Н. П. МОЖЕЙ
УО БГУИР (г. Минск, Беларусь)

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [1]). В данной работе изучаются трехмерные однородные пространства, не допускающие эквиаффинных связностей.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G) (см., например, [2]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [3]. *Тензоры кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. Тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$ имеет вид $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, тогда $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\ldots,e_{n-3}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [4], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Например, выберем из пространств, найденных в [4], не допускающие эквиаффинную связность. Рассмотрим пару

2.9.4, $\mu=0,-1$.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

,

при $\mu=-1$ аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения – $\left(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0\right),\left(0,2p_{2,3},0\right),\left(0,0,q_{1,1}-p_{1,2}+1\right)$. Тензор кручения нулевой при $q_{1,1}=p_{1,2}-1$, $p_{2,3}=0$, тогда имеем локально эквиаффинную связность. Связность является эквиаффинной при $2q_{1,1}+q_{2,2}=0$, тогда (с учетом T=0) получаем $q_{2,2}=-2p_{1,2}+2$. В данном случае тензор Риччи также является симметрическим при $p_{2,3}(q_{1,1}-p_{1,2}-q_{2,2}-1)=0$, в частности, при T=0. При μ=0 аффинная связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11}+p_{13} \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения – $(p_{12}-q_{11}-1,0,0),(p_{13}-r_{11},0,0),(0,q_{23}-r_{22},q_{11}-p_{12}+1)$. Прямыми вычислениями получаем, что пара не допускает эквиаффинных связностей. Таким образом, в работе определено, при каких условиях пара не допускает эквиаффинных связностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.

2. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.

3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.

4. Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 74–81.