Исследование однородных пространств с совершенной алгеброй голономии

Н. П. Можей, e-mail: mozheynatalya@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Объектом исследования являются алгебры голономии инвариантных связностей на однородных пространствах. Определены основные понятия: инвариантная аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии. Целью работы является описание совершенных алгебр голономии аффинных связностей на однородных пространствах. Проведено локальное описание трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантную связность с совершенной алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны тензоры кривизны и кручения и сами совершенные алгебры голономии указанных связностей. Методика исследований ориентирована на использование средств компьютерной алгебры, теории групп и алгебр Ли, а также теории однородных пространств.*

Ключевые слова: *алгебра голономии, однородное пространство, аффинная связность, тензор кривизны, тензор кручения.*

Введение

Многообразие обладает совершенной группой голономии, если вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны. Связь совершенной группы голономии лоренцевых пространств с рекуррентными тензорными полями рассматривается, например, в [1]. С описанием алгебр голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований можно ознакомиться в [2], целью же данной статьи является определение, при каких условиях алгебра голономии является совершенной. Работа является продолжением исследований автора в области дифференциальной геометрии с использованием пакетов аналитических вычислений.

Основная часть

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре ($\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\ 1}(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^{\ 1}(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [3] об алгебре голономии: алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\overline{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \overline{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\overline{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x); x \in \overline{\mathfrak{g}}\}$.

Многообразие обладает совершенной группой голономии, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны.

Будем описывать пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $n = \dim \overline{\mathfrak{g}}$, причем $\{e_1, \ldots, e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n,$ а для нумерации пар – запись $d.n.m,$ здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются в таблице умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$. Будем выписывать аффинную связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, а тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$. Все указанные далее связности являются связностями без кручения. Также далее везде по умолчанию будет предполагаться, что алгебра голономии является ненулевой.

Проведение вычислений для нахождения совершенных алгебр голономии наиболее эффективно с использованием систем компьютерной математики, в частности, в системы Maple (пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor и другие).

Рассмотрим, например, случай 4.13, где

$$\mathfrak{g}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & z & u \\ 0 & \lambda y & y \\ 0 & -y & \lambda y \end{pmatrix}\right| x,y,z,u\in\mathbb{R},\lambda\geq 0\right\},$$

базис подалгебры выбираем, придав одной и латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2. Пусть $q:\mathfrak{g}\to L(\mathfrak{m},\mathfrak{g})$ – линейное отображение, такое, что $q([x,y])=x.q(y)-y.q(x),\ x,y\in\mathfrak{g}$. Рассмотрим комплексный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i=e_i\otimes 1,\ \ 1\leq i\leq 4,\ \ \tilde{u}_j=u_j\otimes 1,\ \ 1\leq j\leq 3$. Тогда $\tilde{E}=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, $\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3\}$ – стандартный базис $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Поскольку $\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_4$, $\mathfrak{g}^{(1,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)$, $\mathfrak{g}^{(1,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)$, $(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^{(0,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)$, $(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^{(0,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)$, $(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^{(1,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}u_1$, имеем $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_1)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_1)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_1)(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_1)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_1)=0$, $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_4)(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)=0$. Поэтому $q^{\mathbb{C}}(\tilde{e}_i)(u_j)=0$, $1\leq i\leq 4$, $1\leq j\leq 3$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})=\mathbb{C}(\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3)$, тогда $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1,\lambda+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1,\lambda-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3,\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(0,2\lambda)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Если $\lambda\neq 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна (т.е. существует коммутативный идеал $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}$). Связность на этой паре, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые. Если $\lambda=0$, то $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3]=[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]+i[\tilde{u}_1,\tilde{u}_3]\in\mathbb{C}(\tilde{e}_2+i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3]=[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]-i[\tilde{u}_1,\tilde{u}_3]\in\mathbb{C}(\tilde{e}_2-i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_2+i\tilde{u}_3,\tilde{u}_2-i\tilde{u}_3]=-2i[\tilde{u}_2,\tilde{u}_3]\in\mathbb{C}e_1+\mathbb{C}e_4$. Тогда $[u_1,u_2]=a_2e_2+a_3e_3$, $[u_1,u_3]=b_2e_2+b_3e_3$, $[u_2,u_3]=c_1e_1+c_4e_4$. В силу тождества Якоби получаем, что $[u_1,u_2]=a_2e_2$, $[u_1,u_3]=a_2e_3$,

$[u_2, u_3] = a_2 e_4$. При $a_2 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна (связность на ней, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые). При $a_2 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 4.13.2 устанавливается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 4}$, $\pi(u_j) = a_2^{-1/2} u_j$, $j = \overline{1, 3}$, где

4.13.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

Связность на этой паре и ее тензор кручения нулевые, тензор кривизны имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра, порожденная множеством $R(u_i, u_j)$, т. е. $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, группа голономии совершенна) и имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

При $a_2 < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $\pi(u_j) = (-a_2)^{-1/2} u_j$, $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 3}$ эквивалентна паре 4.13.3 (поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, ни одна из пар 4.13.2 и 4.13.3 не эквивалентна тривиальной паре; подалгебры Леви алгебр 4.13.2 и 4.13.3 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ соответственно, следовательно, пары не эквивалентны), где

4.13.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3

e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

Связность на этой паре и ее тензор кручения также нулевые, тензор кривизны имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны (т. е. группа голономии совершенна) и имеет вид, приведенный в случае 4.13.2. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заключение

С использованием системы аналитических вычислений получены новые результаты в теории инвариантных связностей на многообразиях, а именно, найдены трехмерные однородные пространства, допускающие аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны тензоры кривизны и кручения и сами совершенные алгебры голономии указанных связностей. Методика исследований ориентирована на использование средств компьютерной алгебры, теории групп и алгебр Ли, а также теории однородных пространств.

Список литературы

1. Кайгородов, В. Р. Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии/ В. Р. Кайгородов // Гравитация и теория относительн. 1978. – № 14–15. – С. 113–120.
2. Можей, Н. П. Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований/ Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета. 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.
3. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle/ H. C. Wang // Nagoya Math. J. 1958. – № 13. – P. 1–19.