АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кузнецов А. П., Городко С. И., Снисаренко С. В.
Кафедра систем управления, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: kafsu@bsuir.by

Рассматриваются сложные дискретные динамические системы, описываемые нелинейными, нестационарными разностными уравнениями. Разработаны методы анализа устойчивости в таких системах.

Введение

Одним из основных показателей работоспособности систем автоматического управления (САУ) является их устойчивость. Анализ устойчивости непрерывных нелинейных САУ можно проводить частотными методами или прямым методом Ляпунова [1]. Однако часто приходится исследовать устойчивость более сложных систем с учетом их дискретных, нестационарных и нелинейных характеристик. Наряду с этим параметры САУ могут быть неопределенными, заданными в какой - то области [2]. При наличии комплекса таких характеристик и параметров будем называть САУ сложными динамическими системами, методы анализа которых подлежат дальнейшей разработке.

I. Основные результаты

Рассмотрим дискретную нестационарную нелинейную систему, уравнение динамики которой имеет вид:

$$X(n+1) = A[n, X(n)]X(n) \qquad (1)$$

где $X(n) = col[x_1(n), ..., x_m(n)]$ - вектор состояния системы размерности $m; n = 0, 1, 2, ...$ (вместо n часто записывается дискретное время t_n).

В данной работе для анализа сложных динамических систем применяются нормы решения для уравнения (1), описанные в [3].

Пусть при $n = l$ начальное значение вектора состояния будет $X(l)$. Требуется найти области возможных состояний $H \in R^m$ вектора $X(n)$ при $\forall n \in N_1$, $N_1 = [l, \omega)$, где ω - конечное число или символ ∞.

Тогда, если на интервале N_1 существует минимальный $\mu_{m_{in(n)}} = \min\limits_x \mu[n, X(n)]$ и максимальный $\mu_{m_{ax(n)}} = \max\limits_x \mu[n, x(n)]$ корни уравнения

$$det\{A^*[n, X(n)]G(n+1)A[n, X(n)] - \mu G(n)\} = 0; \qquad (2)$$

то область H ограничена неравенством

$$\sqrt{\frac{G[X(n), l]}{(\lambda_{m_{ax(n)}}} \prod_{i=l}^{n-1} \mu_{m_{in(i)}}} \leq$$

$$\leq \| X(n) \| \leq \sqrt{\frac{G[X(n), l]}{\lambda_{m_{in(n)}}} \prod_{i=l}^{n-1} \mu_{m_{ax(i)}}}, \qquad (3)$$

где $\| X(n) \| = X^*(n)X(n)$ евклидова норма вектора; $G[X(n), n] = X^*(n)G(n)X(n)$ - произвольная, положительно определенная эрмитова форма с матрицей $G(n) = \| q_{i_j}(n) \| = \| q_{j_i}(n) \|$; $\lambda_{m_{in(n)}}$, $\lambda_{m_{ax(n)}}$ - соответственно наименьший и наибольший корни уравнения

$$det[G(n) - \lambda E] = 0;$$

E - единичная матрица, а символ * над матрицей или вектором означает эрмитову сопряженную матрицу или вектор.

Произведено доказательство оценки переходных процессов (3), а также доказаны с их использованием достаточные критерии устойчивости в целом, большом сложных динамических дискретных систем, а также их абсолютная устойчивость.

Так, например, достаточным условием асимптотической устойчивости в целом процесса $X(n)$, начиная с некоторого $n \geq l$ (n и l - целые числа) является выполнение неравенства $\mu_{max}(n) < 1$, где $\mu_{max}(n)$ - максимальный корень уравнения (2).

II. Примеры

Пусть система описывается уравнением второго порядка:

$$x(n+2) + b_1[n, x(n), x(n+1)]$$

$$x(n+1) + b_2[n, x(n)]x(n) = 0$$

Сделав замену переменных $z_1(n) = x(n); z_2(n) = x(n+1); z(n) = col[z_1(n), z_2(n)]$ приведем его к матричному виду:

$$Z(n+1) = A[n, Z(n)]Z(n); \qquad (4)$$

$$A[n, Z(n)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

Применив к уравнению (4) рассматриваемый критерий устойчивости, получим неравенство:

$$b_2 + 1 \pm b_1 > 0; b_2 - 1 \pm b_1 < 0 \qquad (5)$$

Т.е. неравенство (5) можно рассматривать как достаточное условие асимптотической устойчивости в целом для систем второго порядка. К сложным динамическим системам относятся дискретные системы фазовой синхронизации (ДСФУ) [4], обобщенная структурная схема которых изображена на рисунке 1.

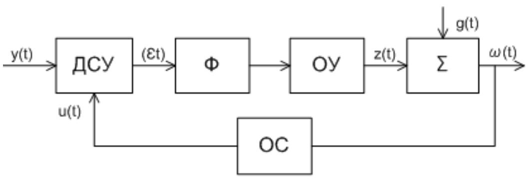

Рис. 1 – Обобщенная структурная схема ДСФУ

На рисунке 1 изображены: ДСУ - дискретное сравнивающее устройство; Ф - фильтр; ОУ - объект управления; ОС - устройство обратной связи; $y(t)$, $\epsilon(t)$, $z(t)$, $g(t)$, $\omega(t)$, $u(t)$ - входные и выходные сигналы соответствующих блоков. Уравнение динамики такой безфильтровой системы со сравнивающим устройством типа "выборка - запоминание"имеет вид:

$$K_2 \int_{t_n+\tau_n+1}^{t_n+T_n+\tau_n+1} [z(t)+g(t)]dt = 2\pi, \qquad (6)$$

где K_2 - коэффициент передачи цепи обратной связи; $Z_n = K_{1h_n}$; K_1 - коэффициент прямой цепи системы; $h_n = K_b\tau_n$ - амплитудв импульса на интервале $t \in [t+n+\tau_n, t_{n+1}+\tau_{n+1}]$; K_b - коэффициент передачи сравнивающего устройства; τ_n - временный сдвиг между входным и выходным сигналами на n - ом периоде квантования; T_n - период дискретизации. Такая система относится к сложной дискретной нелинейной системе, у которой могут меняться параметры. В ней присутствует комбинированная импульсная модуляция: АИМ-ШИМ-ЧИМ. Проведя операцию интегрирования в уравнении (6) получаем нелинейное разностное уравнение динамической системы:

$$\begin{aligned} &K_1K_b\tau_n(T_n+\tau_{n+1}-\tau_n)+ \\ &+(T_n+\tau_{n+1}-\tau_n)g_n = \frac{2\pi}{K_2} \end{aligned} \qquad (7)$$

Применив к уравнению (7) рассматриваемый критерий устойчивости приходим к следующему ограничению на коэффициент усиления системы:

$$K = K_1K_bk_2 < \frac{4\pi}{3(T^*)^2} \qquad (8)$$

где T^* - установившееся значение периода дискретизации.

Для данной системы был проведен анализ устойчивости по линеаризованной модели, который дал следующий результат:

$$K < \frac{4\pi}{(T^*)^2} \qquad (9)$$

Из сравнения условий устойчивости (8) и (9) видно, что область устойчивости, полученная по нелинейной модели системы в три раза уже, чем область, полученная по линеаризованной модели, что подтверждено также экспериментально.

Заключение

Таким образом в данной работе предложены и доказаны оценки переходных процессов в сложных нелинейных дискретных системах. На их основе разработаны достаточные условия устойчивости таких систем.

III. Список литературы

1. Поляк, Б. Т. Математическая теория систем управления./ Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Раппопорт - М.: Ленанд, 2019. - 504 с.
2. Кузнецов, В. П. Исследование дискретных динамических систем с неопределенными параметрами / В. П. Кузнецов, Е. В. Протченко, Н. В. Хаджинова // Информационные технологии и системы 2016 (ИТС 2016) : материалы международной научной конференции (БГУИР, Минск, Беларусь, 26 октября 2016). - Information Technologies and Systems 2016 (ITS 2016): Proceeding of the International Conference (BSUIR, Minsk, Belarus, 26th October 2016) / редкол. : Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск: БГУИР, 2016. – С. 82-83
3. Михайлов Ф. А. Динамика нестационарных дискретных систем./Ф. А. Михайлов, Б. Д. Теряев, В. П. Буленков - М.: Наука, 1980. - 304 с.
4. Батура, М. П. Универсальный метод проектирования систем фазовой синхронизации / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, Л. Ю. Шилин, Д. П. Кукин // Информационные технологии и системы 2015 (ИТС 2015): материалы международной научной конференции (БГУИР, Минск, Беларусь, 28 октября 2015). - Information Technologies and Systems 2015 (ITS 2015): Proceeding of the International Conference (BSUIR, Minsk, Belarus, 28th October 2015) / редкол. : Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск: БГУИР, 2015. – С. 18-19