы сигнала на выходе согласованного фильтра и интегрирующего устройства коррелятора для сигнала в виде прямоугольного радиоимпульса. Помехи в канале не учитываются. Соответствующие диаграммы приведены на рисунке 8.7. В момент времени, соответствующий окончанию радиоимпульса, значение сигнала на выходе согласованного фильтра соответствует значению на выходе коррелятора. Однако в другие моменты времени они различны. Причем для согласованного фильтра допустимое отклонение во времени от момента T значительно меньше. Для коррелятора это отклонение определяется длительностью импульса, а для согласованного фильтра –

периодом высокочастотного заполнения импульса. Поэтому реализовать когерентный отсчет времени в согласованном фильтре значительно труднее, чем в корреляционном приемнике.

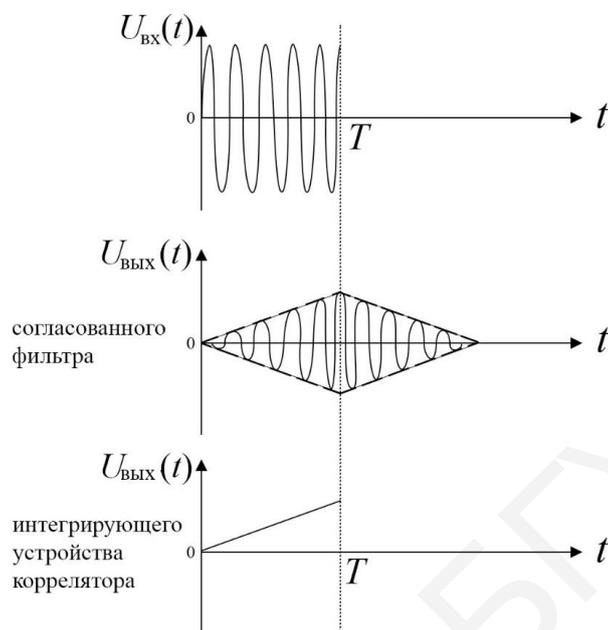


Рисунок 8.7 – Временные диаграммы сигнала на выходе согласованного фильтра и интегрирующего устройства коррелятора для прямоугольного радиоимпульса

Таким образом, сложность реализации согласованного фильтра и коррелятора сопоставимы. Однако реализовать переход на другую частоту сигнала в приемном устройстве на корреляторе значительно проще, достаточно перестроить опорный генератор. В случае приемника на согласованных фильтрах при смене частоты сигнала нужно менять согласованный фильтр.

Порядок выполнения лабораторной работы

Запустите программу *lab4v1.exe*.

1. Исследуйте осциллограммы сигнала:

1.1. Выберите сигнал «Видеоимпульс».

1.2. Зарисуйте осциллограммы сигналов. Для сигналов «Видеоимпульс» и «Последовательность Баркера» сигнал на выходе детектора зарисовывать не нужно. Детектор огибающей применяется только для сигнала «Радиоимпульс».

1.3. Повторите подпункт 1.2 для сигналов «Радиоимпульс», «Последовательность Баркера».

2. Исследуйте рабочую характеристику приемника:

2.1. Выберите сигнал «Видеоимпульс».

2.2. Установите дисперсию шума в канале, равную 0 В^2 .

2.3. Изменяя уровень порога от 0 до 1,5 В с шагом 0,05 В, запишите вероятность обнаружения сигнала.

2.4. Повторите подпункт 2.3 для следующих значений дисперсии шума в канале: 0,5; 1; 2,5; 5; 7,5 В².

2.5. Заполните таблицу 8.1, которая будет содержать вероятности правильного обнаружения сигнала $P(1|1)$.

2.6. Выключите сигнал, выбрав «нет сигнала».

2.7. Выберите фильтр, согласованный с видеоимпульсом, т. е. фильтр должен быть согласован с используемым сигналом, несмотря на отсутствие сигнала на выходе передатчика.

2.8. Повторите подпункты 2.2–2.5 при отсутствии сигнала на выходе передатчика. Таблица будет содержать вероятности ложной тревоги $P(1|0)$.

2.9. Для каждого уровня шума постройте график рабочей характеристики приемника как функцию $P(1|1) = f[P(1|0)]$. Полученное семейство рабочих характеристик приемника будет содержать шесть графиков (по одному для каждого уровня шума), которые необходимо изобразить на одной системе координат.

2.10. Повторите подпункты 2.2–2.8 для сигналов «Радиоимпульс», «Последовательность Баркера».

Таблица 8.1 – Таблица вероятностей

Дисперсия шума	Уровень порога								
	0	0,05	0,1	0,15	...	1,35	1,4	1,45	1,5
0									
0,5									
1									
2,5									
5									
7,5									

Контрольные задания

1. Что такое оптимальный приемник?
2. Поясните, что такое решающая схема со стиранием.
3. На сколько областей следует разбить пространство двоичных сигналов со стиранием?
4. Запишите критерий идеального наблюдателя для двоичной системы.
5. Запишите алгоритм приема (8.20) для двоичной системы, используя понятия разностного сигнала $s_{\Delta}(t) = s_1(t) - s_0(t)$ и порогового уровня $\lambda = 0,5(E_1 - E_0)$.
6. Запишите алгоритм приема (8.20) для двоичной системы с активной паузой, используя понятие разностного сигнала $s_{\Delta}(t) = s_1(t) - s_0(t)$.

Список использованных источников

1. Клюев, Л. Л. Теория электрической связи / Л. Л. Клюев. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. – 448с.
2. Бикенин, Р. Р. Теория электрической связи : учеб. пособие для студ. высш. учеб. зав. / Р. Р. Бикенин, М. Н. Чесноков. – М. : Изд. центр «Академия», 2010. – 336 с.
3. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 432 с.
4. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов по спец. «Радиотехника» / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1988. – 448 с.
5. Теория электрической связи: учебник для вузов / А. Г. Зюко [и др.] ; под ред. Д. Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 1999. – 432 с.
6. Заездный, А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / А. М. Заездный. – М. : Связь, 1969. – 448 с.
7. Чердынцев, В. А. Радиотехнические системы : учеб. пособие для вузов / В. А. Чердынцев. – Минск : Выш. шк., 1988. – 369 с.

Учебное издание

Власова Галина Александровна
Рощупкин Яков Викторович

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 30.08.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 60 экз. Заказ 141.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск