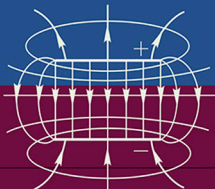
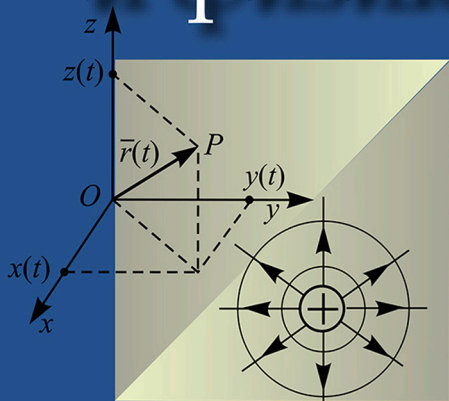


В.Э. Жавнерчик
Л.И. Майсеня
Ю.И. Савилова

Справочник по математике и физике



В. Э. Жавнерчик
Л. И. Майсеня
Ю. И. Савилова

Справочник по математике и физике

3-е издание, переработанное

Минск
 «Вышэйшая школа»
2022

УДК [51+53](075.3/.4)
ББК 22я721
Ж13

Рецензенты: заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники кандидат физико-математических наук, доцент *Е.А. Баркова*; учитель физики высшей категории средней школы № 44 г. Минска *Н.А. Василевская*

Жавнерчик, В. Э.

Ж13 Справочник по математике и физике / В. Э. Жавнерчик, Л. И. Майсеня, Ю. И. Савилова. 3-е изд., перераб. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. – 399 с. : ил. ISBN 978-985-06-3386-6.

Приведены основные понятия, формулы, теоремы, законы математики и физики из общеобразовательных курсов. Материал систематизирован, дается в компактной форме, сопровождается большим количеством иллюстраций.

Первое издание вышло в 2011 г.

Для обучающихся в учреждениях общего среднего, профессионально-технического и среднего специального образования. Будет полезен при подготовке к централизованному тестированию.

**УДК [51+53](075.3/.4)
ББК 22я721**

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-3386-6

- © Жавнерчик В.Э., Майсеня Л.И., Савилова Ю.И., 2011
- © Жавнерчик В.Э., Майсеня Л.И., Савилова Ю.И., 2022, с изменениями
- © Оформление. УП «Издательство “Вышэйшая школа”», 2022

ПРЕДИСЛОВИЕ

В справочнике приведены все понятия, формулы, утверждения и законы, которые определены программой изучения математики и физики как на базовом, так и на повышенном уровне в средних школах, гимназиях, лицеях и колледжах. Материал систематизирован, теоретические утверждения сопровождаются иллюстрациями. Многие математические методы решения представлены алгоритмически, что рационально для использования на практике и способствует самостоятельной деятельности учащихся. При подготовке справочника авторы ориентировались на прогрессивные, современные подходы в обучении математике и физике.

Комплексное, полное и компактное представление справочной информации из курсов математики и физики является особенностью данного издания, что обеспечивает эффективность его использования.

Справочник будет полезен для систематического изучения математики и физики на занятиях в учреждениях общего среднего, профессионально-технического и среднего специального образования. Он может быть использован для подготовки к централизованному тестированию и для повторения математики и физики в процессе обучения в учреждениях высшего образования.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- N** – множество натуральных чисел
- Z** – множество целых чисел
- Q** – множество рациональных чисел
- I** – множество иррациональных чисел
- R** – множество действительных чисел
- =** – равно
- ≠** – не равно
- ≡** – тождественно равно
- ≈** – приближенно равно
- >** – больше
- <** – меньше
- ≥** – больше или равно
- ≤** – меньше или равно
- ≫** – существенно больше
- ≪** – существенно меньше
- ∈** – знак принадлежности множеству
- ⊂** – знак включения множества
- ⊆** – знак включения или равенства множеств
- ∪** – знак объединения множеств
- ∩** – знак пересечения множеств
- ∞** – бесконечность
- |a|** – модуль (абсолютная величина) числа *a*
- [a]** – единица физической величины *a*
- const** – постоянная величина

МАТЕМАТИКА

I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

1. Высказывания и типы теорем

Высказывания

Простое высказывание – повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания обозначают A, B, C, \dots .

Высказывание «не A » обозначают \bar{A} , высказывание «если A , то B » обозначают $A \Rightarrow B$, а высказывание « A тогда и только тогда, когда B » обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Типы теорем

Признак (или *достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Rightarrow B$.

Обратная теорема к $A \Rightarrow B$ – теорема типа $B \Rightarrow A$.

Критерий (или *необходимое и достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Leftrightarrow B$.

Противоположная к обратной теореме – теорема типа $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. На этом утверждении базируется *метод доказательства от противного*.

2. Множества

Понятие множества

Множество – первичное неопределяемое понятие. Характеризуется как набор *элементов*, обладающих одинаковым свойством. Множества обозначают A, B, X, \dots , а элементы множества – a, b, x, \dots .

Если элемент a принадлежит множеству A , то пишут: $a \in A$; если не принадлежит, – то $a \notin A$.

Конечное множество – множество с конечным количеством элементов.

Пустое множество (обозначается \emptyset) – множество, в котором нет элементов.

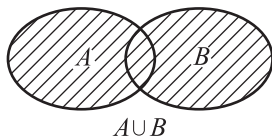
Бесконечное множество – множество, которое не является ни конечным, ни пустым.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Пишут: $A = B$.

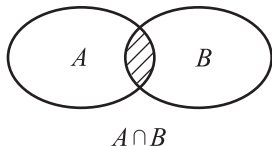
Множество A называется *подмножеством множества B* , если каждый элемент множества A есть элемент множества B ; пишут: $A \subset B$ (или $B \supset A$). Если A не является подмножеством B , то пишут: $A \not\subset B$. Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$.

Действия над множествами

Объединение множеств A и B – множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A , или множеству B .



Пересечение множеств A и B – множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A , и множеству B .



Если $m(A)$ – количество элементов конечного множества A , $m(B)$ – количество элементов конечного множества B , то:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. Совокупности и системы

Совокупность двух утверждений A , B – утверждение « A или B »; записывается с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array} \right.$$

Система двух утверждений A, B – утверждение « A и B »; записывается с помощью фигурной скобки:

$$\left\{ \begin{array}{l} A, \\ B. \end{array} \right.$$

Рассматривают также совокупности и системы трех (и более) утверждений, а также совокупности систем или системы совокупностей утверждений. В качестве утверждений могут быть уравнения, неравенства и т.д.

4. Метод математической индукции

Для доказательства справедливости утверждения $A(n)$ при всех натуральных $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbf{N}$) необходимо сделать следующие три шага:

- 1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;
- 2) предположить, что $A(k)$ истинно для любого фиксированного натурального k ($k \geq n_0$);
- 3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$ ($k \geq n_0$).

II. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Числовые множества

Классификация числовых множеств

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых чисел;

\mathbf{Q} – множество рациональных чисел, определяемое двумя способами:

1) множество всех обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}; n \in \mathbf{N}$;

2) множество всех бесконечных периодических десятичных дробей;

\mathbf{I} – множество иррациональных чисел, определяемое как множество всех бесконечных непериодических десятичных дробей;

\mathbf{R} – множество действительных чисел:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$



Четные и нечетные натуральные числа:

$2n$ – формула четных чисел ($n \in \mathbf{N}$);

$2n - 1$ – формула нечетных чисел ($n \in \mathbf{N}$).

Некоторые иррациональные числа:

$$e = 2,718281828 \dots, \quad \pi = 3,141592653 \dots,$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots, \quad \sqrt{3} = 1,732050807 \dots,$$

$$\sqrt{5} = 2,236067977 \dots$$

Геометрическое истолкование действительных чисел

Числовая ось (или *координатная прямая*) – прямая с заданными на ней началом отсчета, направлением и единичным отрезком.



Координата точки M на оси Ox – число, которое соответствует этой точке; пишут: $M(x)$.

Между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие.

Число a называется *положительным* (пишут: $a > 0$), если соответствующая точка на числовой оси лежит

справа от точки $O(0)$, и *отрицательным* (пишут: $a < 0$) – если она лежит слева.



a и $-a$ – *противоположные числа* ($a \in \mathbf{R}$);

a и $\frac{1}{a}$ – *обратные числа* ($a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$).

2. Числовые промежутки

Отрезок:

$[a, b]$



$$a \leq x \leq b$$

Интервал:

(a, b)



$$a < x < b$$

Полуинтервалы:

$[a, b)$



$$a \leq x < b$$

$(a, b]$



$$a < x \leq b$$

Числовые лучи:

$$(-\infty, b] \quad \begin{array}{c} \text{//////} \\ \text{-----} \bullet \text{-----} \rightarrow \\ \quad \quad \quad b \quad \quad \quad x \end{array} \quad x \leq b$$

$$(-\infty, b) \quad \begin{array}{c} \text{//////} \\ \text{-----} \circ \text{-----} \rightarrow \\ \quad \quad \quad b \quad \quad \quad x \end{array} \quad x < b$$

$$[a, +\infty) \quad \begin{array}{c} \text{-----} \bullet \text{-----} \text{//////} \\ \quad \quad \quad a \quad \quad \quad x \end{array} \quad x \geq a$$

$$(a, +\infty) \quad \begin{array}{c} \text{-----} \circ \text{-----} \text{//////} \\ \quad \quad \quad a \quad \quad \quad x \end{array} \quad x > a$$

Числовая прямая:

$$(-\infty, +\infty) \quad \begin{array}{c} \text{//////} \\ \text{-----} \rightarrow \\ \quad \quad \quad x \end{array} \quad x \in \mathbf{R}$$

3. Десятичная система счисления

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – *цифры*.

Если $n \in \mathbf{N}$, то в десятичной системе счисления

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где a_0 – цифра единиц; a_1 – цифра десятков; a_2 – цифра сотен и т.д., причем $a_k \neq 0$; k – разряд цифры. Пишут также: $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$.

В частности:

$\overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0$ – позиционная запись двузначного натурального числа ($a_1 \neq 0$);

$\overline{a_2 a_1 a_0} = 100a_2 + 10a_1 + a_0$ – позиционная запись трехзначного числа ($a_2 \neq 0$).

4. Действия над действительными числами

Компоненты действий

Сложение: $a + b$ – сумма, a и b – слагаемые.

Вычитание: $a - b$ – разность, a – уменьшаемое, b – вычитаемое.

Умножение: ab (или $a \cdot b$, $a \times b$) – произведение, a – множимое, b – множитель, a и b – сомножители.

Деление: $\frac{a}{b}$ (или $a : b$) – частное, a – делимое, b – делитель ($b \neq 0$).

Действия над положительными и отрицательными числами

При сложении двух чисел с одинаковыми знаками складывают их модули и перед суммой ставят общий знак. При сложении двух чисел с разными знаками из большего модуля одного из них вычитают меньший модуль другого и ставят знак того числа, у которого модуль больше. Сумма двух противоположных чисел равняется нулю.

Вычитание одного числа из другого можно заменить сложением; при этом уменьшаемое берет со своим знаком, а вычитаемое – с противоположным.

При умножении двух чисел умножают их модули и перед произведением ставят плюс, если знаки сомножителей одинаковы, и минус, – если знаки разные.

При делении двух чисел модуль делимого делят на модуль делителя и перед частным ставят плюс, если знаки делимого и делителя одинаковые, и минус – если знаки разные.

Законы сложения и умножения чисел

$a + b = b + a$ – переместительный закон сложения;

$ab = ba$ – переместительный закон умножения;

$a + (b + c) = (a + b) + c$ – сочетательный закон сложения;

$a(bc) = (ab)c$ – сочетательный закон умножения;

$a(b + c) = ab + ac$ – распределительный закон.

Деление с остатком

Формула деления с остатком:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \quad \text{или} \quad a = bc + r,$$

где a – делимое; b – делитель; c – частное; r – остаток; $a, b, c, r \in \mathbf{Z}$; $0 \leq r < |b|$.

Если $r \neq 0$, то число a делится на число b с остатком. В таком случае говорят, что c – *неполное частное*.

Если $r = 0$, то число a делится на число b нацело (без остатка). В таком случае говорят, что c – *полное частное*. Число a называется *кратным* числу b .

5. Признаки делимости натуральных чисел

На **2** делится число, последняя цифра которого четная или нуль.

На **3** делится число, сумма цифр которого делится на 3.

На **4** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 4.

На **5** делится число, последняя цифра которого 5 или 0.

На **6** делится число, которое делится и на 2, и на 3.

На **7** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 7.

На **8** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 8.

На **9** делится число, сумма цифр которого делится на 9.

На **10** делится число, последняя цифра которого нуль.

На **11** делится число, у которого разность суммы цифр, занимающих четные места, и суммы цифр, занимающих нечетные места, делится на 11.

На **13** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 13.

На **25** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 25.

На **100** делится число, две последние цифры которого нули.

На **125** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 125.

6. Простые и составные числа

Основные понятия

Натуральное число p , которое имеет только два делителя (1 и p), называется *простым*. Натуральное число p , имеющее другие делители кроме 1 и p , называется *составным*. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

Основная теорема арифметики. Всякое составное число единственным образом может быть представлено в виде произведения простых чисел (разложено на простые множители).

Таблица простых чисел, не превосходящих 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409

419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b, \dots, c (обозначается $\text{НОД}(a, b, \dots, c)$) – наибольшее натуральное число, на которое делится без остатка каждое из данных чисел.

Числа a, b ($a, b \in \mathbb{N}$) называются *взаимно простыми*, если $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Правило нахождения $\text{НОД}(a, b, \dots, c)$:

1) каждое из чисел a, b, \dots, c разложить на простые множители;

2) в качестве НОД записать произведение всех множителей, входящих в разложение каждого из чисел, причем с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное натуральных чисел a, b, \dots, c (обозначается $\text{НОК}(a, b, \dots, c)$) – наименьшее натуральное число, которое делится без остатка на каждое из данных чисел.

Правило нахождения НОК (a, b, \dots, c):

1) каждое из чисел a, b, \dots, c разложить на простые множители;

2) в качестве НОК записать произведение всех множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел, причем с наибольшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Если $a, b \in \mathbf{N}$, то

$$ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b).$$

7. Обыкновенные дроби

Основные понятия

Обыкновенная дробь – число вида $\frac{m}{n}$, где m – числитель дроби, $m \in \mathbf{Z}$; n – знаменатель дроби, $n \in \mathbf{N}$.

Несократимая дробь – дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа.

Правильная дробь – дробь, модуль числителя которой меньше знаменателя.

Неправильная дробь – дробь, числитель которой больше знаменателя (по модулю) или равен ему.

Смешанное число – число, которое содержит отличные от нуля целую и дробную части.

Основное свойство дроби:

$$\frac{m}{n} = \frac{mp}{np} \quad (p \neq 0).$$

Если $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, то:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \text{при } a > b,$$

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \quad \text{при } b < c.$$

Действия над обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Если b, d – взаимно простые числа, то:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Если числа b, d не являются взаимно простыми, то для сложения и вычитания дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ необходимо сна-

чала привести их к наименьшему общему знаменателю, который есть НОК (b, d).

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

8. Пропорция

Отношение чисел a и b – дробь $\frac{a}{b}$; пишут также: $a : b$.

Пропорция – равенство двух отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$), где a, d – крайние члены пропорции; b, c – средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции:

$$ad = bc.$$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

$\frac{ma + nb}{ra + qb} = \frac{mc + nd}{rc + qd}$ – производные пропорции, где m, n, p, q – действительные числа; $m^2 + n^2 \neq 0$; $ra + qb \neq 0$; $rc + qd \neq 0$.

В частности:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$
$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + \dots + b_n m_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

где $b_1 m_1 + b_2 m_2 + \dots + b_n m_n \neq 0$; $m_1 \neq 0$.

Равенства отношений $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ понимают как систему равенств (пропорций):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}, \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \end{array} \right.$$

Чтобы разделить величину A на части *прямо пропорционально* числам a, b, \dots, c (т.е. в отношении $a : b : \dots : c$), необходимо вычислить:

$$\frac{Aa}{a+b+\dots+c}, \frac{Ab}{a+b+\dots+c}, \dots, \frac{Ac}{a+b+\dots+c}.$$

Чтобы разделить величину A на части *обратно пропорционально* числам a, b, \dots, c (т.е. в отношении $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \dots : \frac{1}{c}$), необходимо вычислить:

$$\frac{A \cdot \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{c}}, \frac{A \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{c}}, \dots, \frac{A \cdot \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{c}}.$$

9. Десятичные дроби

Понятие десятичной дроби

Десятичная дробь – обыкновенная дробь вида $\frac{m}{10^k}$,

где $m \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{N}$.

Для десятичной дроби используется специальная форма записи: сначала записывают целую часть числа и справа от нее ставят запятую; первая цифра после запя-

той означает число десятых, вторая – сотых, третья – тысячных и т.д.

Десятичные знаки – цифры, стоящие после запятой.

Виды десятичных дробей

Конечная десятичная дробь – дробь с конечным количеством десятичных знаков.

Бесконечная периодическая десятичная дробь – дробь, у которой начиная с некоторого разряда одна цифра или группа цифр повторяется. *Период* этой дроби – повторяющаяся группа цифр (записывается в скобках).

Чисто периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается с первой цифры после запятой.

Смешанная периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается не сразу после запятой.

Действия над десятичными дробями

Сложение и вычитание конечных десятичных дробей выполняют так же, как сложение и вычитание целых чисел; при этом запятые располагают одну под другой. В полученном результате (сумме или разности) запятая находится под запятыми исходных компонентов действий.

Умножение конечных десятичных дробей выполняют так же, как умножение целых чисел, не обращая вни-

мания на запятые. В полученном результате (произведении) количество десятичных знаков равно количеству цифр десятичных знаков обоих сомножителей.

Деление конечных десятичных дробей выполняют так же, как деление целых чисел; при этом умножают обе дроби на такую степень числа 10, чтобы делитель стал целым числом. В полученном результате (частном) запятая ставится тогда, когда деление целой части делимого закончено.

При сложении, вычитании, умножении и делении периодических дробей их переводят в обыкновенные дроби, а затем выполняют действия.

Обращение дробей

Чтобы *обратить обыкновенную дробь в десятичную*, нужно числитель обыкновенной дроби разделить на ее знаменатель по правилу деления десятичных дробей. При этом если знаменатель несократимой дроби раскладывается только на простые множители 2 и 5, то в результате получается конечная десятичная дробь; если он содержит иные простые множители, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Чтобы *обратить конечную десятичную дробь в обыкновенную*, нужно:

- 1) сохранить целую часть числа;
- 2) преобразовать дробную часть:

а) число, стоящее после запятой, записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать 10^k , где k – количество цифр справа от запятой;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить чисто периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) период чисто периодической дроби записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) из числа, стоящего после запятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и полученную разность записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькоими нулями, сколько цифр между запятой и периодом;

в) сократить, если возможно.

Округление десятичных дробей

При округлении десятичной дроби сохраняют одну или несколько ее цифр, считая слева направо, и отбрасывают все последующие или (если это необходимо для сохранения разрядов) отбрасываемые цифры заменяют нулями.

Существует три способа округления чисел.

1. *Округление по правилу дополнения* (или просто *округление*):

1) если первая слева из отбрасываемых цифр числа меньше 5, то последняя сохраняемая цифра остается без изменения;

2) если первая слева из отбрасываемых цифр числа больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).

2. *Округление с недостатком*: последняя сохраняемая цифра числа остается без изменения.

3. *Округление с избытком*: последняя сохраняемая цифра числа усиливается.

Абсолютная погрешность приближенного значения a числа A – число Δ , удовлетворяющее условию

$$|A - a| \leq \Delta.$$

Относительная погрешность приближенного значения a ($a \neq 0$) числа A – число δ , удовлетворяющее условию

$$\left| \frac{A-a}{a} \right| \leq \delta.$$

В частности, $\delta = \frac{\Delta}{|a|}$.

Стандартный вид числа

Стандартный вид числа:

$$a \cdot 10^k,$$

где $1 \leq a < 10$; $k \in \mathbf{Z}$; k – порядок числа.

10. Проценты

Процент – сотая доля числа: $1\% = 0,01$.

Процентное отношение p чисел a и b – величина

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Чтобы найти $p\%$, которые составляет число a от числа b , используют формулу

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100.$$

Чтобы найти число b по известному числу a , которое составляет $p\%$ от числа b , применяют формулу

$$b = \frac{a}{p} \cdot 100.$$

Чтобы найти число a , которое составляет $p\%$ от числа b , используют формулу

$$a = \frac{bp}{100}.$$

Промилле – тысячная доля числа: $1\text{‰} = 0,001$.

11. Неравенства

Понятие неравенства

Неравенство – два числа или два математических выражения, соединенных одним из следующих знаков: $>$ (*больше*), $<$ (*меньше*), \geq (*больше или равно*), \leq (*меньше или равно*).

$a > b$, $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$, $a - b < 0$, $a - b \geq 0$, $a - b \leq 0$ соответственно.

Неравенства, содержащие знак $>$ или $<$, называются *строгими*, а неравенства, содержащие знак \geq или \leq , – *нестрогими*.

Двойное неравенство $a < b < c$ записывается как система неравенств:

$$\begin{cases} b > a, \\ b < c. \end{cases}$$

Свойства числовых неравенств

Пусть $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a < b$, то $a + c < b + c$;
- если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
- если $a < b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
- если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$;
- если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$ ($n \in \mathbf{N}$).

Некоторые полезные неравенства:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a, b \geq 0 \text{ (равенство при } a = b\text{)};$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0 \text{ (равенство при } a = 1\text{)};$$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2, \quad a < 0 \text{ (равенство при } a = -1\text{)};$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0 \text{ (равенство при } ab = 0\text{)}.$$

12. Характерные величины для действительных чисел

Модуль числа

Модуль (или абсолютная величина) числа x (обозначается $|x|$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля: $|x|$ – расстояние от точки 0 до точки x на числовой оси.

Свойства модуля числа. Если $x, y \in \mathbf{R}$, то:

$$|x| \geq 0,$$

$$|-x| = |x|,$$

$$|xy| = |x||y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0),$$

$$|x^c| = |x|^c \quad (x \neq 0, c \in \mathbf{Z}),$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x + y| \geq |x| - |y|,$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

$|x| = a$ ($a > 0$) тогда и только тогда, когда $x \in \{-a, a\}$;

$|x| < a$ ($a > 0$) тогда и только тогда, когда $x \in (-a, a)$;

$|x| > a$ ($a > 0$) тогда и только тогда, когда $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Знак числа

Знак (или *сигнум*) числа x (обозначается $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Свойства знака числа:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x, \quad |x| = x \operatorname{sgn} x.$$

Целая часть числа

Целая часть числа x (обозначается $[x]$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется как такое целое число, что

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Дробная часть числа

Дробная часть числа x (обозначается $\{x\}$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\{x\} = x - [x].$$

13. Степени

Понятие степени

Степень – выражение вида a^k , определенное при некоторых значениях чисел a, k . Здесь a – *основание степени*, k – *показатель степени*.

Степень с целым показателем:

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbf{N}).$$

Степень с рациональным показателем ($k, m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если } n = 2k + 1, \\ a \geq 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R}, a \neq 0, & \text{если } n = 2k + 1, \\ a > 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Степень с иррациональным показателем a^p ($p \in \mathbf{I}$) определяется для любого $a > 0$ ($a \in \mathbf{R}$) с использованием понятия предела числовой последовательности.

Свойства степеней

Если $a, b, c \in \mathbf{R}$ и все степени определены, то:

$$\begin{aligned} a^b a^c &= a^{b+c}, \\ \frac{a^b}{a^c} &= a^{b-c} \quad (a \neq 0), \\ (a^b)^c &= a^{bc}, \\ a^c b^c &= (ab)^c, \\ \frac{a^c}{b^c} &= \left(\frac{a}{b}\right)^c \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

Пусть $a, b, c \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a > 1$ и $b < c$, то $a^b < a^c$;
- если $0 < a < 1$ и $b < c$, то $a^b > a^c$;
- если $0 < a < b$ и $c > 0$, то $a^c < b^c$;
- если $0 < a < b$ и $c < 0$, то $a^c > b^c$.

14. Корни

Понятие корня

Корень n -й степени ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$) из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$) – такое действительное число, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Здесь a – подкоренное выражение, n – показатель корня.

$\sqrt[n]{a}$ – арифметическое значение корня, если $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$:

${}^{2k+1}\sqrt{a}$ определен для всех $a \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$;

${}^{2k}\sqrt{a}$ определен для всех $a \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$.

Свойства корней

Если $a, b \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, то:

$${}^{2k+1}\sqrt{-a} = -{}^{2k+1}\sqrt{a};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ где } \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если } n = 2k + 1, \\ a \geq 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n = 2k + 1, \\ |a|, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, & \text{если } n = 2k + 1, \\ \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}, & \text{если } n = 2k, ab \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, & \text{если } n = 2k + 1, b \neq 0, \\ \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, & \text{если } n = 2k, ab \geq 0, b \neq 0. \end{cases}$$

Если $a \geq 0$, $m, n, p \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, то:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{mn}{a},$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt{np}{a^{mp}}.$$

Если $b > 0$, $a \geq \sqrt{b}$, то

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Устранение иррациональности в знаменателе дроби

В знаменателе дроби имеется иррациональность, если он содержит корни.

Умножая числитель и знаменатель дроби на одно и то же числовое выражение, отличное от нуля, заданную

дробь сводят к равной ей, не содержащей корней в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{a + b - c + 2\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

(далее преобразования выполняют в зависимости от выражения в знаменателе),

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}}{a \mp b}.$$

15. Логарифмы

Понятие логарифма

Логарифм числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) – показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b (обозначается $\log_a b$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

$\lg b$ – десятичный логарифм (логарифм по основанию 10);

$\ln b$ – натуральный логарифм (логарифм по основанию e , $e \approx 2,7$);

$\log_c \log_a b$ – повторный логарифм ($c > 0$, $c \neq 1$, $\log_a b > 0$).

Свойства логарифмов

Если $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, то:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1,$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^k = k \log_a b \quad (k \in \mathbf{R}),$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \quad (m \in \mathbf{R}, m \neq 0),$$

$$\log_a b = \log_{a^k} b^k \quad (k \in \mathbf{R}, k \neq 0),$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1),$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1),$$

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}.$$

$\log_a b = \log_a c$ тогда и только тогда, когда $b = c$;

$\log_a b > \log_a c$, где $a > 1$, тогда и только тогда, когда $b > c$;

$\log_a b > \log_a c$, где $0 < a < 1$, тогда и только тогда, когда $b < c$.

Обобщенные свойства логарифмов

Если $a, b > 0$, $a \neq 1$ и $f(x)$, $g(x)$ – выражения с переменной, то:

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a (f(x))^{2n} = 2n \log_a |f(x)|,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $f(x) \neq 0$;

$$\log_{(f(x))^{2n}} b = \frac{1}{2n} \log_{|f(x)|} b,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1. \end{cases}$

16. Средние величины

Если $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, то:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \text{среднее арифметическое};$$