О ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Каянович С.С.
доцент, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь

Рассмотрим задачу (1) – (6) в области, изображённой на рис. 1, [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad , \qquad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T \ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \ , \ (x,t) \in \Omega_{iT}, i = 1{,}2 \ , \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (x,t) \in \Omega'_T , \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 , \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T , \tag{3}$$

$$u_1\big|_{t=0} = \bar{b}(x), \ x \in \overline{\Omega} \quad u_1\big|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \ (s,t) \in \tilde{S}_T , \tag{4}$$

$$u_2\big|_{S_{\cup T}} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\bigg|_{S'_{1T}} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\bigg|_{S'_{1T}} , \qquad u_2\big|_{S'_{2T}} = -\int_{H}^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z,t)}{\partial x_1} dz , \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\bigg|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \ \omega_j(s,t) \cos\alpha_j , \ \ \omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t} , \ i = 1{,}2 , \ \ (s,t) \in \tilde{S}_T , \tag{6}$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внешней нормали к поверхности $\tilde{S}_T$ (вектор $\bar{n}$ – вектор внешней нормали в отличие от [1]).

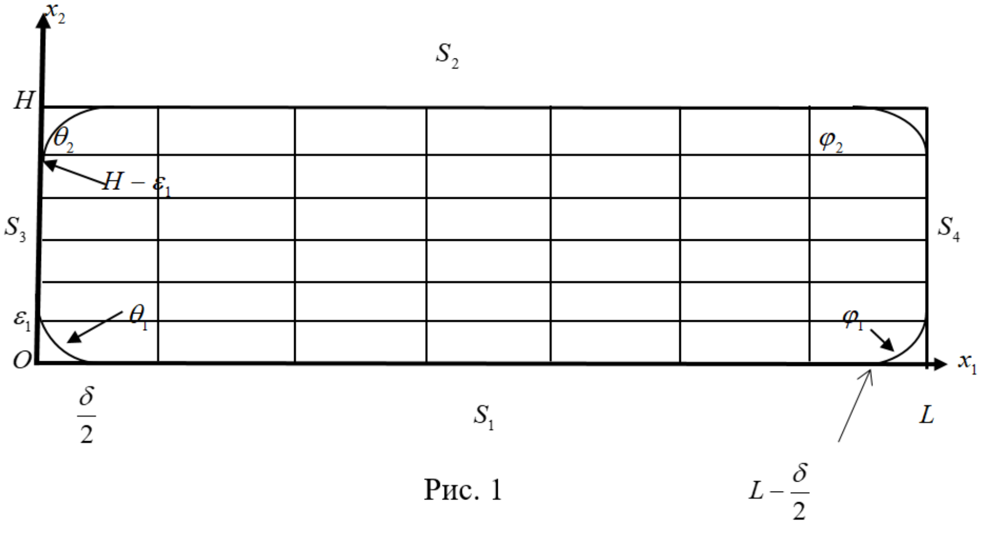

Рис. 1

Приняты обозначения (сохранены только важные для данной работы, другие см. в [1]):
$S_{\cup} = [0 \le x_1 \le L, x_2 = 0 \bigcup x_2 = H]$, $\Omega_1 = [0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le \varepsilon]$, $\Omega_2 = [0 \le x_1 \le L, H - \varepsilon \le x_2 < H]$,
$\Omega' = [0 \le x_1 \le L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $S'_1 \bigcup S'_2 = [0 \le x_1 \le L, x_2 = \varepsilon_1 \bigcup x_2 = H - \varepsilon_1]$, $G_T = G \times [0,T]$.

В работах [1], [2] доказано, что система уравнений стержневого течения имеет единственное решение при любом $t = t_m = m\tau$ (при достаточно малом τ), причём

$u_{1,m} \in C_{l,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}_m\right)$, $p \in C_{l-1,\alpha}\left(\tilde{\bar{\Omega}}_m\right)$. В этой работе речь пойдёт о граничном условии для 2-й краевой задачи при её приближённом решении разностным методом (понятия и обозначения теории разностных схем см. в [3]). На рисунке 1 изображена равномерная решётка $\bar{\omega}_h = \left\{\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) \middle| x_1^{(i)} = ih_1, i = 0,1,\ldots,M_1, M_1 h_1 = L;\ x_2^{(j)} = jh_2, j = 0,1,\ldots,M_2, M_2 h_2 = H\right\}$, являющаяся сеткой в области $\bar{\Omega} = \left[0 \le x_1 \le L; 0 \le x_2 \le H\right]$. Декартово произведение $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где $\bar{\omega}_\tau = \{t_m = m\tau,\ m = \overline{0,M},\ M\tau = T\}$ – множество узлов на отрезке $[0,T]$, есть сетка на $\bar{\Omega}_T$.

Сеточные функции, соответствующие функциям u_1, u_2, p, обозначим y_1, y_2, q. Последовательность нахождения функций u_1, u_2, p указана в [1], откуда видно, что при решении задачи (3), (6) на слое $t = t_m$ функции u_1, u_2 на этом слое уже найдены. Определяем сеточные функции y_1, y_2 в произвольном узле $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right)$ сетки $\bar{\omega}_h$, равенствами $y_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) = u_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right)$, $y_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) = u_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right)$. Заметим, что здесь $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_m$, а $\bar{\Omega}_m$ – сечение $\bar{\Omega}_T$ плоскостью $t_m = m\tau$. При этом сеткой $\bar{\omega}_h$ мы считаем совокупность всех внутренних и граничных узлов в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, граничными же считаем все узлы, лежащие на границе S, кроме узлов, совпадающих с вершинами прямоугольника $\bar{\Omega}$, т.е. кроме четырёх узлов $(0,0)$, $(L,0)$, (L,H), $(0,H)$ (см. [3], гл. IV, § 1). Такая сетка $\bar{\omega}_h$ «не чувствует» того, где она введена: на $\bar{\Omega}$ или на $\tilde{\bar{\Omega}}$. Она оказывается удобной для аппроксимации граничного условия 2-й краевой задачи, поскольку позволяет повысить порядок аппроксимации на решении дифференциального уравнения в $\tilde{\bar{\Omega}}$, т.е. в области, в которой существование гладкого решения доказано (см. ниже).

Разностная схема для (1), (4) на сетке $\omega_{h\tau}$ рассматривалась в [4], граничное условие для (2), (5) аппроксимируется точно. Поэтому сразу переходим к уравнению (3) и условиям (6). Уравнение (3) содержит частные производные, аналогичные производным из (1), поэтому, их аппроксимация будет аналогичной. Остановимся на описании в разностном виде условий (6). Проведём кривую $\tilde{S}_e$ на расстоянии h_1 от $\tilde{S}$ вне области $\tilde{\Omega}$ и обозначим $\tilde{\Omega}_e$ ею ограничиваемую область . Пусть функции u_1, u_2 можно продолжить на область $\tilde{\bar{\Omega}}_e$ с сохранением той степени гладкости, которой они обладают на $\tilde{\bar{\Omega}}$ (см. [5], гл. I, § 8), и, кроме того, справедливы равенства: $u_i(-h_1, x_2) = u_i(0, x_2)$, $u_i(L + h_1, x_2) = u_i(L, x_2)$ при $\varepsilon_1 \le x_2 \le H - \varepsilon_1$ и $u_i(x_1, -h_2) = u_i(x_1, 0)$, $u_i(x_1, H + h_2) = u_i(x_1, H)$ при $0{,}5\delta \le x_1 \le L - 0{,}5\delta$; $h_2 \le h_1$, $i = 1,2$.

Сетку $\bar{\omega}_h$ распространим на область $\tilde{\bar{\Omega}}_e$ и сеточные функции y_1, y_2 в новых появившихся узлах определим по функциям u_1, u_2 так же, как и выше (см. [4], [6]). Учитывая нулевые условия для u_1 и u_2 на частях границы $l_1 \cup l_2$: $\left[0{,}5\delta \le x_1 \le L - 0{,}5\delta; x_2 = 0 \cup x_2 = H\right]$, а также определение срезающей функции $\zeta(x)$, замечаем, что левее прямой $x_1 = 0{,}5\delta$ и правее $x_1 = L - 0{,}5\delta$ условия для нормальной производной $\left.\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\right|_{l_i}$, $i = 1,2$, обращаются в нуль . На частях же $l_1 \cup l_2$ ненулевым остаётся только слагаемое $\nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$ (см. (6)). При этом, например, на l_1 условие $\left.\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\right|_{l_1} = -\left.\frac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$ можно взять в виде $\left.\frac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = 0$ (см. [8], гл. IV, §39).

Займёмся аппроксимацией краевого условия $\left.\frac{\partial p}{\partial x_2}\right|_{l_1} = \left. p'_{x_2}\right|_{l_1} = 0$, применяя обозначения вида $p(x_1, x_2, t_m) = p(x_2)$, т.е. зависимость функций от переменных x_1 и t_m явно не указываем. Для правой разностной производной используем обозначение p_{x_2} (штрих при этом отсутствует). Производную $p'_{x_2}(0)$ аппроксимируем правой разностной производной $q_{x_2}(0) = \frac{q(h) - q(0)}{h}$ и краевое условие при $x_2 = 0$ напишем в виде $q_{x_2}(0) = 0$ (q есть сеточная функция для функции p) . Пусть $\psi(0) = q_{x_2}(0) - p'_{x_2}(0)$ есть погрешность разностной аппроксимации нашего краевого условия. Разлагая $p(x_2)$ в окрестности узла $x_2 = 0$ по формуле Тейлора: $p(h) = p(0) + hp'_{x_2}(0) + 0{,}5h^2 p''_{x_2 x_2}(0) + O(h^3)$, находим

$$p_{x_2}(0) = p'_{x_2}(0) + 0{,}5hp''_{x_2 x_2}(0) + O(h^2) \qquad (7)$$

Видим, что погрешность аппроксимации для краевого условия есть $O(h)$. Подправим условие $q_{x_2}(0) = 0$ так, чтобы порядок аппроксимации составлял $O(h^2)$. Для этого используем тот факт, что $p(x_2)$ есть решение исходной задачи (3), (6) (см. [3]). Выразим из дифференциального уравнения (3) $\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(0) = p''_{x_2 x_2}(0)$: $p''_{x_2 x_2}(0) = -\, p''_{x_1 x_1}(0)$. Подставляя это $p''_{x_2 x_2}(0)$ в (7), получим

$$p_{x_2}(0) + 0{,}5hp''_{x_1 x_1}(0) = p'_{x_2}(0) + O(h^2), \qquad (8)$$

т.е. выражение в левой части (8) аппроксимирует производную $p'(x_2)$ в точке $x_2 = 0$ на решении уравнения (3) со вторым порядком. Подправив соответствующим образом краевое условие $q_{x_2}(0) = 0$, получим второй порядок аппроксимации на решении уравнения (3).

Для дальнейшего заметим, что непосредственно к стенке $x_2 = 0$ прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону (см. [8], гл. IV, § 42). Значит, справедливо считать, что в реальном течении $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0$ (при $x_2 = 0$) . Далее замечаем, что, в силу (1), при $x_2 = 0$ имеем равенство $\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$, т.е. $p'_{x_1}(0) = 0$, $\frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}$. Отсюда следует, что $p''_{x_1 x_1}(0) = 0$, т.е. само условие $q_{x_2}(0) = 0$ имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения (3) (см. [3]).

Список литературы:

1. Каянович С.С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения. //Весці НАН Беларусі. № 1. 2015. Сер. фіз.-мат. навук. С.52-59.

2. Каянович С.С. О разрешимости дифференциально-разностной задачи для стержневого течения // Тезисы докл. XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017»/. Мн. 2017. Ч. 2. С. 10-11.

3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

4. Каянович С.С. Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье – Стокса / Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.- 1981.-№ 2. -С. 36-40.

5. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., 1971.

6. Ладыженская О.А. Устойчивые разностные схемы для уравнений Навье – Стокса. // За- писки науч. сем. Ленингр. отдел. МИ им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 14. 1969. С. 92 – 126.

7. Каянович С.С. Стержневое течение вязкой жидкости. //Весці НАН Беларусі. № 3. 2013. Сер. фіз.-техн. навук. С.32-35.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1988.