УМНОЖИТЕЛЬ КВАТЕРНИОНОВ НА ОСНОВЕ БЛОЧНО-ЛЕСТНИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА CORDIC-II

Бурак А. А., Петровский Н. А.
Кафедра электронных вычислительных средств,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекторoccноники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: anton.burak19@gmail.com, nick.petrovsky@bsuir.by

В докладе представлен подход для проектирования обратимого целочисленного умножителя кватернионов на кватернион-константу в арифметике с фиксированной точкой, основанный на блочно-лестничной структурной параметризации матрицы $\mathbf{M}^{\pm}(\cdot)$. *Лестничные шаги блочной-лестничной структуры выполнены на основе аппроксимации матрицы вращения Гивенса, реализованной с использованием модифицированного CORDIC-алгоритма известного в литературе как CORDIC-II. Предложенная схема умножителя может использоваться в системах L2L на основе параунитарного банка фильтров в алгебре кватернионов (Q-ПУБФ). Приведены аппаратные затраты для ПЛИС серии Xilinx Zynq-7000.*

Введене

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ [1] является ассоциативной некоммутативной четырёхмерной алгеброй $\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = q_1 \cdot \mathbf{1} + q_2 \cdot \mathbf{i} + q_3 \cdot \mathbf{j} + q_4 \cdot \mathbf{k}\}$, где ортогональные мнимые части определены следующими блочно-диагональными матрицами четвертого порядка $\mathbf{1} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{I} & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix}0 & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & 0\end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{E} & 0\\ 0 & -\mathbf{E}\end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{k} = \left[\begin{smallmatrix}0 & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & 0\end{smallmatrix}\right]$, где $\mathbf{I}_2 = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ и $\mathbf{E} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]$ удовлетворяют условию $\mathbf{E}^2 = -\mathbf{I}_2$. Сопряженный кватернион определяется по аналогии с комплексными числами $\overline{q} = q_1 \cdot \mathbf{1} - q_2 \cdot \mathbf{i} - q_3 \cdot \mathbf{j} - q_4 \cdot \mathbf{k}$, таким образом в матричном виде гиперкомплексное сопряжение будет следующее: $\overline{q} = \mathbf{D}_c \cdot q$, где $\mathbf{D}_c = \mathrm{diag}\,(1, -\mathbf{I}_3)$.

Единичный кватернион $|q| = 1$ в матричном виде $\mathbf{q}$, а кватернион $p = [p_1\, p_2\, p_3\, p_4]^T$ в виде вектора столбца, обозначим матрицу оператора «правого» умножения кватернионов $\mathbf{q} \cdot p = \mathbf{M}^{-}(q) \cdot p$, используя свойство кватернионов о гиперкомплексном сопряжении в матричном виде можно получить матрицу «левого» $qp = \mathbf{D}_c \mathbf{M}^{-}(q)\, \mathbf{D}_c \cdot p = \mathbf{M}^{+}(q) \cdot p$. Неизменность нормы строк и столбцов матрицы $\mathbf{M}^{\pm}(\cdot)$ позволяет строить обратимые преобразования в арифметике с фиксированной точкой [1] .

I. Лестничная факторизация

Лестничная факторизация [2] является известным приемом разложения матрицы вращения Гивенса $\mathbf{R}(\theta)$ на обратимые шаги, таким что $Q(\mathbf{R}(\theta)) \times Q(\mathbf{R}(-\theta)) = \mathbf{I}_2$, где $Q(\cdot)$ – оператор квантования.

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sin\theta & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Обратимое преобразование с точки зрения алгебры кватернионов может быть описано следующим образом: $\mathbf{M}^{\pm}(q) \cdot \mathbf{M}^{\pm}(\overline{q}) = Q(\mathbf{M}^{\pm}(q)) \times Q(\mathbf{M}^{\pm}(\overline{q})) = \mathbf{I}_4$.

Матрица умножения кватернионов $\mathbf{M}^{+}(q)$ может быть представлена в виде следующей блочной структуры:

$$\mathbf{M}^{+}(q) = \begin{bmatrix}\mathbf{C}(q) & -\mathbf{S}(q)\\ \mathbf{S}(q) & \mathbf{C}(q)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(q) = \begin{bmatrix}q_1 & -q_2\\ q_2 & q_1\end{bmatrix}, \mathbf{S}(q) = \begin{bmatrix}q_3 & q_4\\ q_4 & -q_3\end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание стандартное лестничное разложение матрицы вращения (1), обобщив его до четырех мерного случая:

$$\mathbf{M}^{+}(q) = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{F}(q)\\ 0 & \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & 0\\ \mathbf{G}(q) & \mathbf{I}_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{H}(q)\\ 0 & \mathbf{I}_2\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где выражения для $\mathbf{F}(q)$, $\mathbf{G}(q)$ и $\mathbf{H}(q)$ могут быть получены однозначно, при условии что обратная матрица $\mathbf{S}(q)^{-1}$ не нулевая: $\mathbf{F}(q) = (\mathbf{C}(q) - \mathbf{I}_2)\mathbf{S}(q)^{-1}$, $\mathbf{G}(q) = \mathbf{S}(q)$, $\mathbf{H}(q) = \mathbf{S}(q)^{-1}(\mathbf{C}(q) - \mathbf{I}_2)$. Блочно-лестничная факторизация для сопряженного кватерниона $\mathbf{M}^{+}(\overline{q})$ представляет собой обратный порядок лестничных шагов $\mathbf{F}(q)$, $\mathbf{G}(q)$ и $\mathbf{H}(q)$ с отрицательным знаком [3].

II. Алгоритм CORDIC-II

CORDIC-алгоритм может использоваться для вращения векторов на заданный угол θ. Его принцип работы основан на разбиении угла вращения на сумму углов, вращение на которые реализуется с использованием операций сложения и сдвига. В алгоритме CORDIC-II [4] предлагается использовать другой набор углов для поворота на требуемый угол, который позволяет ускорить сходимость алгоритма. Это приводит к уменьшению как задержки, так и количества сумматоров в аппаратной реализации.

[1] Оператор умножения кватернионов позволяет получить разложение ортогональной матрицы 4×4 $\underset{A \in SO(4)}{\forall} \; \underset{|p|=1, |q|=1}{\exists} \; \mathbf{A} = \mathbf{M}^{+}(p) \cdot \mathbf{M}^{-}(q) = \mathbf{M}^{-}(q) \cdot \mathbf{M}^{+}(p)$, необходимое свойство для полифазной матрицы Q-ПУБФ.

Вращение на угол θ можно представить как умножение на комплексный коэффициент $P = C + jS$,

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где $x + jy$ входной вектор, а $X_D + jY_D$ — результат вращения, а C и S это целые числа, которые связаны с углом вращения как

$$C = L(\cos\theta + \varepsilon_c),$$
$$S = L(\sin\theta + \varepsilon_s),$$

где ε_c и ε_s — ошибки квантования, L — масштабирующий коэффициент.

В алгоритме CORDIC-II (рисунок 2) применяются следующие углы вращения:

- тривиальные углы (*Trivial*) $P_0 = 1, P_1 = -1, P_2 = j, P_3 = -j$;
- дружественные углы (*Friend angles*), при вращении на которые масштабирование одинаково $P_0 = 24 + j7, P_1 = 20 + j15, P_2 = 25$;
- равномерно масштабирующие углы (*USR CORDIC*), при вращении на данные углы масштабирование почти одинаково $P_0 = 128 + j16, P_2 = 129$;
- углы вращения классического алгоритма CORDIC $P = 2^k + j, k = 5, 6, 7$;
- нано-вращения (*Nano-rotations*) $P = 1024 + jk, k = 0, \ldots, 8$.

III. Умножитель кватернионов

Реализация компонент $\mathbf{F}(q)$, $\mathbf{G}(q)$ и $\mathbf{H}(q)$ из уравнения (2) можно реализовать с помощью последовательного соединения блока CORDIC-II, блока масштабирования на основе представления CSD (Canonical Signed Digit) [5], блока перестановки компонентов результатов вращения X_D и Y_D (умножение на матрицу $\mathbf{J}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$). Архитектура умножителя на кватернион константу на базе блочно-лестничной факторизации с использованием алгоритма CORDIC-II представлена на рисунке 1. Операция округления не влияет на обратимость результата умножения при представлении выходных данных в формате $W + 3$.

IV. Результаты проектирования

Оценка производительности и потребляемых ресурсов проводилась в САПР `Vivado 2021.2` для кристала `xc7z020clg400-1` серии Xilinx Zynq со стандартными стратегиями синтеза, размещения и трассировки проекта. Аппаратные затраты и производительность умножителя кватернионов для $q = (4 - 1i + 3j - 2k) \times 30^{0.5}$ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Аппаратные затраты и производительность умножителя кватернионов

Ресурсы	Разрядность (W) [бит]			
	12	10	8	6
LUTs	1191	999	836	635
FF	1355	1028	903	597
LUTRAM	78	66	54	42
Латентность [Тактов]	39	36	37	33
Частота (f_{CLK}) [МГц]	215.05	219.78	243.24	248.49

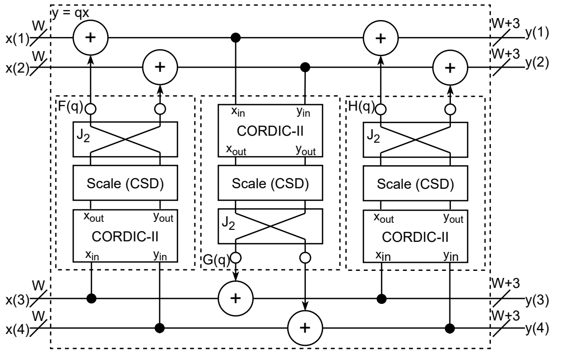

Рис. 1 – Архитектура умножителя на кватернион константу (операция округления обозначена ∘)

V. Заключение

Применение различных типов вращения в алгоритме CORDIC-II, позволяет обеспечить более высокую точность аппроксимации матрицы Гивенса для блочно-лестничных компонент $\mathbf{F}(q)$, $\mathbf{G}(q)$ и $\mathbf{H}(q)$, при сохранении свойства обратимости операции умножения кватернионов.

1. И. Л. Кантор А. С. Солодовников — Гиперкомплексные числа, М.: 1973.
2. Daubechies, I., Sweldens, W. Factoring wavelet transforms into lifting steps. The Journal of Fourier Analysis and Applications 4, 247–269 (1998).
3. Parfieniuk, M. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations / M. Parfieniuk, A. Petrovsky // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* – Oct. 2010. – Vol. 90, № 10. – P. 2708–2717.
4. Garrido, M. CORDIC II: A New Improved CORDIC Algorithm / M. Garrido, P. Källström, M. Kumm // *IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Express Briefs* P. 186–190.
5. A. Avizienis, Signed-digit number representation for fast parallel arithmetic, IRE Tram. Electron. Comp.. vol. EC- 10, P.289-400.

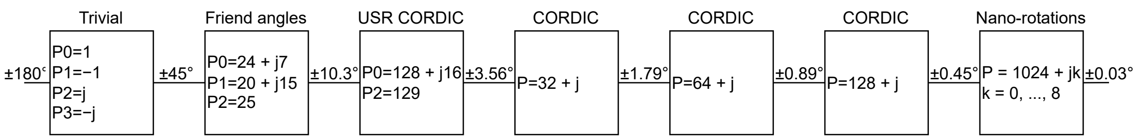

Рис. 2 – Архитектура алгоритма CORDIC-II