ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2022, том 11, № 2, с. 117–121

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.925.7

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. В. В. Цегельник[1,*]

[1] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь*

**e-mail: tsegvv@bsuir.by*

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.
После доработки 21.06.2022 г.
Принята к публикации 28.06.2022 г.

Объектом исследования являются: неавтономная нелинейная система двух дифференциальных уравнений первого порядка с произвольным параметром l и автономная система двух нелинейных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью производной неизвестных функций, содержащая произвольные параметры a, α, β, γ и ненулевые параметры b, c, удовлетворяющие условиям $(b^2 - c^2)(b^2 - 4c^2)(4b^2 - c^2) = 0$. Цель исследования: определение условий на параметры указанных систем, при которых их общие решения не имеют подвижных критических особых точек, т.е. обладают свойством Пенлеве (являются системами Пенлеве-типа). Доказано, что неавтономная система при любом значении параметра l является системой Пенлеве-типа и по одной из компонент она эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка, полученному Н.А. Кудряшовым. Решение данного уравнения выражается через решение второго уравнения Пенлеве. Для указанного уравнения построены прямое и обратное преобразования Беклунда. Характерной особенностью автономной системы является то, что по каждой из компонент она эквивалентна двум нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые исследуются на наличие у них свойства Пенлеве в зависимости от значений параметров. Доказано, что при $b^2 = c^2 \neq 0$ автономная система является системой Пенлеве-типа: она эквивалентна дифференциальным уравнениям второго порядка, которые либо интегрируются в эллиптических функциях, либо допускают линеаризацию. В остальных двух случаях она обладает данным свойством, если $a = 0$.

Ключевые слова: автономная и неавтономная системы дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, преобразование Беклунда

DOI: 10.56304/S2304487X22020110

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование аналитических свойств решений систем дифференциальных уравнений

$$q' = \frac{1}{p} - q^2 - \frac{t}{2}, \quad p' = -2pq - lp^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x &= -y + \alpha + \frac{(y' - a)}{b^2 (y + \beta)^2}, \\ y &= -x + \alpha + \frac{(x' + a)^2}{c^2 (x + \gamma)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

В системе (1) q, p — неизвестные функции независимой переменной t; l — произвольный параметр.

В системе (2) x, y — неизвестные функции независимой переменной t; a, α, β, γ — произвольные параметры. Предполагается, что ненулевые параметры b и c удовлетворяют одному из условий

$$b^2 = c^2, \quad b \times c \neq 0. \tag{3}$$

$$b^2 = 4c^2, \quad bc \neq 0. \tag{4}$$

$$4b^2 = c^2, \quad bc \neq 0. \tag{5}$$

1. О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)

Теорема 1. Пусть (q, p) — решение системы (1). Тогда

$$(q_1, p_1) = \left(-q, \left(-\frac{1}{p} + 2q^2 + t \right)^{-1} \right) \tag{6}$$

есть решение системы

$$q_1' = \frac{1}{p_1} - q_1^2 - \frac{t}{2}, \quad p_1' = -2p_1 q_1 + (l - 1) p_1^2. \tag{7}$$

Для доказательства теоремы достаточно пару (q_1, p_1), определяемую (6), подставить в (7) с учетом (1).

Аналогичным образом доказывается

Теорема 2. Пусть (q_1, p_1) – решение системы (7). Тогда

$$(q, p) = \left(-q_1, \left(-\frac{1}{p_1} + 2q_1^2 + t\right)^{-1}\right) - \tag{8}$$

решение системы (1).

Система (1) по q эквивалентна второму уравнению Пенлеве [1]

$$q'' = 2q^3 + tq + l - \frac{1}{2}, \tag{9}$$

а по p – уравнению

$$2pp'' = 3p'^2 - 4p + 2tp^2 + l^2 p^4. \tag{10}$$

Из первого уравнения системы (1) следует, что общее решение уравнения (10) не имеет подвижных критических точек. Следовательно, оно является уравнением Пенлеве-типа.

Система (7) по p_1 эквивалентна уравнению

$$2p_1p_1'' = 3p_1'^2 - 4p_1 + 2tp_1^2 + (1-l)^2 p_1^4. \tag{11}$$

Уравнение (11) получается из (10) преобразованием $p \to p_1, l \to 1-l$.

Поскольку вторые компоненты пар (q_1, p_1) и (q, p) из (6), (8) можно представить в виде

$$p_1 = \left(-\frac{1}{p} + \frac{(p' + lp^2)^2}{2p^2} + t\right)^{-1}, \tag{12}$$

$$p = \left(-\frac{1}{p_1} + \frac{(p_1' + (1-l)p_1^2)^2}{2p_1^2} + t\right)^{-1} \tag{13}$$

соответственно, то формулы (12), (13) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда уравнения (10). Более точно, справедливы

Теорема 3. Пусть $p = p(t, l)$ – решение уравнения (10) при фиксированном значении ℓ. Тогда функция $p_1 = p_1(t, 1-l)$, определяемая (12), является решением уравнения (11).

Теорема 4. Пусть $p_1 = p_1(t, 1-l)$ – решение уравнения (11) при фиксированном значении l. Тогда функция $p = p(t, l)$, определяемая (13), является решением уравнения (10).

Другие аналитические свойства решений уравнения (10), представимого в виде

$$2\tilde{p}_1\tilde{p}_1'' = 3\tilde{p}_1'^2 - 2(2\tilde{\beta} + \varepsilon)\tilde{p}_1 + 2t\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_1^1, \tag{14}$$

где $p = l^{-1}\tilde{p}_1,\ l = \tilde{\beta} + \frac{\varepsilon}{2} \neq 0;\ \varepsilon^2 = 1,\ \tilde{\beta}$ – параметр, исследовались в [2].

2. СИСТЕМА (1) ПРИ УСЛОВИИ (3)

Систему (1) при условии (3) можно представить в виде

$$x = -y + \alpha + \frac{(y' - a)^2}{b^2(y + \beta)^2}, \tag{15}$$

$$y = -x + \alpha + \frac{(y' + a)^2}{b^2(y + \beta)^2}. \tag{16}$$

Несложно проверить, что неизвестные функции x, y и их производные удовлетворяют одному из условий:

либо

$$(x' + a)(y + \beta) + (y' - a)(x + \gamma) = 0, \tag{17}$$

либо

$$(x' + a)(y + \beta) - (y' - a)(x + \gamma) = 0. \tag{18}$$

Теорема 5. Пусть $x(x' + a \neq 0),\ y(y' - a \neq 0)$ – произвольные функции, удовлетворяющие системе (15), (16). Тогда при условии (17) и $b \neq 0$ они являются решениями уравнений

$$\begin{gathered} 2vv'' = v'^2 + 2b^2v^3 - b^2(\alpha + \beta + \gamma)v^2 - a^2, \\ v = x + \gamma, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} 2uu'' = u'^2 + 2b^2u^3 - b^2(\alpha + \beta + \gamma)u^2 - a^2, \\ u = y + \beta \end{gathered} \tag{20}$$

соответственно.

Уравнение (19) получается, если из (17) исключить y с помощью (16). Если из (17) исключить x с помощью (15), то получим уравнение (20). Уравнение (19) ((20)) интегрируется в эллиптических функциях.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 6. Пусть $x(x' + a \neq 0),\ y(y' - a \neq 0)$ – произвольные функции, удовлетворяющие системе (15), (16). Тогда при условии (18) и $b \neq 0$ они являются решениями уравнений

$$\begin{gathered} 2vv'' = 3v'^2 + 4av_1' + (\alpha + \beta + \gamma)b^2v_1^2 + a^2, \\ v_1 = x + \gamma, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} 2u_1u_1'' = 3u_1'^2 - 4au_1' + (\alpha + \beta + \gamma)b^2u_1^2 + a^2, \\ u_1 = y + \beta \end{gathered} \tag{22}$$

соответственно.

Уравнение (22) в случае $a = 0$ заменой $u_1 = u_2^{-2}$ приводится к линейному уравнению $2u_2'' = -(\alpha + \beta + \gamma)u_2$.

С помощью преобразований $u_1 = aq^{-1}(a \neq 0)$, $q = T' \times T^{-1}$ и дифференцированием относительно функции T получается линейное уравнение четвертого порядка. Заметим, что уравнение (21) получается из (22) заменой $v_1 \to -u_1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. Система (15), (16) при $b \neq 0$ является системой Пенлеве-типа.

Легко видеть, что формулы (15), (16) определяют взаимно однозначное соответствие (преобразование Беклунда) между решениями уравнений (19), (20). Сказанное справедливо и по отношению к уравнениям (21), (22).

Система (15), (16) в случае $a = \alpha = 0$, $b^2 = 1$ получена в [3].

3. СИСТЕМА (2) ПРИ УСЛОВИИ (4)

Система (2) в случае (4) принимает вид

$$x = -y + \alpha + \frac{(y' - a)^2}{b^2(y+\beta)^2}, \tag{23}$$

$$y = -x + \alpha + \frac{4(x' + a)}{b^2(x+\gamma)^2}. \tag{24}$$

Несложно убедиться, что неизвестные функции x, y и их производные удовлетворяют одному из условий:

либо

$$2(x' + a)(y + \beta) + (y' - a)(x + \gamma) = 0, \tag{25}$$

либо

$$2(x' + a)(y + \beta) - (y' - a)(x + \gamma) = 0. \tag{26}$$

Исключение из (25) с помощью (23) компоненты x приводит к уравнению

$$\begin{gathered} 4PP'' = 3P'^2 - 2aP' + 3b^2P^3 - \\ - b^2(\alpha + \beta + \gamma)P^2 - a^2, \quad P = y + \beta \end{gathered} \tag{27}$$

при условии $y' - a \neq 0$.

Если же из (25) с помощью (24) исключить компоненту y, то относительно x получим уравнение

$$\begin{gathered} 8P_1P_1'' = -8aP_1' + 3b^2P_1^3 - 2b^2(\alpha + \beta + \gamma)P_1^2 - 8a^2, \\ P_1 = x + \gamma \end{gathered} \tag{28}$$

при условии $x' + a \neq 0$.

Сравнение уравнения (27) с каноническими уравнениями из [4] приводит к заключению, что уравнение (27) не является уравнением Пенлеве-типа при $a \neq 0$.

Если $a = 0$, то полагая $P_1 = \tilde{P}_1^2$ приходим к уравнению

$$2\tilde{P}P'' = \tilde{P}' + \frac{3}{4}b^2\tilde{P}^4 - \frac{b^2}{4}(\alpha + \beta + \gamma)\tilde{P}^2, \tag{29}$$

которое интегрируется [5] в эллиптических функциях. Легко видеть, что уравнение (28) при $a = 0$ также интегрируется в эллиптических функциях и, следовательно, является уравнением Пенлеве-типа. Впрочем, этот факт следует из формулы (23).

Исключая из (26) с помощью (23), (24) компоненты x, y мы получим уравнения

$$\begin{gathered} 4QQ'' = 5Q'^2 - 6aQ' + b^2Q^3 + b^2(\alpha + \beta + \gamma)Q^2 + a^2, \\ Q = y + \beta \end{gathered} \tag{30}$$

при условии $y' - a \neq 0$ и

$$\begin{gathered} 8Q_1Q_1'' = 16Q_1'^2 + 24aQ_1' - b^2Q_1^3 + \\ + 2b^2(\alpha + \beta + \gamma)Q_1^2 + 8a^2, \quad Q_1 = x + \gamma \end{gathered} \tag{31}$$

при условии $x' + a \neq 0$.

На основании результатов работы [4] приходим к заключению, что для наличия у общего решения уравнения (30) свойства Пенлеве необходимо $a = 0$.

Полагая в (30) при $a = 0$ $Q = \tilde{Q}^{-2}$ относительно $\tilde{Q}$ получим уравнение

$$2\tilde{Q}Q'' = 5\tilde{Q}'^2 - \frac{b^2}{4}(\alpha + \beta + \gamma)\tilde{Q}^2 - b^2, \tag{32}$$

которое интегрируется в эллиптических функциях.

Таким образом, общее решение уравнения (30) в случае $a = 0$ не имеет подвижных критических особых точек.

В силу (23) этим свойством обладает и уравнение (31) в случае $a = 0$. В этом также можно убедиться, не обращаясь к (23). Действительно, уравнение (31) при $a = 0$ имеет первый интеграл [5]

$$Q_1'^2 - \frac{b^2}{4}Q_1^3 + \frac{b^2}{4}(\alpha + \beta + \gamma)Q_1^2 = CQ_1^4, \tag{33}$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение (33) интегрируется в эллиптических функциях.

Теорема 8. Система (23), (24) при $a = 0$, $b \neq 0$ является системой Пенлеве-типа.

Система (23), (24) в случае $a = \alpha = 0$, $b^2 = 1$ получена в [3].

4. СИСТЕМА (2) ПРИ УСЛОВИИ (5)

Пусть выполнено условие (5). Тогда система (2) имеет вид

$$x = -y + \alpha + \frac{(y' - \alpha)^2}{b^2(y+\beta)^2}, \tag{34}$$

$$y = -x + \alpha + \frac{(x' + \alpha)^2}{4b^2(x+\gamma)^2}. \tag{35}$$

При этом неизвестные функции x, y и их производные удовлетворяют одному из условий:

либо

$$2(y' - a)(x + \gamma) + (y + \beta)(x' + a) = 0, \tag{36}$$

либо

$$2(y' - a)(x + \gamma) - (y + \beta)(x' + a) = 0. \tag{37}$$

При выполнении условия (36) система (34), (35) эквивалентна уравнениям

$$2RR'' = 2aR' + 3b^2R^3 - 2b^2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - 2a^2, \quad R = y + \beta, \tag{38}$$

$$4LL'' = 3L'^2 + 2aL' + 12b^2L^3 - 8b^2(\alpha + \beta + \gamma)L^2 - a^2, \quad L = x + \gamma, \tag{39}$$

если $y' - a \neq 0$, $x' + a \neq 0$ соответственно.

В случае (37) система (34), (35) эквивалентна уравнениям

$$2KK'' = 4K'^2 - 6aK^2 - b^2K^3 + 2b^2(\alpha + \beta + \gamma)K^2 + 2a^2, \quad K = y + \beta, \tag{40}$$

$$4MM'' = 3M'^2 - 12aM' - 4b^2M^3 - 4b^2(\alpha + \beta + \gamma)M^2 - a^2, \quad M = x + \gamma, \tag{41}$$

если $y' - a \neq 0$, $x' + a \neq 0$ соответственно.

Проводя аналогичные рассуждения, как и в случае системы (23), (24) убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 9. Система (34), (35) при $a = 0$, $b \neq 0$ является системой Пенлеве-типа.

Система (34), (35) в случае $a = \alpha = 0$, $b^2 = 1$ получена в [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений двух систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка: неавтономной системы с произвольным параметром и автономной системы с тремя произвольными параметрами и двумя ненулевыми параметрами, удовлетворяющими условиям $(b^2 - c^2)(b^2 - 4c^2)(4b^2 - c^2) = 0$.

Доказано, что общее решение неавтономной системы не содержит подвижных критических точек и оно выражается через функции-решения второго уравнения Пенлеве. Получено преобразование Беклунда для уравнения Н.А. Кудряшова, которому эквивалентна система по одной из компонент.

Для автономной системы в каждом из указанных выше случаев получено условие на входящие в ее параметры, при котором она является системой Пенлеве-типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
2. *Kudryashov N.A.* Rational solutions of equations associated with the second Painleve’ equation // Regular and chaotic dynamics. 2020. V. 25. № 3. P. 273–280.
3. *Мартынов И.П., Парманчук О.Н., Пецевич В.М.* Об одной перекрестной системе двух дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Проблемы физики, математики и техники. № 3 (8). С. 74–77.
4. *Garnier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degre dont l’intégrale génerale est a points critiques // Acta mathematica. 1909. V. 33. P. 1–55.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Vestnik Natsional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2022, vol. 11, no. 2, pp. 117–121

On Some Properties of Solutions of Nonlinear Systems of Differential Equations

V. V. Tsegel’nik[a,#]

[a] *Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013 Belarus*

[#] *e-mail: tsegvv@bsuir.by*

Received June 20, 2022; revised June 21, 2022; accepted June 28, 2022

Abstract—The non-autonomous nonlinear system of two first order differential equations with arbitrary parameter and the autonomous system of two nonlinear differential equations with quadratic nonlinearity of derivation of unknown functions, containing arbitrary parameters a, α, β, and γ and nonzero parameters b and c satisfying the conditions $(b^2 - c^2)(b^2 - 4c^2)(4b^2 - c^2) = 0$ are studied. The conditions on the parameters of the mentioned systems have been determined under which their general solutions have no moving special critical points, i.e., have the Painlevé property (the systems are Painlevé systems). It is proved that the non-autonomous system for any value of the parameter l is a Painlevé type system and is equivalent in one of its components to the second order differential equation obtained by N.A. Kudryashov. The solution of this equation is expressed in terms of the solution of the second Painlevé equation. Direct and inverse Bäcklund transformations have been constructed for this equation. Each component of the autonomous system is equivalent to two second order nonlinear differential equations. It is examined whether these equations have the Painlevé property depending on parameter values. It is proved that the autonomous system with the parameters $b^2 = c^2 \neq 0$ is a Painlevé type system: it is equivalent to second-order differential equations, which are either integrated in elliptic functions or admit linearization. In the other two cases, it has this property if $a = 0$.

Keywords: autonomous and non-autonomous system of differential equations, Painlevé property, Bäcklund transformation

DOI: 10.56304/S2304487X22020110

REFERENCE

1. Ince E.L. *Obiknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Kharkov, ONTI Publ., 1979, 720 p.
2. Kudryashov N.A. Rational solutions of equations associated with the second Painleve' equation. *Regular and chaotic dynamics*, 2020. vol. 25, no. 3, pp. 273–280.
3. Martynov I.P., Parmanchuk O.N., Pecevich V.M. Ob odnoi perekrostnoi sisteme dvukh differetsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On a cross system of two differential equations with the Painleve' property]. *Problemy phisici, matematiki I tekhniki*, 2011, no. 3 (8), pp. 74–77 (in Russian).
4. Garnier B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degre dont l'intégrale génerale est a points critiques. *Acta mathematica,* 1909, vol. 33, pp. 1–55.
5. Камке Э. *Spravochnik po obiknovennim differentsial'nim uravneniyam* [Handbook of ordinary differentsial equations]. Moskow, Nauka Publ., 1971, 576 p.