ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОПУСКА ОШИБКИ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ДВУХ ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДОВ

Кобяк И.П.
Кафедра электронных вычислительных машин, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: ipkobyak2012@mail.ru

В данной работе на основе известных математических методов получены соотношения, позволяющие вычислить вероятность пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов в выборке событий с шумоподобной природой. Рассмотрено соотношение для моды и производящая функция для двух переменных (функций), характеризующих значение вероятности ошибки практически со стопроцентной точностью. Приведен расчет вероятности ошибки для бесконечной выборки.

Введение

Наблюдение и регистрация векторов переходов (ВП) заданного вида является достаточно новым алгоритмом синтеза контрольных кодов для идентификации сообщений со случайной природой. Достоинством принципа наблюдения ВП или субдинамических объектов является низкая вероятность пропуска ошибки сформированной оценкой при проверке достоверности принятой криптограммы. При этом время поиска ошибок в сообщении абонента-передатчика существенно экономится в случае появления сбоев в системе связи.

Представленная производящая функция в виде факториальных моментов специального вида позволяет развивать тематику исследований параметров точечных оценок, интересующую пользователей ряда практических задач. В частности, особый интерес вызывает принцип вычисления нормированной площади под кривой графика распределения вероятностей ошибки для различных длин выборки n и сравнения полученных значений с параметрами классических алгоритмов оценивания. Это позволяет выбрать в целях идентификации наиболее эффективный метод при передаче сообщений, а так же эффективно наблюдать частоту появления ВП в бесконечных последовательностях.

I. Производящая функция для вероятности наблюдения ВП

Представление случайной последовательности с элементами детерминизма в виде набора двумерных объектов числом $k_{j,i}$, где j-это количество последовательных ВП, а i-число векторов в функции правдоподобия, позволяет на основе алгоритма включения и исключения записать соотношение для моды с учетом [1] в виде:

$$m_0 = \frac{1}{m^n}\left[m^n \sum_{s=0}^{]0,5n[} C_{n-s}^{s}(-p)^s\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\beta_n, \tag{1}$$

где

$$\beta_n = \tfrac{1}{\sqrt{1-4p}}\left(\left(1+\sqrt{1-4p}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{1-4p}\right)^{n+1}\right),$$

а параметр $p = \frac{3^{r-\mu}}{m^2}$ - это теоретическая вероятность регистрации ВП заданного вида в r - разрядной выборке, $m = 2^r$.

Результаты исследования данной задачи позволили заключить, что искомая производящая функция является кусочно-гладкой, что предполагает синтез общего соотношения в виде трех составляющих. Во-первых, в виде слагаемого (1), представляющего собой моду; во-вторых, в виде суммы значений гладкой части функции на множестве аргументов $j = 1, 2$ (для данной задачи) при допустимых значениях $i = 1, 2, ..., n-2j-3$, что следует из минимальной длины монообъектов равной $2j + i = 3$; и, в-третьих, в виде суммы значений функции, определяемой параметрами $i = n - 2j$, в «постразрывной» области аргумента.

Основной результат данной работы может быть сформулирован на основании алгоритма включения и исключения для $j = 1, 2$ (см. результат (5) ниже).

Теорема. Энумератор вида

$$\begin{gathered} m_K = m_0 + \sum_g \left[\left(\sum_{j=1}^{2} p^j + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n-2j-3} p^j \tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right) - \right. \\ \left. - \tfrac{1}{2^3}\beta_2\left(p + \sum_{i=2}^{n-7} p\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)\right]^{n-g} + \\ + \left(\sum_{j=1}^{2} p^j \tfrac{1}{2^{n-2j+1}}\beta_{n-2j}\right) - \tfrac{1}{2^3}\beta_2\left(p\tfrac{1}{2^{n-3}}\beta_{n-4}\right), \\ g = 2k_{1,1} + 3k_{1,2} + ... + (n-4)\,k_{1,n-5} + \\ +4k_{2,1} + 5k_{2,2} + ... + (n-4)\,k_{2,n-7}. \end{gathered} \tag{2}$$

является перечисляющей производящей функцией для вероятности наблюдения ВП заданного вида $j = 1, 2$.

Доказательство. Сформируем сложные объекты, состоящие из j векторов перехода и постобъектов длиной i. Тогда для гладкой части функции можем записать соотношение:

$$m_{K1} = \frac{1}{m^n}\sum_g \sum_{n-g}\left[(3^{r-\mu})\deg \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3} jk_{j,i}\right]\times$$
$$\times m\deg \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3} ik_{1,i}\prod_{i=2}^{n-5}\left(\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)^{k_{1,i}}\times$$
$$\times \prod_{i=2}^{n-7}\left(\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)^{k_{2,i}}\left(\tfrac{3^{r-\mu}}{m^2}\tfrac{1}{2^{n-1}}\beta_{n-2}\right)\times$$
$$\times\left[\left(\tfrac{3^{r-\mu}}{m^2}\right)^2\tfrac{1}{2^{n-3}}\beta_{n-4}\right]\times$$
$$\times\frac{\left[n-\sum\limits_{i=1}^{n-5}(i+1)k_{1,i}-\sum\limits_{i=1}^{n-7}(3+i)k_{2,i}\right]!}{\prod\limits_{i=1}^{n-5}k_{1,i}!\prod\limits_{i=1}^{n-7}k_{2,i}!}. \qquad (3)$$

Преобразование факториальных моментов в соотношении (3), дает результат:

$$m_{K1} = \sum_g\sum_{n-g} m\deg\left(-n+g+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3}k_{j,i}\right)\times$$
$$\times\, m\deg\left(-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3}2jk_{j,i}\right)\times$$
$$\times(3^{r-\mu})\deg\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3}jk_{j,i}\prod_{j=1}^{2}\prod_{i=2}^{n-2j-3}\left(\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)^{k_{j,i}}\times$$
$$\times\frac{\left[n-\sum\limits_{i=1}^{n-5}(i+1)k_{1,i}-\sum\limits_{i=1}^{n-7}(3+i)k_{2,i}\right]!}{\prod\limits_{i=1}^{n-5}k_{1,i}!\prod\limits_{i=1}^{n-7}k_{2,i}!}.$$

В данном соотношении сгруппируем члены с одинаковыми показателями. При этом имеем:

$$m_{K1} = \sum_g\sum_{n-g} m\deg\left(-n+g+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-2j-3}k_{j,i}\right)\times$$
$$\times p\deg\sum_{j=1}^{2}jk_{j,1}\prod_{j=1}^{2}\prod_{i=2}^{n-2j-3}\left(p^j\tfrac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)^{k_{j,i}}\times$$
$$\times\frac{\left[n-\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{i=1}^{n-2j-3}(2j+i-1)k_{j,i}\right]!}{\sum\limits_{j=1}^{2}\prod\limits_{i=1}^{n-2j-3}k_{j,i}!}.$$

Используя теперь методику преобразования произведения в полиномиальную функцию, можем записать:

$$m_{K1} = \sum_g\left(\sum_{j=1}^{2}p^j+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n-2j-3}p^j\frac{1}{2^{i+1}}\beta_i\right)^{n-g}. \quad (4)$$

В соотношении (4) индекс (степень) параметра равная i указывает на длину постобъекта или число векторов в функции правдоподобия.

Однако, полученное соотношение (4) не может быть использовано для подстановки в функцию (2) в чистом виде. Данный факт обусловлен влиянием параметров суммы с $j = 2$ на полученное значение суммы для $j = 1$. Выходом из создавшейся ситуации является применение алгоритма суммирования, соответствующего методу включения и исключения для двух переменных (или функций) как показано в (2). Теорема доказана.

II. Значение вероятности пропуска ошибки в асимптотике

Для расчета вероятности пропуска ошибки вероятностью наблюдения ВП в асимптотике воспользуемся соотношением для расчета математического ожидания числа последовательных пар векторов в бесконечной выборке:

$$j_{mo} = \sum_{j=1}^{0,5n} jp^j\left(\sum_{j=1}^{0,5n}p^j\right)^{-1} = \frac{1}{1-p}. \qquad (5)$$

При этом максимальное значение вероятность наблюдения ВП характеризуют параметры $r = 2,\ \mu = 1$, откуда следует:

$$p_{\max} = \frac{3^{r-\mu}}{m^2} = \frac{3}{16}$$

.

При данном $p_{\max}$ из (5) имеет результат $j_{mo} = \frac{16}{13}$. Очевидно, что данный параметр может быть преобразован к виду $j_{mo} = 1 + \frac{3}{13}$, что говорит об «удельном весе» величины $j = 1$ при регистрации всех ВП в 81,25 процентах случаев; на долю же остальных пар с $j > 1$ приходится 18,75 процентов событий. Таким образом, в асимптотике при $j = 1, 2$ имеем:

$$m_K < \left(0,8125p\frac{1}{2^{i_1+1}}\beta_{i_1} + 0,1875p^2\frac{1}{2^{i_2+1}}\beta_{i_2}\right)^{n-g}$$

.

Длина постобъекта i_1 в данном соотношении может быть определена по формуле:

$$i_1 = \frac{1-2p}{p} = \frac{10}{3}$$

.

Для постобъекта длиной i_2 имеем:

$$i_2 = \frac{1-4p^2}{p^2} = \frac{220}{9}$$

.

Параметр g определится по формуле $g = 2j + i - 1$ с учетом вероятности наблюдения событий np^j. При этом получаем:

$$g = 0,8125\,(i_1+1)\,np + 0,1875\,(i_2+3)\,np^2 = 0,841n$$

.

Составляющие суммы в соотношении для m_K с учетом (1) будут равны:

$$\frac{1}{2^{\frac{13}{3}}}\beta_{\frac{10}{3}} = 0,57002676, \quad \frac{1}{2^{\frac{229}{9}}}\beta_{\frac{220}{9}} = 0,00132444.$$

При этом из сформированного выше соотношения имеем: $m_K \approx (0,6781594)^n$.

1. И.П.Кобяк. О точном равенстве для вероятности пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов // В сб. науч. статей VII Международной науч.-практич. конференции ≪BIG DATA and Advanced Analytics≫, Минск, 11-12 мая 2022 г. – Минск : Бестпринт, 2022. – С. 312–319.