МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2022. № 2. С. 12–17

УДК 517.983

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРЕ

Н. В. Князюк,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГУИР

Поступила в редакцию 27.04.2022.

UDC 535.343

INTEGRAL OPERATOR WITH GENERALIZED FUNCTION OF MITTAG-LEFFLER IN NUCLEUS

N. Kniaziuk,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, BSUIR

Received on 27.04.2022.

В статье рассматривается специальная функция, обобщающая классические функции Миттаг-Леффлера и интегральный оператор, содержащий такую функцию в ядре. Доказываются формулы композиций модифицированных дробных интегралов и производных на полуоси с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера. Исследуются свойства интегрального оператора с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре. В частности, доказывается ограниченность оператора в пространстве интегрируемых функций, формулы композиций с модифицированными дробными интегралами и производными.

Ключевые слова: обобщенная функция Миттаг-Леффлера, дробные интегралы и производные, интегральный оператор с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре.

The article considers a special function that generalizes classical functions of Mittag-Leffler and integral operator having such function in its nucleus. It proves the formulas of compositions of modified fraction integrals and derivatives on half-axles with generalized function of Mittag-Leffler. It studies the properties of integral operator with generalized function of Mittag-Leffler in nucleus. In particular, limitation of the operator in the space of integrated functions, formulas of compositions with modified fraction integrals and derivatives are proved.

Keywords: generalized function of Mittag-Leffler, fraction integrals and derivatives, integral operator with generalized function of Mittag-Leffler in nucleus.

Специальные функции

$$E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+1)}\quad \left(\rho\in\mathbb{C},\, Re(\rho)>0\right) \tag{1}$$

и

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}\quad \left(\rho,\mu,z\in\mathbb{C},\, Re(\rho)>0,\, Re(\mu)>0\right) \tag{2}$$

были введены Г. М. Миттаг-Леффлером (G. M. Mittag-Leffler) в [1] и [2] соответственно и известны как классические функции Миттаг-Леффлера. Основные факты из теории этих функций приведены в справочнике [3, §18.1] и монографиях М. М. Джрбашяна (M. M. Dzherbashyan) [4, гл. 3], [5, гл. 1].

Т. Прабхакар (T. Prabhakar) [6] ввел функцию $E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)$ в виде

$$E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)k!}\quad \left(\rho,\mu,\gamma\in\mathbb{C},\, Re(\rho)>0,\, Re(\mu)>0\right), \tag{3}$$

где $(\gamma)_k$ – символ Похгаммера

$$(\gamma)_0=1,\,(\gamma)_k=\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdot\ldots\cdot(\gamma+k-1)\ \ (k\in\mathbb{N}).$$

В частности, при $\gamma=1$ функция $E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)$ совпадает с функцией (2):

$$E^{1}_{\rho,\mu}(z)\equiv E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}\quad \left(\rho,\mu\in\mathbb{C},\, Re(\rho)>0,\, Re(\mu)>0\right),$$

а при $\gamma=\mu=1$ с функцией (1):

$$E^{1}_{\rho,1}(z)\equiv E_{\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\rho k+1)}\quad(\rho\in\mathbb{C},\,Re(\rho)>0).$$

Так как функция $E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)$ обобщает классические функции Миттаг-Леффлера, то она называется обобщенной функцией Миттаг-Леффлера. В [6–10] были исследованы некоторые свойства интегрального оператора

$$\left(E^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega;a+}\varphi\right)(x)=\int_{a}^{x}(x-t)^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}\left(\omega(x-t)^{\rho}\right)\varphi(t)\,dt\quad(x>a),$$

где $\rho,\mu,\gamma\in\mathbb{C},\,Re\,p>0,\,Re\,\mu>0$, содержащего функцию (3) в ядре.

В [11] рассмотрена специальная функция

$$E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}z^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_{k}}\quad,\tag{4}$$

где $\rho,\mu,\gamma,\delta\in\mathbb{C},\,\min\{Re(p),\,Re(\mu),Re(\delta)\}>0,$ которая является обобщением функций (1)–(3). В частности, при $\delta=1$ функция (4) совпадает с функцией (3):

$$E^{\gamma,1}_{\rho,\mu}(z)=E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z),$$

а при $\delta=\gamma=1$ и при $\delta=\gamma=\mu=1$ с функциями (2) и (1) соответственно:

$$E^{1,1}_{\rho,\mu}(z)=E_{\rho,\mu}(z)\ \text{ и }\ E^{1,1}_{\rho,1}(z)=E_{\rho}(z).$$

В [11] установлены некоторые свойства функции (4). В частности, дано представление для $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}(z)$ в терминах интеграла Меллина – Барнса, доказаны формулы обычного дифференцирования, получены формулы преобразований Меллина и Лапласа функции (4).

Данная работа посвящена дальнейшему изучению свойств функции $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}(z)$ и изучению свойств интегрального оператора

$$\left(E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}\varphi\right)(x)=\int_{x}^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu-1}E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}\left[\lambda\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\rho}\right]\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^{2}}\tag{5}$$

$$\left(\rho>0,\,\mu>0,\,\gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R};\,x\in(a;+\infty),\,a>0\right),$$

содержащего функцию (4) в ядре. Сначала мы устанавливаем формулы композиций модифицированных дробных интегралов и производных [12]

$$\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\psi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\alpha-1}\frac{\psi(\tau)}{\tau^{2}}d\tau,\ x\in(a;+\infty),a>0;\ \alpha>0\tag{6}$$

и

$$\left(\mathrm{D}^{\alpha}_{-}y\right)(x)=\left(-x^{2}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\mathrm{J}^{n-\alpha}_{-}y\right)(x),\ x\in(a;+\infty),a>0;\ \alpha>0,\ n=[\alpha]+1\tag{7}$$

с функцией $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}(z)$.

В [12], [13] установлены свойства операторов дробного интегрирования J^{α}_{-} и дифференцирования D^{α}_{-} в пространстве интегрируемых функций. В частности, доказано, что модифицированное дробное интегрирование и дифференцирование от степенной функции дают степенную функцию, модифицированное дробное интегрирование обладает полугрупповым свойством.

Лемма 1. [12, лемма 6] Если $\alpha>0$ и $\beta<2$, то при $x\in(a;+\infty),a>0$

$$\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\tau^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}x^{\beta-\alpha-1}\tag{8}$$

и

$$\left(D_{-}^{\alpha}\tau^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}x^{\beta+\alpha-1} \qquad (9)$$

В частности,

$$\left(D_{-}^{\alpha}t^{-\alpha+j}\right)(x)=0\ \left(j=1,\ldots,\ n=-[-\alpha]\right).$$

Лемма 2. [13, лемма 2] Модифицированное дробное интегрирование (6) обладает полугрупповым свойством:

$$J_{-}^{\alpha}J_{-}^{\beta}f=J_{-}^{\alpha+\beta}\ \left(\alpha>0,\ \beta>0\right), \qquad (10)$$

имеющим место почти всюду для $f\in\Im(a;\infty)$.

Далее в работе доказывается ограниченность интегрального оператора $E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}$ в пространстве $\Im(a;\infty)$ измеримых по Лебегу функций на полуоси $(a;\infty)$, $a>0$ с весом x^{-2}:

$$\Im(a;\infty)=\left\{y:\|y\|_{\Im(a;\infty)}=\int_a^\infty x^{-2}|y(x)|dx<\infty\right\}\ (a>0).$$

Также устанавливаются формулы композиций интегрального оператора (5) с операторами модифицированного дробного интегрирования и дифференцирования на полуоси $(a;+\infty)$, определяемыми формулами (6), (7) соответственно.

Сначала исследуем дробное интегрирование (6) и дробное дифференцирование (7) функции $E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}(z)$.

Теорема 1. Пусть $\rho>0,\ \mu>0,\ \alpha>0,\ \gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R};\ x\in(a;+\infty),\ a>0$.

Тогда верны следующие равенства

$$\left(J_{-}^{\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=x^{1-\mu-\alpha}E_{\rho,\mu+\alpha}^{\gamma,\delta}\left(\lambda x^{-\rho}\right) \qquad (11)$$

и

$$\left(D_{-}^{\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=x^{1-\mu+\alpha}E_{\rho,\mu-\alpha}^{\gamma,\delta}\left(\lambda x^{-\rho}\right). \qquad (12)$$

Доказательство. Используя (4) и (6) и осуществляя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда (4), получим

$$\left(J_{-}^{\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\lambda^k}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_k}\left(J_{-}^{\alpha}\tau^{-\rho k-\mu+1}\right)(x).$$

К полученному выражению применим формулу (8), где $\beta=-\rho k-\mu+2$.

Имеем

$$\left(J_{-}^{\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\lambda^k}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_k}\frac{\Gamma(2+\rho k+\mu-2)}{\Gamma(\alpha+\rho k+\mu-2+2)}x^{-\rho k-\mu+2-\alpha+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k\lambda^k}{\Gamma(\rho k+\mu+\alpha)(\delta)_k}x^{1-\rho k-\mu-\alpha}=x^{1-\mu-\alpha}E_{\rho,\mu+\alpha}^{\gamma,\delta}\left(\lambda x^{-\rho}\right).$$

Формула (11) доказана.

Докажем (12). Применяя (4), (7), (8) и осуществляя почленное дифференцирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда (4), а также учитывая формулу $\left(\mathrm{D}_{-}^{n}y\right)(x)=\left(-x^{2}\dfrac{d}{dx}\right)^{n}y(x)\ \ (n\in\mathbb{N})$ и используя (9) с $\alpha=n$ и $\beta=-\rho k-\mu+\alpha-n+2$, получим

$$\left(\mathrm{D}_{-}^{\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=\left(-x^{2}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\mathrm{J}_{-}^{n-\alpha}\left[\tau^{1-\mu}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left(\lambda\tau^{-\rho}\right)\right]\right)(x)=$$

$$=\left(-x^{2}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_{k}}\left(\mathrm{J}_{-}^{n-\alpha}\tau^{-\rho k-\mu+1}\right)(x)\right)=$$

$$=\left(-x^{2}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu+\alpha)(\delta)_{k}}\frac{\Gamma(2+\rho k+\mu-2)}{\Gamma(n-\alpha+\rho k+\mu-2+2)}x^{-\rho k-\mu+2-n+\alpha-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu-\alpha+n)(\delta)_{k}}\left(-x^{2}\frac{d}{dx}\right)^{n}x^{-\rho k-\mu+\alpha-n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu-\alpha)(\delta)_{k}}x^{-\rho k-\mu+\alpha+1}=x^{1-\mu+\alpha}E_{\rho,\mu-\alpha}^{\gamma,\delta}\left(\lambda x^{-\rho}\right),$$

что и доказывает формулу (12). Теорема доказана.

Непосредственно доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\rho>0,\ \mu>0,\ \ \gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R}$, то оператор $E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}$ ограничен в пространстве $\Im(a;\infty)$ и

$$\left\|E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}\psi\right\|_{\Im(a;\infty)}\leq A\cdot\|\psi\|_{\Im(a;\infty)},$$

где

$$A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|(\gamma)_{k}\right|\cdot|\lambda|^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu+1)\cdot a^{\rho k+\mu}\cdot\left|(\delta)_{k}\right|}.$$

Следующая теорема обобщает формулу (8).

Теорема 3. Пусть $\rho>0,\ \mu>0,\ \beta<2,\ \gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R};\ x\in(a;+\infty),a>0$.
Тогда имеет место равенство

$$\left(E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}\tau^{\beta-1}\right)(x)=\Gamma(2-\beta)\,x^{\beta-\mu-1}E_{\rho,\mu-\beta+2}^{\gamma,\delta}\left(\lambda x^{-\rho}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Используя (5) и (4), запишем левую часть (13) следующим образом

$$\left(E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}\tau^{\beta-1}\right)(x)=\int_{x}^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu-1}E_{\rho,\mu}^{\gamma,\delta}\left[\lambda\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\rho}\right]\frac{\tau^{\beta-1}d\tau}{\tau^{2}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_{k}}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu+\rho k-1}\frac{\tau^{\beta-1}d\tau}{\tau^{2}}.$$

Перестановка интегрирования и суммирования возможна в силу равномерной сходимости ряда. Согласно (6) и (8), получим

$$\left(E_{\rho,\mu,\lambda;-}^{\gamma,\delta}\tau^{\beta-1}\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{(\delta)_{k}}\left(\mathrm{J}_{-}^{\rho k+\mu}\tau^{\beta-1}\right)(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{k}\lambda^{k}}{(\delta)_{k}}\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\rho k+\mu-\beta+2)}x^{\beta-\rho k-\mu-1}=$$

$$= \Gamma(2-\beta)\, x^{\beta-\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k} \frac{x^{-\rho k}}{\Gamma(\rho k+\mu-\beta+2)} =$$

$$= \Gamma(2-\beta)\, x^{\beta-\mu-1} E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu-\beta+2}\left(\lambda x^{-\rho}\right),$$

что и доказывает равенство (13). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим композицию модифицированного дробного интегрального оператора J^{α}_{-} с интегральным оператором $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}$, содержащим обобщенную функцию Миттаг-Леффлера (4) в ядре. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\alpha > 0$, $\rho > 0$, $\mu > 0$, $\gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда имеют место равенства

$$\mathrm{J}^{\alpha}_{-} E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}\psi = E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu+\alpha,\lambda;-}\psi = E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\psi \tag{14}$$

для функций $\psi \in \Im(a;+\infty)$.

Доказательство. Согласно определениям оператора $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}$ (5) и модифицированного дробного интеграла J^{α}_{-} (6), учитывая теорему 2 и равенство (10), получим для $\psi \in \Im(a;+\infty)$

$$\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-} E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}\psi\right)(x) = \left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\left(\int_x^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu-1} E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu}\left[\lambda\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\rho}\right]\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau^2}\right)\right)(x) =$$

$$= \left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k+\mu)(\delta)_k}\int_x^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\mu+\rho k-1}\frac{\psi(\tau)}{\tau^2}d\tau\right)\right)(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k}\left(\mathrm{J}^{\alpha}_{-}\mathrm{J}^{\mu+\rho k}_{-}\psi\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k \lambda^k}{(\delta)_k}\left(\mathrm{J}^{\alpha+\mu+\rho k}_{-}\psi\right)(x) =$$

$$= \int_x^{\infty}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\alpha+\mu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k \lambda^k}{\Gamma(\rho k+\mu+\alpha)(\delta)_k}\left(\frac{\tau-x}{\tau x}\right)^{\rho k}\frac{\psi(\tau)}{\tau^2}d\tau =$$

$$= \left(E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu+\alpha,\lambda;-}\psi\right)(x).$$

Перестановка интегрирования и суммирования возможна в силу равномерной сходимости ряда. Аналогично доказывается второе равенство в (14). Теорема доказана.

Равенства (14) отражают свойство коммутативности модифицированного дробного интеграла J^{α}_{-} и интегрального оператора $E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}$.

Следующая теорема содержит формулу композиции модифицированного дробного дифференциального оператора (7) и интегрального оператора (5).

Теорема 5. Пусть $\alpha > 0$, $\rho > 0$, $\mu > 0$, $\gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда равенство

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{-} E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu,\lambda;-}\psi = E^{\gamma,\delta}_{\rho,\mu-\alpha,\lambda;-}\psi$$

верно для функций $\psi \in \Im(a;+\infty)$.

Литература

1. *Mittag-Leffler, G. M.* Sur la nouvelle function $E_{\alpha}(x)$ / G. M. Mittag-Leffler // C. R. Acad. Sci. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. *Mittag-Leffler, G. M.* Sur la representation analytiqie d'ne function monogene / G. M. Mittag-Leffler // Acta Math. – 1905. – Vol. 29. – P. 101–181.

References

1. *Mittag-Leffler, G. M.* Sur la nouvelle function $E_{\alpha}(x)$ / G. M. Mittag-Leffler // C. R. Acad. Sci. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. *Mittag-Leffler, G. M.* Sur la representation analytiqie d'ne function monogene / G. M. Mittag-Leffler // Acta Math. – 1905. – Vol. 29. – P. 101–181.

3. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – 300 с.
4. *Джрбашян, М. М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М. : Наука, 1966. – 671 с.
5. *Djrbashian, M. M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M. M. Djrbashian. – Berlin: Bickhauser-Verlag, Basel, 1993. – 480 p.
6. *Prabhakar, T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel / T. R. Prabhakar // Yokohama Math. J. – 1971. – Vol. 19. – P. 7–15.
7. *Gorenflo, R.* On generalized Mittag-Leffler type function / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, S. V. Rogosin // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1998. – Vol. 7, № 3–4. – P. 215–224.
8. *Gorenflo, R.* On Mittag-Leffler in fractional evolution processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 118. – P. 283–299.
9. *Kilbas, A. A.* On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations / A. A. Kilbas, M. Saigo // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1996. – Vol. 4, № 4. – P. 355–370.
10. *Kilbas, A. A.* Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators / A. A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena // Integral Transforms and Spec. Funct. – 2004. – Vol. 15, № 1. – P. 31–49.
11. *Salim, T. O.* Some properties relating to the generalized Mittag-Leffler function, / T. O. Salim //Adv. Appl. Math. Anal. – 2009. – Vol. 4. – P. 21–30.
12. *Килбас, А. А.* Модифицированные дробные интегралы и производные на полуоси и дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций / А. А. Килбас, Н. В. Князюк // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – 2007. – Т. 15, № 1. – С. 68–77.
13. *Килбас, А. А.* О модифицированных дробных интегралах и производных на полуоси / А. А. Килбас, Н. В. Князюк // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию А. М. Нахушева и 15-летию со дня основания НИИ прикладной математики и автоматизации, Нальчик, 5–9 дек. 2006 г. / НИИ ПМА; редкол.: А. В. Псху [и др.]. – Нальчик, 2006. – С. 155–159.

3. *Bejtmen, G.* Vysshie transcendentnye funkcii : v 3 t. / G. Bejtmen, A. Erdeji. – M.: Nauka, 1967. – T. 3: Ellipticheskie i avtomorfnye funkcii. Funkcii Lame i Mat'e. – 300 s.
4. *Dzhrbashyan, M. M.* Integral'nye preobrazovaniya i predstavlenie funkcij v kompleksnoj oblasti / M. M. Dzhrbashyan. – M. : Nauka, 1966. – 671 s.
5. *Djrbashian, M. M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M. M. Djrbashian. – Berlin: Bickhauser-Verlag, Basel, 1993. – 480 p.
6. *Prabhakar, T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel / T. R. Prabhakar // Yokohama Math. J. – 1971. – Vol. 19. – P. 7–15.
7. *Gorenflo, R.* On generalized Mittag-Leffler type function / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, S. V. Rogosin // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1998. – Vol. 7, № 3–4. – P. 215–224.
8. *Gorenflo, R.* On Mittag-Leffler in fractional evolution processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 118. – P. 283–299.
9. *Kilbas, A. A.* On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations / A. A. Kilbas, M. Saigo // Integral Transforms and Spec. Funct. – 1996. – Vol. 4, № 4. – P. 355–370.
10. *Kilbas, A. A.* Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators / A. A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena // Integral Transforms and Spec. Funct. – 2004. – Vol. 15, № 1. – P. 31–49.
11. *Salim, T. O.* Some properties relating to the generalized Mittag-Leffler function, / T. O. Salim //Adv. Appl. Math. Anal. – 2009. – Vol. 4. – P. 21–30.
12. *Kilbas, A. A.* Modificirovannye drobnye integraly i proizvodnye na poluosi i differencial'nye uravneniya drobnogo poryadka v prostranstve integriruemyh funkcij / A. A. Kilbas, N. V. Knyazyuk // Trudy In-ta matematiki / NAN Belarusi, In-t matematiki. – 2007. – T. 15, № 1. – S. 68–77.
13. *Kilbas, A. A.* O modificirovannyh drobnyh integralah i proizvodnyh na poluosi / A. A. Kilbas, N. V. Knyazyuk // Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy matematicheskoj biologii, informatiki i fiziki: materialy III mezhdunar. nauch. konf., posvyashch. 70-letiyu A. M. Nahusheva i 15-letiyu so dnya osnovaniya NII prikladnoj matematiki i avtomatizacii, Nal'chik, 5–9 dek. 2006 g. / NII PMA; redkol.: A. V. Pskhu [i dr.]. – Nal'chik, 2006. – S. 155–159.