АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ОДНОЙ КОНСТАНТОЙ

Цегельник В. В.
Кафедра высшей математики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекторoники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: tsegvv@bsuir.by

Исследован характер возможных подвижных точек решений семейства трехмерных пятиэлементных диссипативных динамических систем с одной квадратичной нелинейностью и одной константой.

Введение

В работе [1] исследованы аналитические свойства решений трехмерных диссипативных четырехэлементных динамических систем с квадратичными нелинейностями без хаотического поведения.

В [2, 3] исследованы аналитические свойства решений трехмерных консервативных четырехэлементных динамических систем с квадратичными нелинейностями без хаотического поведения (за исключением одной системы).

В работе [4] выполнено качественное исследование решений трехмерных диссипативных пятиэлементных систем с одной квадратичной нелинейностью и одной константой, а также с одной квадратичной нелинейностью.

I. Постановка задачи

Целью работы является исследование характера возможных подвижных особых точек (т.е. точек, положение которых зависит от начальных условий) решений систем [4]

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x + A,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = z. \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z + A,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{2}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x + A,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = y. \tag{3}$$

$$\dot{x} = x^2 + \varepsilon x + y,\ \dot{y} = A,\ \dot{z} = x. \tag{4}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + y + A,\ \dot{y} = xz,\ \dot{z} = y. \tag{5}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + z + A,\ \dot{y} = xz,\ \dot{z} = y. \tag{6}$$

$$\dot{x} = y^2 + A,\ \dot{y} = x + z,\ \dot{z} = \varepsilon z. \tag{7}$$

$$\dot{x} = y^2 + A,\ \dot{y} = z + \varepsilon y,\ \dot{z} = x. \tag{8}$$

$$\dot{x} = z^2 + A,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{9}$$

$$\dot{x} = yz + A,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = x. \tag{10}$$

$$\dot{x} = yz + A,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = y. \tag{11}$$

$$\dot{x} = yz + A,\ \dot{y} = \varepsilon y + z,\ \dot{z} = x. \tag{12}$$

$$\dot{x} = z^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = y. \tag{13}$$

$$\dot{x} = z^2 + y,\ \dot{y} = \varepsilon x + A,\ \dot{z} = x. \tag{14}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = x. \tag{15}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = y. \tag{16}$$

$$\dot{x} = yz + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = x. \tag{17}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon x,\ \dot{y} = x + z,\ \dot{z} = A. \tag{18}$$

$$\dot{x} = y^2 + z,\ \dot{y} = x + \varepsilon y,\ \dot{z} = A. \tag{19}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + z,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = xy. \tag{20}$$

$$\dot{x} = \varepsilon x + z,\ \dot{y} = z + A,\ \dot{z} = xy. \tag{21}$$

с известными функциями x, y, z в предположении, что независимая переменная t является комплексной; $\varepsilon^2 = 1$, A — произвольный постоянный параметр. При $\varepsilon = -1$ каждая из систем (1) – (21) является диссипативной.

Системы (уравнения), общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек, называют системами (уравнениями) Пенлеве -типа или P -типа.

II. Алгоритм

Для решения поставленной задачи использован тест Пенлеве [5], представляющий набор условий, необходимых для отсутствия у общего решения системы дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек (свойство Пенлеве).

Для анализа решений систем (1)–(21) использован также подход, заключающийся в замене каждой из них эквивалентным уравнением третьего порядка и сравнением его с известными уравнениями Пенлеве -типа.

III. Выводы

Теорема 1 [4]. Системы (5), (17), (20), (21) обладают в случае $\varepsilon = -1$ хаотическим поведением.

Теорема 2. При $\varepsilon = -1$ системы (17), (20) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y} + \ddot{y} - y\dot{y} + Ay = 0, \tag{22}$$

а системы (5), (21) соответственно уравнениям

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = -z\ddot{z} + z^2\dot{z} + Az^2, \tag{23}$$

$$y\dddot{y} - \dot{y}\ddot{y} = -y\ddot{y} + y^2\dot{y} - Ay^2. \tag{24}$$

Теорема 3. Ни одно из уравнений (22), (23), (24) не является уравнением Пенлеве -типа. Ни одна из систем (5), (17), (20), (21) не является системой Пенлеве -типа в случае $\varepsilon = -1$.

Теорема 4. Системы (3), (11) эквивалентны уравнению

$$\ddot{z} - \frac{1}{2}z^2 - \varepsilon\dot{z} = At + C, \tag{25}$$

а системы (2), (7) — уравнению

$$\ddot{y} - y^2 = Ce^{\varepsilon t} + A, \tag{26}$$

где C — произвольная постоянная.

Теорема 5. Системы (4), (15), (18), (19) эквивалентны соответственно уравнениям

$$\ddot{z} - z^2 - \varepsilon\dot{z} = At + C, \tag{27}$$

$$\ddot{z} - z^2 - (At + C)z - \varepsilon\dot{z} = 0, \tag{28}$$

$$\ddot{y} - y^2 - \varepsilon\dot{y} = \varepsilon(At + C) + A, \tag{29}$$

$$\ddot{y} - y^2 - \varepsilon\dot{y} = At + C, \tag{30}$$

где C — произвольная постоянная.

Теорема 6. Ни одно из уравнений (25)–(30) не является уравнением Пенлеве -типа.

Теорема 7. Общие решения ни одной из систем (2), (3), (4), (7), (11), (15), (18), (19) не обладают свойством Пенлеве.

Теорема 8 [4]. Системы (1), (2), (3) эквивалентны системам (13), (14), (16) соответственно.

Теорема 9. Системы (1), (8) эквивалентны уравнению

$$\dddot{y} = y^2 + \varepsilon\ddot{y} + A, \tag{31}$$

система (9) — уравнению

$$\dddot{z} = z^2 + \varepsilon\ddot{z} + A, \tag{32}$$

а система (12) — уравнению

$$\dddot{y} = \varepsilon\ddot{y} + y\dot{y} - \varepsilon y^2 + A. \tag{33}$$

Теорема 10 [6]. Уравнения (31)–(33) не являются уравнениями Пенлеве -типа.

Следствие. Общие решения ни одной из систем (1), (8), (9), (12), (14), (16) не обладают свойством Пенлеве.

Замечание 1. Справедливость теоремы 6 следует из [7].

Замечание 2. Исследование характера подвижных особых точек решений систем (6), (10) будет выполнено с помощью теста Пенлеве [5].

IV. Список литературы

1. Цегельник, В. В. Пенлеве -анализ одного класса трехмерных нелинейных динамических систем / В. В. Цегельник // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2018. – Т. 7, № 2. – С. 133–137.
2. Цегельник, В. В. Аналитические свойства решений трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями без хаотического поведения / В. В. Цегельник // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2020. – Т. 9, № 4. – С. 338–344.
3. Цегельник, В. В. Аналитические свойства решений трехмерных консервативных систем с двумя или четырьмя квадратичными нелинейностями / В. В. Цегельник // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2021. – Т. 10, № 4. – С. 295–301.
4. Zhang, Fu. Chaotic and nonchaotic behavior in three -dimensional quadratic system: 5 –1 dissipative cases / Fu Zhang, J. Heidel // Inter. Journal of Bif. and Chaos. – 2012. – Vol. 22, № 1. – P. 1250010.
5. Грицук, Е. В. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.–мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
6. Cosgrove, C.M. Chazy classes IX–XI of third -order differential equations / C.M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. — 2001. — Vol. 104, № 3. — P. 171–228.
7. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс // Харьков: ОНТИ, 1939. —720с.