УДК 514.76

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С СОВЕРШЕННОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

Н. П. Можей
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе изучаются трехмерные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность с только нулевым кручением. Определены основные понятия: однородное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии, совершенная алгебра голономии. Для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях алгебра голономии нетривиальной аффинной связности с нулевым кручением является совершенной. Также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств. Особенностью методов, представленных в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: аффинная связность, однородное пространство, тензор кривизны, алгебра голономии, тензор кручения.

Введение

Еще Феликс Клейн [1] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т.е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Основополагающим в подходе Клейна является понятие однородного пространства. После работ Э. Картана (например, [2]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность.

Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии, которая может быть описана через группу Ли – группу голономии. В качестве примеров можно привести голономию связности Леви–Чевита в римановой геометрии (называемую «римановой голономией»), голономию связностей в векторных расслоениях, голономию связностей Картана и др. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 году у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия.

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и структурой многообразия. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии (т.е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работе [3] и других работах этого автора. Алгебры голономии нетривиальных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах исследовались в [4], в данной работе изучается, при каких условиях группа голономии является совершенной, рассматривается случай инвариантных аффинных связностей без кручения.

Основная часть

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – *однородное пространство*, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии (например, [6]) с аффинными связностями на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$). *Тензоры кручения* $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. Тензор Риччи имеет вид $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}$. Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [7] об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x); x\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Основное свойство $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ таково: пусть $\mathfrak{h}^*$ – алгебра Ли группы голономии, тогда $\mathfrak{h}^*\subset\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}\subset\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $N(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор $\mathfrak{h}^*$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Многообразие обладает *совершенной группой голономии*, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны. В противном случае будем называть группу голономии *несовершенной*.

Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1,\ldots,e_{n-3}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись *d.n*, а для нумерации пар – запись *d.n.m*, соответствующие приведенным в [4], где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары. Связность называется *тривиальной*, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$, в противном случае связность *нетривиальная*. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и ненулевой совершенной алгеброй голономии, локально имеют следующий вид:*

1.2.1,λ=1/4,μ=1/2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-(1/4)u_2$	0	0	0
u_3	$-(1/2)u_3$	0	0	0

2.9.1,λ=1/2,μ=1/4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(3/4)e_2$	u_1	$(1/2)u_2$	$(1/4)u_3$
e_2	$-(3/4)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	$-(1/2)u_2$	0	0	0	0
u_3	$-(1/4)u_3$	$-u_1$	0	0	0

2.9.3,μ=1/4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(3/4)e_2$	u_1	$(1/2)u_2$	$(1/4)u_3$
e_2	$-(3/4)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	$-(1/2)u_2$	0	0	0	e_2
u_3	$-(1/4)u_3$	$-u_1$	0	$-e_2$	0

3.13.2,μ=1/4 ∨ μ=1/2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-3\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-2\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(3\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(2\mu-1)u_2$	0	0	0	0	e_3
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0

3.20.4,λ=1/4	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(3/4)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
e_2	$-(3/4)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/4)u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_2
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

3.20.26,λ=1/4	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(3/4)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
e_2	$-(3/4)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/4)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

Замечание. Трехмерных однородных пространств, таких, что $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и (ненулевой) совершенной алгеброй голономии, не существует.

Действительно, заметим, что если кривизна нулевая, то алгебра голономии также нулевая, т.е. будем рассматривать случай ненулевой кривизны. Случай алгебр голономии тривиальных связностей изучался в работах [8, 9], поэтому рассматриваем только нетривиальные связности. Для каждой подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ найдены изотропно-точные пары, инвариантные аффинные связности на них и определены пары, допускающие нетривиальную аффинную связность с ненулевой совершенной алгеброй голономии (причем только с нулевым кручением).

Рассмотрим, например, локально однородное пространство 3.13.2 при $\mu \neq 0$, тогда

$$\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ r_{1,3} = 0 \text{ при } \mu \neq 1/2,\ r_{2,3} = 0$$

при $\mu \neq 1/4$.

Тензор кривизны $R(u_1, u_2) = R(u_1, u_3) = 0,$

$$R(u_2, u_3) = \left[\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)\right] - \Lambda(\left[u_2, u_3\right]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения – нулевой, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ совершенна (совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$), $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_1 \in \mathbb{R}$.

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (кривизна которой не только нулевая), рассуждения аналогичны.

Получаем, что аффинные связности имеют вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1. – Аффинные связности

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Аффинная связность
3.13.2, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.2, $\mu = 1/2$ 3.20.4, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1, $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$ 2.9.3, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1, $\lambda = 1/4, \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны найденных связностей имеют вид, приведенный в таблице 2.

Таблица 2. – Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны
3.13.2, $\mu = 1/4, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.4, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1, $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.3, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1, $\lambda = 1/4, \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3}q_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения T также нулевые.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *– трехмерное однородное пространство, допускающее нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и ненулевой совершенной алгеброй голономии. Совершенные алгебры голономии инвариантных связностей на указанных пространствах имеют вид, приведенный в таблице 3.*

Таблица 3. – Совершенные алгебры голономии

Пара	Алгебра голономии ($p_1, p_2 \in \mathbb{R}$)
3.20.4, $\lambda=1/4$; 3.20.26, $\lambda=1/4$ при $r_{1,3}\neq 0$; 1.2.1, $\lambda=1/4, \mu=1/2$ при $r_{1,3}q_{3,2}\neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.2, $\mu=1/4, 1/2$; 2.9.1, $\lambda=1/2, \mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3}\neq 0$; 2.9.3, $\mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3}\neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В случаях 3.20.26, $\lambda=1/4$ при $r_{1,3}=0$, 2.9.1, $\lambda=1/2, \mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3}=0$, 2.9.3, $\mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3}=1$, 1.2.1, $\lambda=1/4, \mu=1/2$ при $r_{1,3}q_{3,2}=0$ алгебра голономии нулевая.

Заключение

Для трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность без кручения, определено, при каких условиях алгебра голономии является совершенной, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств, отдельно выделены случаи неразрешимой и разрешимой группы преобразований. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Klein, F.*** A comparative review of recent researches in geometry / F. Klein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1893. – V.2, № 10. – P. 215–249.

2. ***Cartan, E.*** La geometrie des espaces de Riemann / E. Cartan // Memorial des Sciences Math. – 1923. – V. 9. – 457 p.

3. ***Кайгородов, В. Р.*** Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа A / В. Р. Кайгородов // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.

4. ***Можей, Н. П.*** Алгебры голономии нетривиальных связностей без кручения на трехмерных однородных пространствах / Н. П. Можей // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 13–22.

5. ***Kobayashi, S.*** Foundations of Differential Geometry/ S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York–London, 1969. – Vol. 2. – 488 p.

6. ***Nomizu, K.*** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.

7. ***Wang, H. C.*** On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 3. – P. 1–19.

8. ***Можей, Н. П.*** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.

9. ***Можей, Н. П.*** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С.170–177.

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. P. **THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH PERFECT HOLONOMY ALGEBRA**

The author studies three-dimensional homogeneous spaces, admitting the invariant affine connections with only zero torsion. The basic notions, such as homogeneous space, isotropically-faithful pair, affine connection, torsion tensor, a curvature tensor, holonomy algebra, perfect holonomy algebra, are defined. For three-dimensional homogeneous spaces, it is determined under what conditions the holonomy algebra of nontrivial affine connection with zero torsion is perfect. The affine connections, curvature tensors, and holonomy algebras are also found and written out explicitly, and the local classification of the corresponding three-dimensional homogeneous spaces is given. The peculiarity of techniques presented in the work is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them, as well as a combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras, and the theory of homogeneous spaces.

Keywords: affine connection, homogeneous space, curvature tensor, holonomy algebra, torsion tensor.