Вещественные и комплексные структуры алгебр Ли седьмого порядка

Можей Н.П.

УО “БГУИР”, Минск, Беларусь; mozheynatalya@mail.ru

В теории алгебр Ли наиболее изученным классом являются полупростые алгебры, полная классификация которых существует для каждой фиксированной размерности. Для разрешимых алгебр Ли и для полупрямых сумм полупростых и разрешимых алгебр Ли известны лишь отдельные классификационные результаты. Алгебры Ли размерности 4 над полем комплексных чисел были получены еще Софусом Ли, четырехмерные алгебры Ли над полем действительных чисел и пятимерные алгебры Ли над полями комплексных и действительных чисел — Мубаракзяновым, им же была проведена классификация разрешимых шестимерных алгебр Ли над полем действительных чисел, отдельно шестимерные нильпотентные алгебры Ли над полем комплексных чисел описаны Умлауфом, а над полем нулевой характеристики — Морозовым. Неразрешимые алгебры Ли в малых размерностях описаны Турковским.

Данная работа посвящена классификации с точностью до изоморфизма абстрактных неразрешимых алгебр Ли размерности 7. С помощью расщепления Мальцева задача описания алгебр Ли над полем нулевой характеристики сводится к описанию почти алгебраических алгебр Ли, для которых, в свою очередь, необходимо знание полупростых и нильпотентных алгебр. Полупростые алгебры Ли описываются в терминах систем корней и задаются с помощью образующих и соотношений. Существующие методы классификации нильпотентных алгебр Ли индуктивны по размерности и с каждым следующим шагом возникают большие вычислительные сложности. Классификация 7-мерных нильпотентных алгебр Ли приводилась многими авторами, однако содержала ошибки и неточности, исправленные в работе Гонга [1]. В бо́льших размерностях известны лишь частичные классификационные результаты.

Основываясь на классификациях полупростых и нильпотентных алгебр Ли, в данной работе приводится алгоритм описания абстрактных алгебр Ли и проводится сама классификация семимерных неразрешимых алгебр Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Вместе с работами [2,3,4] это завершает классификацию семимерных алгебр Ли. Рассматриваемая в работе задача также тесно связана, например, с проблемой описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерного комплексного пространства, абстрактные алгебры Ли размерности 7 соответствуют однородным гиперповерхностям, стабилизатор которых тривиален (поверхности с нетривиальным стабилизатором описывались, например, в [5]).

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0 и $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ — ее наибольший нильпотентный идеал. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *почти алгебраической*, если существует подалгебра $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. При этом подалгебра $\mathfrak{m}$ называется *подалгеброй Мальцева* почти алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ — ее *разложением Мальцева. Расщеплением Мальцева* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется вложение $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ в почти алгебраическую алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что в $\bar{\mathfrak{g}}$ не существует собственных почти алгебраических подалгебр, содержащих $\alpha(\mathfrak{g})$. Назовем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *точной*, если ее наибольший полупростой идеал равен $\{0\}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — точная почти алгебраическая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{m}$ — некоторая подалгебра Мальцева алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{n}$ является разделяющей, а пространство $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ канонически наделяется структурой алгебры Ли. Для каждого $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ будем обозначать через $\bar{\varphi}$ автоморфизм алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ вида $d + n \mapsto \varphi \cdot d \cdot \varphi^{-1} + \varphi(n)$, где $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ и $n \in \mathfrak{n}$. Гомоморфизм алгебр Ли $\rho_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, при котором $\rho_{\mathfrak{m}}(m)(n) = [m, n]$ для всех $m \in \mathfrak{m}$, $n \in \mathfrak{n}$, инъективен. Пусть $\bar{\mathfrak{m}}$ — подалгебра Мальцева разделяющей алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$, содержащая $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$. Тогда подалгебра $\bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ является точной почти алгебраической алгеброй Ли с наибольшим нильпотентным идеалом $\mathfrak{n}$ и подалгеброй Мальцева $\bar{\mathfrak{m}}$. Допуская некоторую вольность, алгебру Ли $\bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ будем называть *максимальной* точной почти алгебраической алгеброй Ли с наибольшим нильпотентным идеалом $\mathfrak{n}$, этот объект определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Если $\mathfrak{s}$ — наибольший полупростой идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ и алгебра $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ является точной. Классификация полупростых алгебр Ли известна, поэтому достаточно ограничиться классификацией точных алгебр Ли, которая разбивается на классификацию нильпотентных алгебр Ли, классификацию точных почти алгебраических алгебр Ли с данным наибольшим нильпотентным идеалом и классификацию точных алгебр Ли, не являющихся почти алгебраическими, с данным расщеплением Мальцева. Пусть размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ фиксирована. Внесем соответствующие уточнения в алгоритм:

[A] Классификация нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g}$.

[B] Если $\mathfrak{g}$ — почти алгебраическая алгебра Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ — ее разложение Мальцева, то $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n}$. Проводится классификация нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, таких, что $\dim \mathfrak{n} < \dim \mathfrak{g}$, построение максимальной точной почти алгебраической алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ и классификация с точностью до группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$, действующей в $\overline{\mathfrak{m}}$, подалгебр $\mathfrak{m}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, таких, что $\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}$.

[C] Пусть $\overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ — максимальная точная почти алгебраическая алгебра Ли. Определим для каких подалгебр $\mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{m}}$ существуют алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с данным расщеплением Мальцева $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ и значением $\dim \mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{a}$ факторалгебру $\bar{\mathfrak{g}}/(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}} + Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}))$. Пусть $p\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{a}$ — канонический гомоморфизм. Посредством факторизации определим гомоморфизм групп: $\varepsilon\colon \mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$. Тогда алгоритм классификации алгебр Ли, не являющихся почти алгебраическими, состоит из классификации нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, таких, что $\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{g}$, построения максимальной точной почти алгебраической алгебры Ли $\overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$, классификации с точностью до группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$, действующей в $\overline{\mathfrak{m}}$, подалгебр $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$, $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\mathfrak{t}$ — центр $\mathfrak{m}$), редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, таких, что $\dim \mathfrak{t} \cdot \dim p(\mathfrak{n}) \neq 0$; построения почти алгебраической алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, классификации в пространстве $\mathfrak{a}$ с точностью до группы $\varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}))$ таких подпространств U, что $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$, и построения $\mathfrak{g} = p^{-1}(U)$, где $p\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{a}$ — канонический гомоморфизм.

Пусть $\mathfrak{g}$ — неразрешимая алгебра Ли и $\dim \mathfrak{g} = 7$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — расщепление Мальцева для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})$ — наибольший нильпотентный идеал $\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда $\dim \mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}}) \leqslant 4$, соответственно, для классификации неразрешимых алгебр Ли размерности

7 достаточно иметь классификацию нильпотентных алгебр Ли до размерности 4.

Если 7-мерная неразрешимая алгебра $\mathfrak{g}$ не является точной, то либо $\mathfrak{g}$ имеет 6-мерную подалгебру Леви и, соответственно, изоморфна алгебрам Ли $\mathfrak{sl}(2,k)\times\mathfrak{sl}(2,k)\times k$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\times\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$, $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2,k)\times\mathfrak{h}$ или $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{h}$, где $\dim\mathfrak{h}=4$, а классификация четырехмерных алгебр Ли известна.

Пусть $\mathfrak{g}$ — 7-мерная неразрешимая точная алгебра Ли и $\bar{\mathfrak{g}}$ — ее расщепление Мальцева. Если $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})\leqslant 2$, то 7-мерных неразрешимых алгебр Ли нет. Если $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})=3$, то $\mathfrak{g}$ изоморфна одной и только одной из 4 комплексных и 5 вещественных алгебр Ли. Если $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})=4$, то $\mathfrak{g}$ изоморфна одной и только одной из 5 комплексных и 7 вещественных алгебр Ли.

Литература

1. *Gong M. P.* Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and R). PhD thesis, University of Waterloo, 1998.

2. *Parry A.R.* A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals. Master's thesis. Logan, Utah: Utah State University; 2007 > arXiv:1311.6069

3. *Hindeleh F., Thompson G.* Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical. Algebras Groups Geom. 2008; 25(3):243–265.

4. *Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo* Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals. Math. 2021 > arXiv:2107.03990

5. *Mozhei N.* Homogeneous submanifolds in the four-dimensional affine and projective geometry. Russian Mathematics. 2000. Vol. 44. No.7. P. 39–49.