КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

Каянович С.С.
(Минск, Беларусь)

В работе [1] с использованием метода Роте исследовался вопрос о разрешимости *дифференциально-разностной задачи* для стержневого течения в трубе прямоугольного сечения со сглаженными углами. Исследование представляло собой промежуточное звено в исследовании *задачи дифференциальной*, которая рассматривается в данной работе и сводится к получению априорных оценок для решений и их производных нижеследующей системы уравнений (1) – (4), разрешимость которой при условиях (5) на временных слоях утверждается следующей теоремой (см. [1]).

Теорема. *Пусть* $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}, \tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1\big|_{t=0} = \bar{b}_1(s), x = s \in \tilde{S}$, $\zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\tilde{\bar{\Omega}})$, $\bar{b}_1(x) \in C_{l,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}\right)$, $l \geq 5, \alpha \in (0,1)$. *Тогда при достаточно малых* τ *задача (1) – (5) (краевые условия для* u_2, u_3 *ставятся на временных слоях в ходе решения), в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом* $t = t_m = m\tau$, $m = \overline{0, M}$, *причём* $u_{1,m}, u_{3,m} \in C_{l,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}_m\right)$, $\dfrac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}_m\right)$, $p_m \in C_{l-1,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}_m\right)$.

Для того чтобы эту работу можно было читать без обращения к предыдущей, сохранен минимум информации из [1]. Труба и область с гладкой границей, полученная после сглаживания углов, изображены на рисунке в [1]. Приняты обозначения:

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega = (0,L) \times (0,H_2) \times (0,H_3)$, грани:

$S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = 0]$ – нижняя, $S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H_2, x_3 = H_3]$ – верхняя, $S_3 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – передняя, $S_4 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – задняя, $S_5 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – левая, $S_6 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H_2, 0 \leq x_3 \leq H_3]$ – правая.

$\bar{S} = \bigcup\limits_{k=1}^{4} S_k$ – твёрдая поверхность трубы, S_5 – вход в трубу, S_6 – выход из неё,

$S_{iT} = S_i \times [0,T], i = \overline{1,6}$, $\bar{S}_T = \bar{S} \times [0,T]$, $S = \bigcup\limits_{k=1}^{6} S_k$ – граница области Ω, $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup S$,

$S_T = S \times [0,T]$, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$, $\tilde{S}$ – поверхность, полученная из поверхности S в результате сглаживания всех двугранных и трёхгранных её углов, $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная поверхностью $\tilde{S}$, $\tilde{\bar{\Omega}} = \tilde{\Omega} \bigcup \tilde{S}, \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0,T]$, $\tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0,T], \tilde{\bar{\Omega}}_T = \tilde{\bar{\Omega}} \times [0,T]$.

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \qquad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = (1+\nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \qquad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0\ ,\qquad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T\ , \tag{4}$$

$$u_1\big|_{t=0}=\bar{b}_1(x), x\in\overline{\Omega};\quad u_1\big|_{\tilde{S}_T}=\tilde{\psi}_1(s,t),\ \frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}_T}=\zeta(s)\sum_{j=1}^{3}\omega_j(s,t)\cos\alpha_j\ ,\ (s,t)\in\tilde{S}_T, \tag{5}$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ нормали к $\tilde{S}_T$, α_i – угол между $\bar{n}$ и осью Ox_i, $\omega_i=\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial t}$, краевые условия для u_2, u_3 ставятся в ходе решения системы на временных слоях, $\tilde{S}\in C_{l,\alpha},\tilde{\psi}_1(s,t)\in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1\big|_{t=0}=\bar{b}_1(s),s\in\tilde{S}$, $l\geq 5,$, $\alpha\in(0,1)$. Срезающая функция $\zeta(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$ определяется по аналогии с [2] и представляет собой произведение, но уже трёх функций $\zeta(x)=\zeta'(x)\zeta''(x)\zeta'''(x)$.

Вводя в рассмотрение функции $f_i(x,t)$, $i=1,3$, так же как и в [2], на временном слое $t_m=m\tau, m=0,1,2,...,M$, получаем оценки для модулей функций $w_{i,m}=u_{i,m}-f_{i,m}$, $i=1,3$, и модулей их производных по пространственным переменным до четвёртого порядка включительно . При этом оценки для первых производных могут быть получены как внутри области $\tilde{\Omega}_T$, так и на границе $\tilde{S}_T$ (на слоях $t_m=m\tau$). Оценки же для производных второго и более высоких порядков удаётся получить только в строго внутренних подобластях области $\tilde{\Omega}_T$, причём эти подобласти последовательно вкладываются друг в друга, как показано в [2]. Константы, которые ограничивают модули самих решений и их производных, не зависят от переменной τ и не будут увеличиваться при стремлении $\tau\to 0$. Может быть выполнен предельный переход при $\tau\to 0$, доказывающий разрешимость задачи (1) – (5).

Нетрудно показать, что решение задачи (1) – (5), существование которого доказано, удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса. В связи со сказанным заметим: в результате доказательства этой разрешимости решена математическая часть проблемы уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса . Остаётся вопрос численного отыскания существующего решения. И тут придётся столкнуться с не меньшими трудностями, чем те, которые встретились при решении математических вопросов. Преодолевая их, нельзя не учитывать нижеследующих обстоятельств.

Первое. В [3] вводится понятие главного фундаментального решения (ГФР) и доказывается существование решений задач Дирихле и Неймана, которые даются формулами, содержащими ГФР. Перед этим указываются основные идеи доказательства теоремы существования такого ГФР. Всё это выполняется в m-мерном евклидовом пространстве.

Второе. В [4] говорится о том, что для двумерной односвязной области внутренняя вторая краевая задача легко сводится к внутренней задаче Дирихле. Для функции, являющейся решением задачи Неймана, строится другая функция так, чтобы внутри области удовлетворялись уравнения Коши – Римана. После построения отмечается, что в случае трёхмерной области аналогичные построения невозможны.

Третье. В [5] основная интегральная формула Грина рассматривается и для трёхмерного, и для двумерного случаев . Потенциалы простого и двойного слоёв изучаются в случаях трёх и двух независимых переменных. Однако условия разрешимости интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи (в частности, задача Неймана) даются только в двумерном случае.

Отмеченные обстоятельства указывают на то, что при получении численных решений задач с тремя пространственными переменными придётся столкнуться с существенными трудностями. Уменьшить их, хотя бы частично, может помочь осуществление перехода с одного временного слоя на другой в два этапа. Покажем, как выполняется такой переход, например, со слоя $t_0 = 0$ на слой $t_1 = \tau$ вводя обозначения: $g_{\bar t}(x,t_1) = \frac{1}{\tau}(g_1 - g_0)$, $g_1 = g(x,t_1)$, $g_0 = g(x,t_0)$, $g = u_1, u_2, u_3, p$.

Первый этап.

$$u_{1\bar t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial^2 u_{1,0}}{\partial x_3^2} - \sum_{k=1}^{2} u_{k,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_k} - u_{3,0} \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_3} - \frac{\partial p_0}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_3^2} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_{k,0}}{\partial x_3} \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_2} \frac{\partial u_{2,0}}{\partial x_3} = 0.$$

Второй этап.

$$u_{1\bar t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_k^2} + \nu \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x_3^2} - \sum_{k=1}^{2} u_{k,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_k} - u_{3,0} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_3} = 0,$$

$$u_{3\bar t} = (1+\nu) \frac{\partial^2 u_{3,1}}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_{3,1}}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_{k,0} \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_{k,1}}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_3^2} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_{k,1}}{\partial x_3} \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{1,1}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3,1}}{\partial x_2} \frac{\partial u_{2,1}}{\partial x_3} = 0.$$

На втором этапе в качестве значений функции $u_{2,1}$ берутся её значения, найденные на первом этапе, и значения производных всех функций по переменной x_2 берутся от функций, полученных на первом этапе. Фактически на первом этапе решается задача относительно функций u_1, u_2, p, зависящих от двух пространственных переменных x_1, x_2 (функция u_3 и производные по переменной x_3 участвуют в решении как известные функции, взятые с нулевого слоя). На втором этапе решается задача относительно функций u_1, u_3, p, зависящих от двух пространственных переменных x_1, x_3.

Список литературы:

1. Каянович С.С. Метод Роте для вязкого течения в трубе //”WayScience”. International Scientific and Practical Internet Conference “Modern Movement of Science”, 18-19 October, 2021. Ukraine, Dnipro, 2021, P. 133 – 135.

2. Каянович С.С. Краевая задача для стержневого течения в канале/ Весцi НАН Беларусi. Сер.фiз.-мат. навук.-2016.-№ 4.-С. 55-66.

3. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, М., 1957.

4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.