УДК 534.284:621.391

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА В КУРСЕ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

ЛЫГАЧ А. Н., ДАВЫДЕНКО И. Н.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)

E-mail: asya_lygach@mail.ru

Аннотация. В данной статье приведен подробный синтез одномерного фильтра Калмана. Получены и проанализированы дисперсии ошибок фильтрации раздельно для динамических и флуктуационных ошибок. Рассмотрена ситуация, при которой принятая модель полезного сообщения не соответствует имеющейся в действительности модели.

Abstract. This article provides a detailed synthesis of a one-dimensional Kalman filter. Filtering error dispersions are obtained and analyzed separately for dynamic and fluctuation errors. A situation is considered in which the accepted model of a useful message does not correspond to the actual model.

Введение

Фильтр Калмана находит широкое применение в качестве инструмента фильтрации данных. Основной принцип данного фильтра состоит в том, что при фильтрации используется информация о физике явления. Целью данной работы является выбор доступного для восприятия студентами вывода алгоритма работы одномерного фильтра Калмана, анализ характеристик фильтра Калмана, анализ критичности фильтра Калмана к априорным сведениям о модели и параметрах полезного сообщения.
В отличие от традиционного подхода к анализу фильтра Калмана в данной работе раздельно рассмотрены динамические и флуктуационные ошибки фильтрации.

Исходные данные для синтеза одномерного фильтра Калмана

Получим раздельные выражения для дисперсий флуктуационных и динамических ошибок, составляющих в сумме дисперсию суммарной ошибки фильтрации:

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}}. \quad (1)$$

Это позволит оценить критичность дисперсии ошибок фильтрации к изменению коэффициентов фильтрации, в свою очередь зависящих от шумов маневра и модели маневра (случайный маневр или детерминированный маневр в виде полиномиальной модели).

Для этого в одномерном случае уравнение фильтруемого сигнала и уравнение наблюдения запишем в общем виде:

$$\mathrm{x(k) = x(k\text{-}1)} + \eta(\mathrm{k}) \ ,$$
$$y(k) = x(k) + \xi(k) \ ,$$

где $x(k)$ – фильтруемый сигнал;
$\eta(k)$ – нормальный белый формирующий шум маневра с дисперсией $D_\eta = E\{(\eta(k))^2\}$;
$y(k)$ – наблюдаемый сигнал;
$\xi(k)$– нормальный белый шум наблюдения с дисперсией $D_\xi = E\{(\xi(k))^2\}$.

Вывод алгоритма работы одномерного фильтра Калмана

а. Выбор вывода алгоритма работы одномерного фильтра Калмана

Выбор вывода алгоритма работы фильтра Калмана осуществлялся среди следующих вариантов:

1) вывод фильтра Калмана, как частного случая уравнения оптимальной нелинейной дискретной фильтрации;

2) вывод фильтра Калмана с использованием теоремы умножения вероятностей;

3) вывод фильтра Калмана с записью выражения для ошибки фильтрации и последующими условиями равенства нулю математического ожидания ошибки фильтрации и минимума дисперсии ошибки фильтрации.

Был выбран третий вариант вывода, так как в условиях нормального распределения ошибок, характерного для фильтра Калмана, он сохраняет свою строгость, но является более доступным для понимания.

б. Вывод алгоритма работы

Используем вывод уравнения фильтрации Калмана, приведенный в [1, 3, 4]. Для получения алгоритма рекуррентной фильтрации предположим, что после $k-1$ наблюдения $\{y(1), y(2), \cdots, y(k-1)\}$ известны оценка $\hat{x}(k-1)$ параметра $x(k-1)$, дисперсия ошибки фильтрации и ошибка фильтрации $D(k-1) = E\left\{\left(\varepsilon(k-1)\right)^2\right\}, \varepsilon(k-1) = \hat{x}(k-1) - x(k-1)$.

Будем искать оценку $\hat{x}(k)$ параметра $x(k)$ на следующем шаге итерации в виде линейной комбинации известной оценки и очередного наблюдения $y(k) = x(k) + \xi(k)$ [4]:

$$\hat{x}(k) = \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)y(k)\,, \tag{2}$$

где $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ – некоторые коэффициенты, зависящие от номера итерации.

Коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись следующие условия [2, 3]:

1) получившаяся оценка $\hat{x}(k)$ должна быть несмещенной (ее математическое ожидание равно истинному значению $x(k)$);

2) дисперсия ошибки оценивания $\hat{x}(k)$ должна быть минимальной.

Несмещенной оценке $\hat{x}(k)$ соответствует равенство нулю математического ожидания ошибки оценивания:

$$\mathrm{M}\{\varepsilon(k)\} = \mathrm{M}\{\hat{x}(k) - x(k)\} = 0.$$

Выражение для ошибки $\varepsilon(k)$ может быть получено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k) = \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)y(k) - x(k) = \\ = \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)\big(x(k) + \xi(k)\big) - x(k).\end{aligned}$$

Учтем, что $\hat{x}(k-1) = x(k-1) + \varepsilon(k-1)$:

$$\varepsilon(k) = \beta(k)\big(x(k-1) + \varepsilon(k-1)\big) + x(k)(\alpha(k) - 1) + \alpha(k)\xi(k)$$

Учтем уравнение, описывающее полезное сообщение: $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$. В этом случае выражение для ошибки изменится следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon(k) = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1) + \\ \beta(k)\varepsilon(k-1) + (\alpha(k) - 1)\eta(k) + \alpha(k)\xi(k).\end{gathered} \tag{3}$$

Учитывая, что

$$\mathrm{M}\{\varepsilon(k-1)\} = \mathrm{M}\{\eta(k)\} = \mathrm{M}\{\xi(k)\} = 0,$$

математическое ожидание ошибки оценивания перепишется следующим образом:

$$\mathrm{M}\{\varepsilon(k)\} = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1).$$

Условие исключения математического ожидания ошибки принимает вид:

$$\beta(k) + (\alpha(k) - 1) = 0 .$$

Следовательно, коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ уравнения оптимальной рекуррентной фильтрации связаны между собой уравнением [3]:

$$\beta(k) = \left(1 - \alpha(k)\right) ,$$

а уравнения оптимальной рекуррентной фильтрации (2) и ошибки фильтрации (3) перепишутся следующим образом:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_э(k) + \alpha(k)\left(y(k)\text{-}\hat{x}_э(k)\right), \qquad (4)$$
$$\varepsilon(k) = \left(1-\alpha(k)\right)\varepsilon(k-1) + \left(\alpha(k)-1\right)\eta(k) + \alpha(k)\xi(k),$$

где $\hat{x}_э(k) = \hat{x}(k-1)$ – экстраполированное (предсказанное) значение оцениваемого значения.

В данном выражении отражены три составляющие ошибки оценивания на k-м шаге. Первое слагаемое $\left(1 - \alpha(k)\right)\varepsilon(k-1)$учитывает ошибку фильтрации предыдущего шага. Второе определяется величиной $\eta(k)$изменения параметра $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$, то есть динамикой наблюдаемого процесса [4]. Составляющая $\alpha(k)\xi(k)$ ошибки связана с помехой $\xi(k)$, возникающей при наблюдении: $y(k) = x(k) + \xi(k)$. Так как все слагаемые являются независимыми случайными величинами, то дисперсия ошибки фильтрации будет равна сумме

$$D(k) = M\left\{\left(\varepsilon(k)\right)^2\right\} = \left(1 - \alpha(k)\right)^2 D(k-1) +$$
$$(\alpha(k) - 1)^2 D_\eta(k) + \alpha^2(k) D_\xi(k), \qquad (5)$$

где $D_\xi(k) = \mathrm{M}\left\{\left(\xi(k)\right)^2\right\}$; $D_\eta(k) = \mathrm{M}\left\{\left(\eta(k)\right)^2\right\}$.

Коэффициент $\alpha(k)$ уравнения оптимальной фильтрации выбирается из условия минимума дисперсии ошибки:

$$\alpha(k) = \frac{D_э(k)}{D_э(k) + D_\xi(k)} = \frac{D_\xi^{-1}(k) D_э(k)}{1 + D_\xi^{-1}(k) D_э(k)} = D_\xi^{-1}(k) D(k),$$

где $D_э(k) = D(k-1) + D_\eta(k)$.

В этом случае минимальное значение дисперсии ошибки может быть получено из выражения (5):

$$D(k) = \frac{D_э(k)}{1 + D_\xi^{-1}(k) D_э(k)} = \frac{D_\xi(k) D_э(k)}{D(k) + D_э(k)} . \qquad (6)$$

Конечное выражение для рекуррентной оптимальной фильтрации (4):

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_э(k) + D(k) D_\xi^{-1}(k)\left(y(k) - \hat{x}_э(k)\right). \qquad (7)$$

в. Ошибки фильтрации фильтра Калмана

В уравнении (7) величина $\hat{x}_э(k)$ является экстраполированной на один шаг оценкой параметра $x(k)$ (прогнозом$x(k)$) на основе наблюдений $\{y(1),\ y(2), \dots, y(k-1)\}$.Действительно, до наблюдения имеется лишь оценка $\hat{x}(k-1)$ и описание $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$ одношагового изменения параметра. Поскольку $\{\eta(k)\}$ – последовательность независимых случайных величин, то лучшим прогнозом будет $\hat{x}_э(k) = \hat{x}(k-1)$ [4]. Дисперсия ошибки прогноза в точности равна $D_э(k)$:

$$E\left\{\left(\hat{x}_э(k) - x(k)\right)^2\right\} = D(k-1) + D_\eta(k) = D_э(k).$$

Такой же вывод следует из формулы (6) для дисперсии ошибки оценивания, если положить $D_\xi(k) \to \infty$. В этом случае $D(k) = D_э(k)$, поскольку наблюдение $y(k) = x(k) + \xi(k)$ поражено помехой с бесконечной дисперсией и не приводит к уменьшению дисперсии прогноза $D_э(k)$.

Поскольку установившийся режим часто является основным для фильтра Калмана, рассмотрим этот случай более подробно. В установившемся режиме дисперсия ошибки $D(k)$ приближается к постоянной величине D, которую можно найти из условия:

$$D(k) = D(k-1) = D.$$

Действительно, с учетом этого условия рекуррентное соотношение (6) преобразуется в квадратное уравнение:

$$D\left(D_\xi + D + D_\eta\right) = \left(D + D_\eta\right)D_\xi.$$

Положительное решение из двух решений (мощность не может быть отрицательной) можно записать в виде:

$$D(\infty) = \frac{D_\eta}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{D_\xi}{D_\eta}} - 1\right). \qquad (8)$$

Полученное выражение (8) для дисперсии ошибки фильтрации в установившемся режиме соответствует только оптимальному коэффициенту фильтрации $\alpha(k)$ и не разделяет флуктуационные и динамические ошибки. До оптимизации дисперсия суммарной ошибка фильтрации может быть получена из выражения:

$$D = (1-\alpha)^2 D + (\alpha - 1)^2 D_\eta + \alpha^2 D_\xi$$

или

$$D(1 - (1-\alpha)^2) = (\alpha - 1)^2 D_\eta + \alpha^2 D_\xi.$$

Соответственно, в установившемся режиме при произвольном коэффициенте фильтрации $\alpha(k)$ дисперсию ошибки фильтрации можно представить в виде суммы дисперсий динамической и флуктуационной ошибок:

$$D = D_{дин} + D_{фл} = \left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} - 1\right) D_\xi + \frac{\alpha}{2-\alpha} D_\eta,$$

дисперсия динамической ошибки фильтрации в установившемся режиме:

$$D_{дин} = \left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} - 1\right) D_\eta\,, \qquad (9)$$

дисперсия флуктуационной ошибки фильтрации в установившемся режиме:

$$D_{фл} = \frac{\alpha}{2-\alpha} D_\xi\,. \qquad (10)$$

Коэффициент α меняется в диапазоне от 0 до 1.

1)$\mathrm{D}|_{\alpha=1} = \mathrm{D}_{\text{фл}} = \mathrm{D}_{\xi}$: из-за больших динамических ошибок экстраполированные значения игнорируются, результирующая оценка совпадает с текущей полученной оценкой ($\hat{x}(k) = y(k)$).

2) $\mathrm{D}|_{\alpha=0} = \mathrm{D}_{\text{дин}} = \mathrm{D}_{\eta}$: из-за большой дисперсии текущих оценок они игнорируются, результирующая оценка совпадает с экстраполированным значением ($\hat{x}(k) = \hat{x}_{\text{э}}(k)$).

Оптимальное установившееся значение коэффициента фильтрации $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ находится исходя из условия:

$$\left.\frac{dD_{\varepsilon}}{d\alpha(k)}\right|_{\alpha(k)=\alpha_{\text{opt}}(k)} = 0$$

и определяется ранее полученным выражением:

$$\alpha = D_{\xi}^{-1} D(\infty).$$

г. Ошибки фильтрации при изменении модели полезного сообщения

Рассмотрим, как изменится выражение для дисперсии ошибки фильтрации в случае детерминированного приращения измеряемого параметра (параметр изменяется с постоянной скоростью). В этом случае уравнение фильтруемого процесса изменится следующим образом:

$$x(k) = x(k-1) + V \cdot T = x(k-1) + \Delta x\ ,$$

где V – скорость изменения измеряемого параметра $x(k)$;
T – интервал дискретизации;
$\Delta x = V \cdot T$– приращение измеряемого параметра $x(k)$ за интервал дискретизации.

Выражение для ошибки фильтрации получено ранее:

$$\varepsilon(\mathrm{k}) = \beta(\mathrm{k})\big(\mathrm{x}(\mathrm{k}\text{-}1) + \varepsilon(\mathrm{k}\text{-}1)\big) + \mathrm{x}(\mathrm{k})(\alpha(\mathrm{k})\text{-}1) + \alpha(\mathrm{k})\eta(\mathrm{k}). \qquad (11)$$

Учтем уравнение, описывающее полезное сообщение: $x(k) = x(k-1) + V \cdot T$.
В этом случае выражение для ошибки (11) изменится следующим образом:

$$\varepsilon(k) = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1) +$$
$$\beta(k)\varepsilon(k-1) + (\alpha(k) - 1)V \cdot T + \alpha(k)\xi(k). \qquad (12)$$

Полагая, что связь коэффициентов $\beta(k)$ и $\alpha(k)$ не изменилась: $\beta(k) = \big(1 - \alpha(k)\big)$, выражение для ошибки фильтрации (12) изменится и примет вид:

$$\varepsilon(k) = \big(1-\alpha(k)\big)\varepsilon(k-1) + \big(\alpha(k)-1\big)V \cdot T + \alpha(k)\xi(k).$$

Учитывая, что в установившемся режиме $\varepsilon(k) = \varepsilon(k-1)$, для динамической ошибки можно записать:

$$\varepsilon_{\text{дин}} = (1-\alpha)\varepsilon_{\text{дин}} + (\alpha - 1)V \cdot T$$
или
$$\varepsilon_{\text{дин}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} V \cdot T.$$

Соответственно, для среднего квадрата ошибки получим:

$$D_{\text{дин}} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 (V \cdot T)^2.$$

В установившемся режиме при произвольном коэффициенте фильтрации $\alpha(k)$ дисперсию ошибки фильтрации (1) можно представить в виде суммы дисперсий динамической (9) и флуктуационной (10) ошибок для двух моделей фильтруемого сигнала:

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 (V \cdot T)^2 + \frac{\alpha^2}{(1-(1-\alpha)^2)} D_\xi.$$

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}} = \left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} - 1\right) D_\xi + \frac{\alpha}{2-\alpha} D_\eta.$$

д. Критичность фильтра Калмана к изменению модели полезного сообщения и его параметрам.

При неточном знании параметров фильтруемого сообщения D_η (дисперсия маневра) и уравнения наблюдения D_ξ (дисперсия шумов наблюдения) значение коэффициента α изменится от своего оптимального значения, что приведет к увеличению суммарных ошибок фильтрации. Кроме того, увеличение суммарных ошибок фильтрации произойдет при отличии принятой модели фильтруемого сообщения от имеющейся в действительности модели.

Заключение

Таким образом, выбран вариант фильтра Калмана, заключающийся в выполнении условий равенства нулю математического ожидания ошибки фильтрации и минимизации ее дисперсии. Проанализированы дисперсии ошибок фильтрации с выделением динамических ошибок и флуктуационных. Получены выражения для дисперсии ошибок фильтрации в случае, если принятая модель полезного сообщения не соответствует действительности. Сделан вывод о влиянии неточных параметров и отличия принятой модели фильтруемого сообщения от имеющейся в действительности на суммарные ошибки фильтрации.

Список использованной литературы

1. Васильев К.К. Методы обработки сигналов: Учебное пособие. Ульяновск, 2001. 80 с
2. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. М.:Сов. радио, 1974. 432 с.
3. Васильев К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: Учебное пособие. М.: Радиотехника, 2016. 288 с.
4. Васильев, К. К. Прием сигналов с дискретным временем: учебное пособие / К. К. Васильев. Ульяновск, 2014. 102 с.

References

1. Vasiliev K.K. Signal Processing Methods: Study Guide. Ulyanovsk, 2001. 80 p.
2. Kuzmin S.Z. Fundamentals of the theory of digital processing of radar information. M.: Sov. radio, 1974. 432 p.
3. Vasiliev K.K. Optimal Signal Processing in Discrete Time: Tutorial. M.: Radiotehnika, 2016. 288 p.
4. Vasiliev, K. K. Reception of signals with discrete time: a tutorial / K. K. Vasiliev. Ulyanovsk, 2014. 102 p.