**УДК 621.451.7+621.391.6**

# УПОРЯДОЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША И ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

ДВОРНИКОВА Т. Н., БУДЬКО А. А.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*(г.Минск, Республика Беларусь)*

*E-mail:* tania.d@inbox.ru, anatolibudzko@yandex.ru

**Аннтотация.** Функции Уолша находят применение в различных областях передачи и обработки инофрмации. Преобразование Уолша осуществляется с помощью быстрых алгоритмов. К настоящему времени имеется определенное количество таких алгоритмов, которые получены используя факторизации матриц Уолша различных упорядочений.

**Abstract.** Walsh functions are used in various fields of information transmission and processing. The Walsh transformation is performed using fast algorithms. To date, there are a certain number of such algorithms that are obtained using factorizations of Walsh matrices of various orderings.

## Введение

Функции Уолша и основанное на этих функциях преобразование обладает рядом свойств, благодаря которым их применение в системах обработки сигналов часто оказывается более предпочтительным по сравнению с другими. Эти функции получили широкое распространение при обработке речевых сигналов; при обработке изображений в биологии и медицине, в цифровой голографии и многих других областях. Система функций Уолша впервые была описана математиком Уолшем (J. Walsh) в 1923 году.

В настоящее время существует несколько модификаций этой системы, отличающихся способом нумерации образующих ее функций. Преобразование Уолша осуществляется с помощью быстрых алгоритмов [1]. Однако, несмотря на многочисленные работы математиков и работы, в которых рассматриваются вопросы об инженерном использовании функций Уолша, для более широкого их применения необходимы дополнительные исследования, направленные на изучение свойств этих функций.

## Основная часть

Функции Уолша являются кусочнопостоянными функциями с нормированным интервалом определения [0,1) или [-0.5, +0.5) и интервалом изменения аргумента, который зависит от порядка системы функций Уолша и равен $\frac{1}{2^n}$, где n = 1, 2,… [1]. Известны определения функций Уолша через разностное уравнение, функции Радемахера, тригонометрические функции и в виде матриц.

Как разностное уравнение, функции Уолша определяются следующим выражением:

$$\mathrm{W}(2j+p,\theta)=(-1)^{\lfloor j/2\rfloor}\left\{\mathrm{W}\left[j,2\left(\theta+\frac{1}{4}\right)\right]+(-1)^{j+p}\,\mathrm{W}\left[n,2\left(\theta-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}, \qquad (1)$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ – обозначает целую часть числа

$p$ = 0 или 1;

$j$ = 0, 1, 2, ... ;

$W(0,\theta)=1$ для $-\frac{1}{2} \le \theta < \frac{1}{2}$ ;

$W(0,\theta)=0$ для $\theta < -\frac{1}{2}; \theta \ge \frac{1}{2}$;

$W[0,2(\theta+1/4)]$ и $W[0,2(\theta-1/4)]$ переносят $W(0,2\theta)$ влево и вправо на 1/4. После того как $W(1,\theta)$ найдена, функция $W(1,0)$ может быть сгенерирована, установив j=1, P=0. $W(3,0)$… и т.д. [2].

Основным преимуществом определения функций Уолша через разностное уравнение является то, что она дает упорядочение функций по числу смен знака [2].

Определение функций Уолша через функции Радемахера является более распространенным и удобным. Функции Радемахера на интервале определения [0,1) описываются следующими соотношениями:

$$R(0,\theta)=\begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le \theta < 1/2 \\ -1 \text{ при } 1/2 \le \theta < 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Вне интервала [0,1) функции Радемахера повторяются периодически.

Функция Радемахера $R(n,\theta)$ с номером n получается путем сжатия $R(0,\theta)$ в $2^n$ раз. Функции Уолша через функции Радемахера определяются следующим образом:

$$W(0,\theta)=1,$$

$$W(n,\theta)=R(n_{r-1},\theta),R(n_{r-2},\theta)\dots R(n_0,\theta), \qquad (3)$$

где $n = 2^{n_{r-1}} + 2^{n_{r-2}} + \dots 2^{n_{r0}}$

Например, для $N$=8 и n записанного в двоичном коде, получаем:

$$\begin{aligned}
&W(000,\theta)=W(0,\theta)=1,\\
&W(001,\theta)=R(0,\theta),\\
&W(010,\theta)=R(1,\theta),\\
&W(011,\theta)=R(1,\theta)R(0,\theta),\\
&W(100,\theta)=R(2,\theta),\\
&W(101,\theta)=R(2,\theta)R(0,\theta),\\
&W(110,\theta)=R(2,\theta)R(1,\theta),\\
&W(111,\theta)=R(2,\theta)R(1,\theta)R(0,\theta).
\end{aligned}$$

Упорядочение функций Уолша может проводиться различными способами. В системе, полученной через разностное уравнение (1), функции Уолша упорядочены по числу смен знака функции. Такая система функций Уолша называется системой Уолша-Качмажа . В системе, полученной как произведение функций Радемахера, функции упорядочены в соответствии с двоичным расположением их номеров. Такая система называется системой Уолша-Пэли [2].

Между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения существует связь. Связь между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения приведена на рисунке 1:

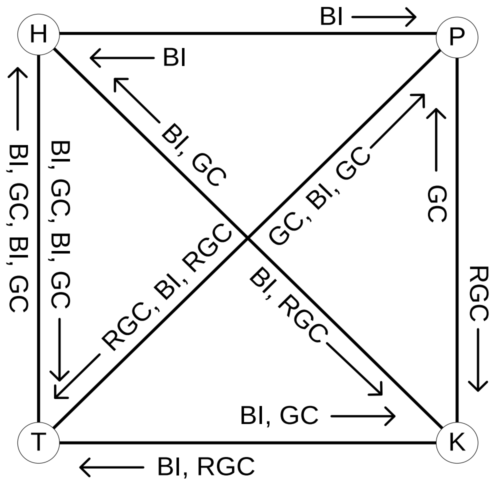


**Рис. 1.** Связь между номерами функций Уолша в различных системах упорядочения

BI – бинарная операция инверсии;
CG – преобразование в код Грея;
RGC – преобразование в обратный код Грея.

Если необходимо сравнить порядковые номера функций Уолша в различных системах, следует провести несколько операций с бинарными порядковыми номерами в соответствии со схемой на рисунке 1.

Для сравнения номеров функций Уолша в различных системах, необходимо выполнить одну или несколько операций с двоичными представлениями номеров функций в соответствии с приведенной схемой [3]. Схема может быть проиллюстрирована на примере в таблице 1.

**Таблица 1** – Номера функции в системы упорядочения Трахтмана и Пэли

| Номер функции в системе T | Двоичный номер в системе T | Двоичный код после GC операции | Двоичный код после BI операци | Двоичный номер в системе P | Номер в системе P |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 001 | 100 | 110 | 6 |
| 2 | 010 | 011 | 110 | 101 | 5 |
| 3 | 011 | 010 | 010 | 011 | 3 |
| 4 | 100 | 110 | 011 | 010 | 2 |
| 5 | 101 | 111 | 111 | 100 | 4 |
| 6 | 110 | 101 | 101 | 111 | 7 |
| 7 | 111 | 100 | 001 | 001 | 1 |

Данные таблицы показывают, что для перехода от одной системы упорядочения к другой производится перестановка столбцов матрицы Уолша. Она может быть использована для преобразования псевдослучайной последовательности в Уолш-последовательность [1].

### Заключение

Преобразования Уолша находят широкое применение при:

– Построение цифровых фильтров;
– Исследование систем автоматического управления (моделировании, оптимизации, индентификации и т.д.);
– Формировании сигналов;
– Анализе и синтезе логических устройств (в теории цифровых автоматов).

В работе установлены основные принципы преобразования псевдослучайной последовательности в последовательность Уолша в различных системах упорядочения функций Уолша. Такими системами упорядочения являются системы Адамара, Пэли, Качмажа и Трахтмана.

### Список используемой литературы

1. Трахтман, А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. М.: Советское радио, 1975. 208 с. [1]
2. Теория кодирования / Т. Касами [и др.], пер. с япон. А. В. Кузнецова. М.: Мир, 2006. 571 с. [2]
3. Лосев, В. В. Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов / В. В. Лосев, Е. Б. Бродская, В. И. Коржик. М.: Радио и связь, 1988.
4. Харкевич, А. А. Спектры и анализ / А. А. Харкевич. М.: Физмат, 1962. [3]