

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»  
Кафедра радиотехнических систем

**С. Б. Саломатин**

## ***СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ, ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА СИГНАЛОВ***

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования по специальностям «Радиоэлектронные системы» и «Радиоэлектронная защита информации»*

Минск БГУИР 2010

УДК 621.391.2(075.8)  
ББК 32.811.3я73  
С16

Рецензенты:

кафедра автоматизированных систем обработки информации  
Международного государственного экологического университета им. А. Д. Сахарова  
(заведующий кафедрой, кандидат технических наук, доцент Е. В. Кереселидзе);

кафедра радиоэлектроники учреждения образования  
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»  
(заведующий кафедрой, доктор технических наук, доцент Р. Г. Хехнев);

проректор по учебной работе  
Академии управления при Президенте Республики Беларусь,  
доктор физико-математических наук, доцент И. А. Богуш

**Саломатин, С. Б.**

С16    Спектральные методы формирования, обработки и анализа сигналов : учеб.-метод. пособие / С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 2010. – 102 с. : ил.  
ISBN 978-985-488-329-8.

В пособии излагается материал с позиций спектрального подхода к цифровой обработке сигналов. Объединены методы спектрального анализа на основе дискретного преобразования Фурье, представленного в различных базисах и видах, и дискретного преобразования Фурье с дробными величинами.

Исследуются методы статистического спектрального анализа на основе периодограммных и коррелограммных методов, метод ортогонального окна на основе сфероидальных функций.

Даются основы вейвлет-анализа и приводятся примеры применения вейвлет-преобразования при решении задач анализа и синтеза сигналов.

Рассматриваются вопросы применения преобразований Виленкина – Крестенсона и Уолша – Адамара для анализа структуры и обработки сложных сигналов.

УДК 621.391.2(075.8)  
ББК 32.811.3я73

ISBN 978-985-488-329-8

© Саломатин С. Б., 2010  
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2010

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из методологических основ цифровой обработки сигналов является по сути перенос достаточно сложной обработки сигналов во временной области в область частотную путем преобразований спектра сигнала в некотором базисе. Противоположный подход используется для генерации сигналов с заданными свойствами.

Спектральные методы предполагают разложение сигнала и временных динамических характеристик систем по базисным функциям. Используя терминологию спектральных методов, под обобщенным спектром сигнала понимают совокупность коэффициентов Фурье этого сигнала относительно выбранной системы ортонормированных функций (необязательно тригонометрической). В отличие от непрерывных частотных характеристик, основой которых является интеграл Фурье, совокупность коэффициентов Фурье, описывающих временные характеристики систем, сигналы или статистические характеристики сигналов, рассматривают как их дискретные спектральные характеристики. Такая форма описания была названа спектральной.

Спектральный анализ – исследование спектральных характеристик линейных операторов: геометрии спектра и его основных частей, спектральной кратности, асимптотики собственных значений и т. д.

Спектральный анализ случайных, стационарных процессов или спектральный анализ временных рядов можно определить как спектральное разложение случайных стационарных процессов, определение совокупности статистических приемов, позволяющих оценить значение спектральной плотности мощности случайного стационарного процесса по данным наблюдений за одной реализацией этого процесса.

Теория вейвлетов значительно дополняет анализ Фурье. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа состоит в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения сигнала.

Анализ Фурье, взвешенный анализ Фурье и вейвлет-анализ имеют одинаковые корни. Во всех трех случаях анализ сигналов заключается в вычислении всех корреляций между заданным сигналом и частотно-временными или масштабнo-временными функциями. Синтез сигналов производится исходя из предположения, что функции образуют ортонормированный базис.

Системы ортогональных функций тесно связаны с кодовыми структурами. Базисы Уолша – Адамара и Виленкина – Крестенсона позволяют синтезировать и эффективно обрабатывать системы сложных дискретных сигналов, которые могут быть использованы в широкополосных системах локации и связи с кодовым множественным доступом.

# 1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

## 1.1. Дискретные сигналы

Дискретные сигналы  $x[n]$  являются функцией дискретной переменной  $n$ , принимающей только фиксированные значения. Если эти значения являются равноотстоящими, то, выбрав соответствующий масштаб, их можно приравнять к натуральным числам  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае  $n$  есть номер отсчета сигнала.

Сигналы задаются на определенном интервале изменения переменной. Он может быть конечным или бесконечным. Для дискретного сигнала интервал – это счетное множество точек, например  $[0, N - 1]$  или  $[0, \infty]$ . Дискретные сигналы представляются в виде последовательности чисел, имеющих ограниченное число разрядов. В общем случае дискретные сигналы – это комплексные функции.

В линейной теории непрерывных сигналов они обычно представляются в виде линейной комбинации (взвешенной суммы) функций, составляющих базисную систему. Набор весовых коэффициентов в этой комбинации называется *спектром* сигнала и полностью определяет этот сигнал. В случае конечного интервала определения сигнала такая линейная комбинация называется рядом Фурье. При неограниченном увеличении интервала в пределе ряд Фурье заменяется интегралом Фурье, который в свою очередь при некоторых дополнительных условиях переходит в преобразование Лапласа.

В линейной теории дискретных сигналов и систем их также представляют в виде линейной комбинации базисных дискретных функций. В случае конечного интервала определения такое представление, аналогичное ряду Фурье, называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Зададим последовательность отсчетов  $\mathbf{x} = (x[0], x[1], \dots, x[N - 1]) \in \mathbb{C}^N$ . ДПФ такой последовательности определится как сумма (коэффициентов Фурье):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (1.1)$$

где  $W_N = \sqrt[N]{1}$  – корень  $N$ -й степени из единицы, а  $W_N^{nk}$  – значения неприводимых характеров (или элементов неприводимой матрицы) циклической группы  $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ .

Спектр сигнала  $\{X(k)\}$  можно рассматривать как отображение  $x: \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  путем изменения базисов представления сигнала. Базис дельта-функций

$$\delta_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{для } n = k, \\ 0 & \text{для } n \neq k \end{cases}$$

изменяется на базис элементов неприводимой матрицы  $\chi_n(k) = W_N^{nk}$ .



Наиболее часто используются базисные дискретно-экспоненциальные функции (ДЭФ)  $\{\exp[j(2\pi/N)nk]\}$ , где  $k$  – номер функции в системе.

Обратное преобразование определяется как

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(-n)W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.2)$$

Сигнал  $x[n]$  и его спектр  $X(k)$  являются дискретными функциями, определенными на интервале  $[0, N)$ .

В случае бесконечного интервала определения дискретные сигналы представляются с помощью дискретного преобразования Лапласа (ДПЛ):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\pi}^{\beta+j\pi} X(s)e^{sn} ds, \quad X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-sn}. \quad (1.3)$$

Здесь изображение  $X(s)$  есть периодическая функция непрерывной комплексной переменной  $s = \beta + j\omega$ .

Для удобства ДПЛ используют в несколько модифицированном виде, носящем название  $z$ -преобразования и получающемся путем введения новой переменной  $z = \exp(s)$ :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1} dz, \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (1.4)$$

Переход от переменной  $s$  к переменной  $z$  соответствует такому отображению плоскости  $s$  на плоскость  $z$ , при котором линии, параллельные оси  $j\omega$ , отображаются на концентрические окружности с центром в начале координат. Сама ось  $j\omega$  при этом преобразуется в окружность единичного радиуса, причем, когда  $\omega$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , изображающая точка на плоскости  $z$  совершает ровно один оборот по единичной окружности.

## 1.2. Связь алгебры дискретных последовательностей и алгебры полиномов Лорана

$Z$ -преобразование можно рассматривать как отображение последовательности чисел  $\{x[n]; n = a \dots b\}$  в кольцо полиномов Лорана  $Z\{x[n]\} = X(z)$ . Существует следующий изоморфизм алгебр дискретных последовательностей и полиномов Лорана.

1. Степени полинома Лорана соответствует степень  $Z$ -преобразования:

$$\deg \{X(z)\} = |b - a|.$$

2. Дискретной последовательности

$$\{x[n]\}_{-r}^l = x[-r], x[-r+1], \dots, x[0], \dots, x[l]$$

соответствует полином Лорана

$$X(z) = x[l]z^{-l} + \dots + x[0]z^0 + \dots + x[-r]z^r,$$

которому можно поставить в соответствие вектор

$$\mathbf{x} = [x[-r], \dots, x[0], \dots, x[l]]^T.$$

3. Дискретная фильтрация последовательности  $\{x[n]\}$  длиной  $N$  на интервале  $(a, b)$  фильтром с импульсной характеристикой  $\{h[n]\}$  описывается оператором (\*) линейной свертки двух последовательностей

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\}$$

или с помощью сверточной суммы, вычисляемой на интервале

$$y[m] = \sum_{i=a}^b h[i]x[m-i] = \sum_{i=N-a}^{m-b} h[m-i]x[m]. \quad (1.5)$$

Длина фильтра равна  $p = a - b + 1$ , а длина выходной последовательности равна  $L = N + p - 1$ .

В кольце  $C[z]$  операции свертки соответствует операция перемножения полиномов-изображений:

$$y[n] = x[n] * h[n] \leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z). \quad (1.6)$$

Для того чтобы спектральная теория, построенная на основе какой-либо базисной системы функций, была «хорошей» (т. е. располагала привычными понятиями и теоремами), необходимо, чтобы эта система была мультипликативной, ортогональной и симметричной относительно номера функции в системе и номера отсчета [1 – 10].

Рассмотрим класс линейных инвариантных к сдвигу (ЛИС) систем. Соотношение вход-выход для ЛИС систем задается в виде свертки

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[k-n],$$

где  $\{y[k]\}$  – множество отсчетов выходного сигнала;  $\{x[n]\}$  – входной сигнал;  $\{h[n]\}$  – импульсный отклик ЛИС системы; символ звездочка как двучленный оператор означает свертку.

Используя понятия алгебры полиномов, процесс вычисления линейных сверток  $y(\beta)$  можно представить в виде произведения двух полиномов  $x(\beta)$  и  $h(\beta)$ :

$$\begin{aligned} x(\beta) &= \sum_{l=0}^{L-1} x[l] \beta^l, & h(\beta) &= \sum_{l=0}^{M-1} h[l] \beta^l, \\ y(\beta) &= x(\beta) h(\beta) = \sum_{l=0}^{M+L-2} y[l] \beta^l. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Определим ДПФ для входного воздействия и импульсной характеристики ЛИС систем:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad \text{и} \quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{nk}.$$

Рассмотрим обратное ДПФ произведения двух ДПФ  $X(k) H(k)$ :

$$y[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) X(k) W_N^{-nk}.$$

Подставляя в эту формулу определение  $X(k)$  и изменяя порядок суммирования, получаем

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk},$$

откуда следует

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] h[n-l].$$

Для того чтобы полученное выражение имело смысл, необходимо периодически продолжать сигнал  $h[n-l]$  с периодом  $N$ . С учетом периодического продолжения выражение для  $y[n]$  можно переписать как

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] h[(n-l) \bmod N]. \quad (1.8)$$

В силу периодичности последовательностей номера отсчетов берутся по модулю  $N$ , поэтому  $x[-n] = x[N-n]$  и  $h[-n] = h[N-n]$ . Полученная сумма называется  $N$ -точечной *циклической сверткой*. В матричном виде циклическая свертка записывается как

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \dots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N-1] \\ x[1] & x[2] & \dots & x[0] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[N-1] & x[0] & \dots & x[N-2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[N-1] \\ h[N-2] \\ \dots \\ h[1] \end{bmatrix} = \quad (1.9)$$

$$= [x[i+l]_{\bmod N}] \mathbf{Q} \mathbf{h} = [h[i-l]_{\bmod N}] \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{Q}$  – матрица перестановки, связывающая друг с другом два типа матриц.

Матрица вида  $[d[i+l]_{\bmod N}]$  относится к классу ганкелевых, а матрицу вида  $[d[i-l]_{\bmod N}]$  называют теплицевой. Теплицевые матрицы занимают особое место в области математики, связанной с разработкой эффективных алгоритмов [5].

Используя алгебру полиномов, циклическую свертку можно записать в виде произведения двух многочленов свертываемых последовательностей по модулю полинома  $(\beta^N - 1)$ :

$$y(\beta) = x(\beta)h(\beta) \bmod(\beta^N - 1). \quad (1.10)$$

В матричном виде через матрицы Ганкеля и Теплица циклическая свертка запишется как

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [h[i+l]_{\bmod N}] [x[0], x[N-1], x[N-2], \dots, x[1]]^T = \\ &= [x[i-j]_{\bmod N}] [h[0], h[1], \dots, h[N-1]]^T. \end{aligned}$$

Если обозначить значения линейной и циклической сверток как  $y_{\text{л}}[i]$  и  $y_{\text{ц}}[i]$  соответственно, то при  $L = M = N$  можно выразить одни значения сверток через другие следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{\text{ц}}[0] &= y_{\text{л}}[0] + y_{\text{л}}[N], \\ y_{\text{ц}}[1] &= y_{\text{л}}[1] + y_{\text{л}}[N+1], \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{\text{ц}}[N-2] &= y_{\text{л}}[N-2] + y_{\text{л}}[2N-2], \\ y_{\text{ц}}[N-1] &= y_{\text{л}}[N-1]. \end{aligned}$$

Таким образом, если положить равными нулю значения  $y_{\text{л}}[N]$ ,  $y_{\text{л}}[N+1]$ ,  $y_{\text{л}}[2N-2]$ , то линейную свертку можно вычислить через циклическую.

Полином линейной свертки  $y_{\text{л}}(\beta)$  имеет степень  $L + M - 2$  и совпадает со своим вычетом по модулю полинома  $p(\beta)$  в степени  $L + M - 1$ :

$$y(\beta) \equiv x(\beta)h(\beta) \pmod{p(\beta)}.$$

Предположим, что полином модуля разлагается на взаимно простые линейные множители над полем коэффициентов  $F$ :

$$p(\beta) = \prod_{i=1}^{L+M-1} (\beta - a_i) = \prod_{i=1}^d p_i(\beta),$$

где  $a_i$  есть  $L + M - 1$  различных корней  $p(\beta)$  в поле  $F$ .

Согласно алгоритму Тома – Кука линейная свертка может быть вычислена за  $L + M - 1$  операций умножения. При этом  $x[i]$ ,  $h[i]$  рассматриваются как переменные, через которые выражаются значения  $y[i]$ . Для этого следует выбрать  $L + M - 1$  различных чисел (интерполяционных узлов)  $\gamma_i$  и подставить их вместо величины  $\beta$  в выражение для свертки. Получим произведение  $m_i = h(\gamma_i)x(\gamma_i)$  линейных выражений. Затем применим интерполяционную формулу Лагранжа для однозначного определения полинома степени  $L + M - 2$ :

$$y(\beta) = \sum_{k=0}^{L+M-2} m_k \prod_{i \neq k} \frac{(\beta - \gamma_i)}{(\gamma_k - \gamma_i)}. \quad (1.11)$$

*Пример.* Рассмотрим задачу вычисления линейной свертки

$$c(\beta) = c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 = a(\beta)b(\beta) = (a_0 + a_1\beta)(b_0 + b_1\beta).$$

*Решение.* Результат является многочленом второй степени и однозначно определяется своими значениями в трех различных точках. В случае вещественных чисел в качестве таких точек удобно выбрать  $c(-1)$ ,  $c(0)$ ,  $c(1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} c(-1) &= a(-1)b(-1) = (a_0 - a_1)(b_0 - b_1), \quad c(0) = a(0)b(0) = a_0b_0, \\ c(1) &= a(1)b(1) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c(x) = c(0)(1 - \beta^2) + \frac{1}{2}c(1)(\beta^2 + \beta) + \frac{1}{2}c(-1)(\beta^2 - \beta).$$

Константы  $(1/2)$  удобно внести в выражения для  $c(1)$  и  $c(-1)$ . Алгоритм Тома – Кука в матричном виде может быть записан следующим образом:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \right).$$

Данный алгоритм требует трех умножений и семи сложений.

С другой стороны, полиномы  $x(\gamma_i = a_i)$ ,  $h(\gamma_i = a_i)$  можно рассматривать как вычеты полиномов  $h_i(\beta)$   $x_i(\beta)$  по модулю  $(\beta - a_i)$ :

$$x_i(\beta) \equiv x(\beta) \pmod{p_i(\beta)}, \quad h_i(\beta) \equiv h(\beta) \pmod{p_i(\beta)}.$$

Полином свертки может быть восстановлен по формуле китайской теоремы об остатках для многочленов:

$$y(\beta) = \sum_{i=1}^d m_i(\beta) y_i(\beta) \pmod{p_u(\beta)}, \quad p_u(\beta) = \prod_{i=1}^d p_i(\beta), \quad (1.12)$$

где  $y_i(\beta) = x_i(\beta)h_i(\beta)$ ,  $m_u(\beta) \equiv T_u(\beta) \prod_{i=1, i \neq u}^d p_i(\beta)$ ,  $T_u(\beta) \prod_{i=1, i \neq u}^d p_i(\beta) \equiv 1 \pmod{p_u(\beta)}$ .

*Решение.* Определим полином модуля

$$p_u(\beta) = \beta(\beta - 1)(\beta^2 + 1) = \beta^4 - \beta^3 + \beta^2 - \beta.$$

Вычеты равны

$$\begin{aligned} a_1(\beta) &= a_0, & b_1(\beta) &= b_0, \\ a_2(\beta) &= a_1 + a_0, & b_2(\beta) &= b_2 + b_1 + b_0, \\ a_3(\beta) &= a_1\beta + a_0, & b_3(\beta) &= b_1\beta + (b_0 - b_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y_1(\beta) &= a_0 b_0, \\ y_2(\beta) &= (a_1 + a_0)(b_2 + b_1 + b_0), \\ y_3(\beta) &\equiv (a_1\beta + a_0)(b_1\beta + (b_0 - b_2)) \pmod{(\beta^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Окончательный результат может быть восстановлен в соответствии с китайской теоремой об остатках:

$$\begin{aligned} y(\beta) &= -(\beta^3 - \beta^2 + \beta - 1)y_1(\beta) + \frac{1}{2}(\beta^3 + \beta)y_2(\beta) + \\ &+ \frac{1}{2}(\beta^3 - 2\beta^2 + \beta)y_3(\beta) \pmod{(\beta^4 - \beta^3 + \beta^2 - \beta)}. \end{aligned}$$

Так как поле коэффициентов  $F$  и интерполяционные узлы могут быть выбраны произвольно, то в качестве  $a_i$  выберем набор из  $L + M - 1$  последовательных степеней числа  $W$ , считая их попарно различными в поле  $F$ . В этом случае  $a_i = W^i$ , и приведение по модулю  $(\beta - a_i)$  выражается следующим образом:

$$h(W^i) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]W^{in}, \quad i = 0, \dots, L + M - 2.$$

Аналогичное выражение получается и для последовательности  $x(W^i)$ . Таким образом, в результате специального набора  $a_i$  алгоритм Тома – Кука сводится к вычислению циклических сверток с помощью преобразований, имеющих структуру ДПФ.

Если  $W = \exp(-j2\pi/(L + M - 1))$ , то алгоритм Тома – Кука можно рассматривать как вычисление аперриодической свертки с помощью ДПФ. В этом случае полином  $p(\beta)$  имеет вид

$$p(\beta) = \prod_{i=0}^{L+M-1} (\beta - W^i) = \beta^{L+M-1} - 1.$$

Следовательно, если узлы интерполяции выбираются комплексными корнями из единицы, то алгоритм Тома – Кука эквивалентен вычислению с помощью ДПФ циклической свертки двух входных последовательностей длиной  $L + M - 1$ , получающихся добавлением  $(L - 1)$  нулей к  $h$  и  $(M - 1)$  нулей к  $x$ .

С операцией свертки тесно связана еще одна функция, которая называется корреляцией и определяется равенством

$$r(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h[i+k]x^*[i], \quad i = 0, \dots, L + M - 2,$$

где  $h[i+k] = 0$  при  $i+k \geq L$ .

Корреляцию можно вычислять как свертку, если просто прочитать одну из определяющих её последовательностей в обратном порядке. Все способы вычисления линейной свертки легко преобразуются в способы вычисления корреляции.

### 1.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Вычислите линейную свертку последовательностей

$$\mathbf{x} = [1, 2, -1]^T \text{ и } \mathbf{h} = [1, -1, 1, 1]^T.$$

2. С помощью интерполяционной формулы Лагранжа вычислите произведение двух полиномов, используя следующие точки интерполяции: 0, 1, -1, 2, -2.

3. Синтезируйте алгоритм вычисления корреляционной функции сигнала с помощью циклической свертки, используя понятия теплицевой и ганкелевой матриц.

## 2. ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### 2.1. Дискретное преобразование Фурье

Функция  $x(t)$ , периодическая на интервале  $(-\pi, \pi)$ , может быть разложена в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jkvt},$$

где  $A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(v) e^{-jkvt} dv$ .

В пределе при значениях периода  $L \rightarrow \infty$  ряд Фурье переходит в обратное преобразование Фурье

$$x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{j2\pi\mu v} d\mu,$$

где

$$X(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-j2\pi\mu v} dv$$

прямое преобразование Фурье.

Предположим, что функция  $x(t)$  представлена через дискретные отсчеты  $x[n] = x[n\Delta t]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . В этом случае можно определить дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности  $x[n]$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Обратное дискретное преобразование Фурье задается выражением

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Множитель  $\left(\frac{1}{N}\right)$ , а также  $(-1)$  в показателе степени могут перераспределяться между этими выражениями.

Пусть  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  или в общем случае  $W_N$  – некоторый элемент порядка  $N$ . Тогда

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}.$$

Величина  $W_N$  называется ядром преобразования. Чтобы убедиться в справедливости этих соотношений, заметим, что элемент порядка  $N$  должен удовлетворять равенству  $W_N^N - 1 = 0$ , а также  $W_N^{rN} - 1 = 0$ , причем над любым

полем  $z^N - 1 = (z - 1)(z^{N-1} + \dots + 1) = 0$ . Следовательно, для всех  $r \neq 0 \pmod N$  элемент  $W_N^r$  – корень многочлена в этом разложении. Это означает, что

$$\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{rm} = 0, \quad r \neq 0 \pmod N.$$

Если  $r = 0 \pmod N$ , то  $\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{rm} = N$ . Данные равенства не выполняются,

если  $N$  не кратно характеристике поля. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-mn} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{lm} x[l] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{(l-n)m} = N x[n].$$

Вычисление ДПФ можно рассматривать как операцию умножения вектора  $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$  на матрицу:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{0 \cdot 0} & \alpha^{0 \cdot 1} & \alpha^{0 \cdot 2} & \dots & \alpha^{0 \cdot (N-1)} \\ \alpha^{1 \cdot 0} & \alpha^{1 \cdot 1} & \alpha^{1 \cdot 2} & \dots & \alpha^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{(N-1) \cdot 0} & \alpha^{(N-1) \cdot 1} & \alpha^{(N-1) \cdot 2} & \dots & \alpha^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{X} = F_N \mathbf{x},$$

где  $\alpha = \exp\{j \frac{2\pi}{N}\} = W_N$ .

Матрица  $F_N$  называется матрицей дискретного преобразования Фурье и совпадает по форме с матрицей Вандермонда. Матрица Вандермонда обладает важным свойством: если элементы матрицы попарно различны, то матрица обратима.

*Обратная матрица.* Для обратного преобразования Фурье необходимо построить матрицу  $F_N^{-1}$ . Покажем, что  $(n, k)$ -й элемент  $F_N^{-1}$  равен  $W_N^{-nk} / N$ . Для заданной таким образом матрицы  $F_N^{-1}$  выполняется равенство  $F_N^{-1} F_N = I_N$ . Действительно умножение обратной матрицы на строку матрицы прямого преобразования дает

$$F_N^{-1} F_N[l, k] = \sum_{l=0}^{N-1} \left( \frac{W_N^{-lm}}{N} \right) W_N^{l, k} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{l(k-m)},$$

если  $k \neq m$ , то

$$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{l(k-m)} = \frac{1}{N} \frac{1^{(k-m)} - 1}{(W_N^{(k-m)} - 1)} = 0.$$

Если  $k = m$ , то  $F_N^{-1} F_N[l, k] = 1$ .



Прямое и обратное преобразования Фурье симметричны:

$$X(N - m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(N-m)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-mn}.$$

Значения компонент  $P(k)$  спектра последовательности

$$\mathbf{p} = \{p[0], p[1], \dots, p[N-1]\}$$

равны значению многочлена  $p(z) = \sum_{n=0}^{N-1} p[n]z^n$  в точках  $W_N^k$ . Следовательно,

обратное ДПФ соответствует операции интерполяции.

*Теорема.* Пусть существует ДПФ длиной  $N$  и задана последовательность

$$s[n] = x[n] y[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Тогда

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X((k-l) \bmod N) Y(l).$$

*Доказательство.* Вычислим ДПФ вектора с компонентами  $s[n] = x[n] y[n]$ :

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[m] W_N^{mk} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{mk} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l) W_N^{-lm} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l) \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{m(k-l)} \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y(l) X((k-l) \bmod N). \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление ДПФ требует  $N^2$  умножений и  $N(N-1)$  операций сложения. За счет алгебраических свойств элемента  $\alpha$  и поля, в котором происходят вычисления, сложность удастся существенно сократить. Различные алгоритмы быстрого вычисления ДПФ получили название быстрого преобразования Фурье (БПФ). Ряд алгоритмов БПФ реализован аппаратно в цифровых сигнальных процессорах.

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между временным и частотным представлениями сигнала при разложении его по гармоническим дискретно-экспоненциальным функциям.

## 2.2. Дискретные экспоненциальные функции

В дискретных преобразованиях Фурье используется система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), определяемых как

$$def(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn). \quad (2.1)$$

Переменные  $k$  и  $n$  принимают целочисленные значения  $(0, 1, \dots, N-1)$ . Переменную  $k$  отождествляют с номером функции, а переменную  $n$  — с номером отсчета.

Если обозначить  $W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$ , тогда  $def(k, n) = W_N^{kn}$ . Функция  $W_N^{kn}$  носит название *поворачивающий множитель*.

Образуем матрицу

$$F_N = [W_N^{kn}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

строки которой нумеруются переменной  $k$ , столбцы переменной  $n$ , а на пересечении  $k$ -й строки и  $n$ -го столбца записана величина  $W_N^{kn}$ .

Прямое и обратное ДПФ имеют следующую матричную форму записи:

$$\mathbf{X} = F_N \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = F_N^{-1} \mathbf{X}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{X} = [X(0), \dots, X(N-1)]^T$  – вектор коэффициентов спектра ДПФ;  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$  – вектор отсчетов сигнала;  $T$  – оператор транспонирования  $x = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$  – вектор отсчетов сигнала.

Отметим, что для поворачивающего множителя справедливы следующие соотношения:

–  $W_N^N = \exp(-j2\pi) = 1$  и, следовательно,  $W_N = \sqrt[N]{1}$ , т. е. поворачивающий множитель первой степени является корнем  $N$ -й степени из единицы;

$$- W_N^{(k+\frac{N}{2})} = -W_N^k; \quad W_N^{N/2} = -1.$$

При любом  $N$  матрица  $F_N$  обладает следующими свойствами.

1. Матрица  $F_N$  ортогональная и унитарная:  $F_N^* F_N = F_N F_N^* = N I_N$ ;  $I_N$  – единичная диагональная матрица.
2. Матрица  $F_N$  симметричная:  $F_N = F_N^T$ .
3.  $F_N^2 = N Q_N$ , где  $Q_N$  – симметричная матрица перестановок:

$$Q_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.  $F_N^4 = N^2 I_N$ .

5. Сопряженная матрица имеет вид  $F_N^* = Q_N F_N = F_N Q_N$ .

6. Обратная матрица имеет вид

$$F_N^{-1} = N^{-2} F_N^3 = N^{-1} F_N^* = N^{-1} Q_N F_N.$$

Для формирования обратной матрицы достаточно прочесть в обратном порядке элементы  $W_N^{kn}$  с отличными от нуля степенями ( $kn \neq 0$ ) строк матрицы  $F_N$ . Это свойство можно трактовать как один из видов симметрии относительно нулевого индекса.

*Пример.* Пусть задана матрица  $F_4$ :

$$F_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить обратную матрицу ДПФ.

*Решение.* Воспользуемся свойством симметрии матриц ДЭФ относительно нулевого индекса. Обратная матрица ДЭФ имеет вид

$$F_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \\ W_4^0 & W_4^6 & W_4^4 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^9 & W_4^6 & W_4^3 \end{bmatrix}.$$

7. *Мультипликативность:*

$$\text{def}(k_1, n) \text{def}(k_2, n) = \text{def}(k_1 + k_2, n);$$

$$\text{def}(k, n_1) \text{def}(k, n_2) = \text{def}(k, n_1 + n_2).$$

При умножении любых двух строк (столбцов) матрицы ДЭФ получается строка (столбец) той же матрицы. Номер строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

8. *Факторизуемость.* Для любого  $N$ , равного произведению отличных от 1 чисел  $N_1$  и  $N_2$ , матрица функций ДЭФ порядка  $N$  представима в виде

$$F_N = P_{N_2 N_1} (I_{N_1} \cdot F_{N_2}) D_{N_1 N_2} (F_{N_1} \cdot I_{N_2})$$

или в виде

$$F_N = (F_{N_1} \cdot I_{N_2}) D_{N_1 N_2} (I_{N_1} \cdot F_{N_2}) P_{N_1 N_2},$$

где  $P_{N_1 N_2}$  и  $P_{N_2 N_1}$  – матрицы перестановок, отвечающие транспонированию прямоугольных матриц размеров  $(N_1 \times N_2)$  и  $(N_2 \times N_1)$  соответственно;  $D_{N_2 N_1}$  – диагональная матрица, образованная последовательностью поворачивающих множителей:

$$W_N^{0 \cdot 0}, W_N^{1 \cdot 0}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot 0}, W_N^{0 \cdot 1}, W_N^{1 \cdot 1}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot 1}, \dots \\ \dots, W_N^{0 \cdot (N_1-1)}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot (N_1-1)}.$$

## 2.3. Свойства дискретного преобразования Фурье

1. *Цикличность.* Последовательность коэффициентов ДПФ является периодической последовательностью:

$$X(k) = X(k)_{\text{mod } N}.$$

Обратное ДПФ (ОДПФ) коэффициентов спектра восстанавливает периодическую последовательность:

$$x[n] = \text{ОДПФ}\{X(k)\} = x[n]_{\text{mod } N}. \quad (2.4)$$

Это свойство следует из периодичности ядра преобразования  $\exp\{j2\pi nk/N\}$ .

2. Симметрия:

$$\begin{aligned} \{x[N-n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{\pm X(N-k)\}; \\ \{x^*[n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X^*(N-k)\}; \\ \{x[n] = \pm x^*[n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X(k) = \pm X^*(N-k)\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эти соотношения показывают, что понятия симметрии четности и нечетности для последовательностей, порожденных ДПФ, в отличие от непрерывных сигналов определены не относительно точки ноль, а относительно точки с номером  $(N/2)$ . В силу целочисленности номеров элементов последовательности смысл четности и нечетности зависит от того, является ли количество элементов последовательности  $N$  четным или нечетным.

Варианты симметрий для одномерных ДПФ показаны на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Структура симметрии ДПФ

3. Теорема сдвига (инвариантность относительно сдвига во времени и частоте).

Пусть  $x[n \pm n_0]_{\text{mod } N}$  — последовательность, образованная из последовательности  $x[n]$  циклическим сдвигом на  $n_0$  отсчетов. Тогда справедливо соотношение

$$\{x[n \pm n_0]_{\text{mod } N}\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k) \exp\{\mp j2\pi n_0 k / N\}. \quad (2.6)$$

Свойство показывает, что при сдвиге по времени амплитудный спектр не меняется. Изменяются только фазы гармонических составляющих.

Аналогичное свойство справедливо и для частотной области:

$$\{x[n] \exp(j2\pi nk_0 / N)\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k + k_0)_{\text{mod } N}. \quad (2.7)$$

4. Интерполяция. Спектр последовательности, полученный введением дополнительных позиций между отсчетами исходного сигнала и размещением на этих позиций нулей, интерполирует спектр ДПФ исходной последовательности.

Рассмотрим последовательность  $g[n]$ , состоящую из  $MN$  отсчетов, из них  $(M-1)$  отсчетов являются нулевыми и расположены между отсчетами исходной последовательности  $x[n]$ :

$$\begin{aligned} g[nM] &= x[n], & n &= 0, \dots, NM-1, \\ g[nM+m] &= 0, & m &= 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Спектр такой последовательности с учетом только ненулевых компонент имеет вид

$$G(k) = \sum_{n=0}^{NM-1} g[nM + m] \exp[-j2\pi k(nM + m)/NM] = \quad (2.8)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} g[nM] \exp(-j2\pi kn/NM) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn/M) = X(k)$$

и представляет повторенный  $M$  раз спектр исходной последовательности  $X(k)$ .

*Пример.* Зададим  $\{x[n]\} = \{7, 5, 6, 9\}$ . Спектр ДПФ такой последовательности имеет вид  $\{X(k)\} = \{27, (1 + j4), -1, (1 - j4)\}$ . Найти спектр интерполированной последовательности  $L = 2$ .

*Решение.* Разреженная нулями последовательность

$$\{g[n]\} = \{7, 0, 5, 0, 6, 0, 9, 0\}$$

имеет спектр ДПФ в виде периодического (повторенного 2 раза) спектра исходной последовательности:

$$G = \{27, (1 + j4), -1, (1 - j4), 27, (1 + j4), -1, (1 - j4)\}.$$

5. *Теорема отсчетов.* Периодическое  $M$  кратное повторение исходной последовательности приводит к увеличению в  $M$  раз значений спектральных компонент её ДПФ, размещению их с шагом  $M$  и дополнением остальных позиций спектра нулями:

$$\{x[l]_{\text{mod } N}; l = 0, 1, \dots, MN - 1\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow M \times X(k) \delta [k_{\text{mod } M}], \quad (2.9)$$

где  $\delta [k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$  – символ Кронекера.

*Пример.* Вычислить спектр периодически повторенной последовательности  $\{x[n]\} = (7, 5, 6, 9)$ .

*Решение.* Периодически продолжаем заданную последовательность, образуя последовательность  $\{x_2[l]\} = (7, 5, 6, 9, 7, 5, 6, 9)$ . Спектр ДПФ такой последовательности имеет вид

$$X_2 = F_8 x_2, \quad \{X_2(k)\} = \{2 \cdot [27, 0, (1 + j4), 0, -1, 0, (1 - j4), 0]\}.$$

Аналогично для периодически продолженного спектра ДПФ получаем

$$\{x[l_{\text{mod } N}] \cdot \delta [l_{\text{mod } M}]; l = 0, 1, \dots, MN - 1\}$$

$\Downarrow$

ДПФ

(2.10)

$\Downarrow$

$$\{(1/M) X(k_{\text{mod } N}), k = 0, 1, \dots, MN - 1\}.$$

6. *Децимация.* Пусть  $\{X_{NM}(k)\}$  – множество коэффициентов спектра ДПФ последовательности  $\{x[n]; n = 0, 1, \dots, NM - 1\}$ , которые связаны между собой обратным преобразованием Фурье

$$x[nM + m] = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} X_{NM}(k) \exp[j2\pi k(nm + m)/NM],$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.11)$$

Рассмотрим  $N$  выборочных отсчетов, взятых с шагом  $M$ , последовательности  $x[n]$ . Такой сигнал называют *децимированной последовательностью*  $x'[n]$ .

Для  $m = 0$  через обратное ДПФ получим

$$x'[n] = x[nM] = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{NM-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N) =$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k) \exp[j2\pi (mN + k)n/N] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k) \right\} \exp(j2\pi kn/N).$$

Из данной формулы можно получить выражение для спектра децимированной последовательности

$$x'[n] \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X'(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k). \quad (2.12)$$

7. *Теорема о перестановках.* Если  $P$  не имеет общих делителей с  $N$ , то

$$\{x[Pn]_{\text{mod } N}\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X(Qk)_{\text{mod } N}\}, \quad (2.13)$$

где  $(PQ)_{\text{mod } N} = 1$ . Эта теорема является аналогом теоремы о масштабах интегрального преобразования Фурье. Но если изменение масштаба сигнала, например растяжение сигнала по координате в  $P$  раз, приводит к сжатию его спектра непрерывного преобразования Фурье в  $P$  раз, то для дискретных последовательностей и ДПФ это соответствует перестановкам элементов последовательностей.

8. *Линейность.* Пусть даны две последовательности  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$ , для которых ДПФ равны  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$  соответственно. Спектр взвешенной суммы последовательностей  $ax_1[n] + bx_2[n] = x_3[n]$  равен аналогичной взвешенной сумме спектров:

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k). \quad (2.14)$$

9. *Теорема о свертке.* Спектр свертки двух последовательностей  $\{x[n]\}$  и  $\{h[n]\}$  равен произведению спектров  $X(k)$  и  $H(k)$  сворачиваемых последовательностей:

$$y[l] = \sum_{n=0}^{N-1} h[l] x[l - n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k)H(k). \quad (2.15)$$

Теорема позволяет вычислить циклическую свертку  $y[l]$  при помощи ДПФ по формуле

$$\{y[l]\} = \text{ДПФ}^{-1}(\text{ДПФ}\{x[n]\} \text{ДПФ}\{h[n]\}).$$

10. ДПФ вещественной последовательности. Пусть  $\{x[n]\}$  – вещественная последовательность. ДПФ такой последовательности имеет следующие особенности:

– спектральные коэффициенты комплексно сопряжены относительно  $\frac{N}{2}$ :

$$X\left(\frac{N}{2} + l\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - l\right),$$

где оператор \* означает комплексное сопряжение;

– если  $x[n]$  – четная последовательность, т. е.  $x[n] = x[-n]$ , то спектр ДПФ  $\{X(k)\}$  также представляет собой вещественную последовательность;

– если  $x[n]$  – нечетная последовательность, т. е.  $x[n] = -x[-n]$ , то  $\{X(k)\}$  представляет собой чисто мнимую последовательность.

Свойство 10 позволяет при помощи одного преобразования вычислить ДПФ двух действительных последовательностей либо использовать  $N/2$  – точечное преобразование для вычисления спектра  $N$  точечной последовательности.

## 2.4. Разновидности дискретного преобразования Фурье

*Кратковременное дискретное преобразование Фурье.* В задачах спектрального анализа нестационарных сигналов используется так называемое кратковременное преобразование Фурье (КПФ):

$$X_{\text{КПФ}}\left(e^{j\omega}, n\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-j\omega m}, \quad (2.16)$$

где  $w[n]$  – весовая последовательность. КПФ зависит от двух параметров: целочисленного временного индекса  $n$  и значения непрерывной частоты  $\omega$ .

КПФ является периодической функцией с периодом  $2\pi$ . Модуль  $\left|X_{\text{КПФ}}\left(e^{j\omega}, n\right)\right|$  часто называют *спектрограммой*.

Дискретизация КПФ в частотной области в точках  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$  приводит к дискретному кратковременному преобразованию Фурье, которое можно трактовать как  $R$ -точечное ДПФ функции  $(x[n-m]w[m])$ ,  $N \geq R$ :

$$X_{\text{КПФ}}(k, n) = X_{\text{СТФТ}}\left(e^{j\omega}, n\right)\Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{m=0}^{R-1} x[n-m]w[m]e^{\frac{2\pi km}{N}}, \quad (2.17)$$

$$0 \leq k \leq N-1, N \geq R.$$

При равенстве размеров ДПФ и массива анализируемых данных  $N = R$  получаем *взвешенное ДПФ*

$$X_{\text{ВДПФ}}(k, m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[m-n]W_N^{nk}. \quad (2.18)$$

**Многомерное преобразование Фурье.** При решении ряда задач (например обработки сигналов в многопозиционной радиолокации) обратимся к многомерным дискретным сигналам. Так, двумерный дискретный сигнал – это функция, определенная на совокупности упорядоченных пар чисел  $\mathbf{x} = \{x(n_1, n_2), -\infty < n_1, n_2 < \infty\}$ . Для многомерной или  $M$ -мерной последовательности  $\mathbf{x} = \{x(n_1, \dots, n_M)\}$  с опорной областью  $R_N = \{\mathbf{n} : 0 \leq n_i \leq N_i - 1, i = 1, 2, \dots, M\}$  можно определить многомерное или  $M$ -мерное ДПФ:

$$X(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in R_N} x(\mathbf{n}) \exp[-j\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}],$$

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{|\det \mathbf{N}|} \sum_{\mathbf{k} \in R_N} X(\mathbf{k}) \exp[j\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}],$$

где  $\mathbf{N} = \text{diag}[N_1, \dots, N_M]$  – диагональная матрица.

*Пример.* Вычислить обратное двумерное ДПФ  $(N_1 \times N_2)$ -точечной последовательности, заданной своими спектральными коэффициентами:

$$X(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_1 \leq M_1 - 1, 0 \leq k_2 \leq M_2 - 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, N_1 \geq M_1, N_2 \geq M_2.$$

*Решение.* Последовательность временного ряда  $x[n_1, n_2]$  выражается следующим образом:

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2} =$$

$$= \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{n_1(M_1 - 1)}{2N_1} + \frac{n_2(M_2 - 1)}{2N_2} \right) \right] \frac{\sin(\pi n_1 M_1 / N_1) \sin(\pi n_2 M_2 / N_2)}{N_1 N_2 \sin(\pi n_1 / N_1) \sin(\pi n_2 / N_2)}.$$

## 2.5. Теоретико-полиномиальные преобразования

Теоретико-полиномиальное преобразование (ТПП) задается в виде

$$X_k(z) = \sum_{n \in Z_N} x[n] z^{f(n,k)} \text{ mod}(z^m - 1) / c(z), k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$X(k) \equiv X_k(z) \text{ mod}(z - a_m), a_m = \sqrt[m]{1} \in V, m \leq N,$$

где  $f(\cdot)$  – некоторый функционал от дискретных переменных  $n$  и  $k$  (временного  $n$  и спектрального  $k$  индексов соответственно);  $c(z)$  – делитель полинома  $z^m - 1$ , который обеспечивает невырожденность, т. е. существование обратного преобразования;  $a_m$  – примитивный корень степени  $m$ , полученный из решения уравнения  $z^m - 1 = 0$  в кольце  $V$ .

1. Пусть  $m = N$ ,  $V = C$ ,  $c(z) = 1$ ,  $a_m = \exp(-j2\pi / N)$ ,  $f(n, k) = nk$ , тогда ТПП становится ДПФ в базисе ДЭФ.

2. Пусть  $N = 2p$ ,  $p$  – простое число, полином  $c(z) = -z^p + 1$ ,  $a_N = -2$  над  $Z_M$ ,  $M = 2^p - 1$ ,  $f(n, k) = nk$ , тогда ТПП определяет теоретико-числовое преобразование Мерсенна.



3. Предположим, что  $N = 2b$ ,  $b = 2^t$  ( $t \in \mathbb{N}$ ),  $c(z) = z^b - 1$ ,  $a_N = 2$ ,  $f(n, k) = nk$ , тогда ТПП определяет теоретико-числовое преобразование Ферма.

4. Определим  $N = m^a$ ,  $V = C$ , примитивный корень  $a_m = \exp(-j2\pi/m)$ , полином  $c(z) = 1$ ,  $f(n, k) = \langle n_{(m)}, k_{(m)} \rangle$  – скалярное произведение векторов  $n_{(m)} = (n_{a-1}, \dots, n_1, n_0)$  и  $k_{(m)} = (k_{a-1}, \dots, k_1, k_0)$ ,  $n_i, k_i \in \mathbb{Z}_m$ , представляющих числа  $n$  и  $k$  в системе счисления по основанию  $m$ . Тогда ТПП определяет преобразование в базисе Виленкина – Крестенсона (ВК). Для  $m = 2$  получаем преобразование Уолша – Адамара.

5. Использование конечных полей в ТПП приводит к спектральным преобразованиям в конечных полях.

*Теоретико-числовое преобразование Ферма (ТЧПФ)* в качестве корня использует двойки и степени двойки. Это позволяет получить удобную арифметику,  $N$ -кратную степени двойки.

Числа Ферма имеют вид  $F_t = 2^{2^t} + 1 = 2^V + 1$ , где  $V = 2^t$ . Например,  $F_0 = 3$ ,  $F_1 = 5$ . Первые пять чисел – это простые числа, остальные числа составные:  $F_t = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ , где  $p_l$  – простые числа. Если  $F_t$  – простое число, то размер выборки определяется из условия  $N | 2^V$ . Если  $F_t$  – составное число, то простые множители имеют вид  $p_i = c_i 2^{t+2} + 1$ .

Следовательно, всегда можно найти такое  $N$ -точечное преобразование по модулю  $F_t$ , для которого выполняется условие  $\frac{N}{2^{t+2}}$ .

Определим корни преобразования. При  $e = 2$  – это корень порядка  $N = 2^{t+1}$ . Действительно,  $2^{2^t} \equiv -1$  по модулю  $F_t$ , а величины  $2^i$  принимают  $2^{t+1}$  различных значений.

ТЧПФ имеет вид

$$X(k) = \sum_{n=0}^{2^{t+1}-1} x[n] 2^{nk} \pmod{F_t}, \quad (2.19)$$

$$x[n] = -2^{2^t-t-1} \sum_{k=0}^{2^{t+1}-1} X(k) 2^{-nk} \pmod{F_t},$$

где  $2^{-nk} = \pm 2^{(2^t-1)nk} \pmod{F_t}$ .

Возможны следующие виды «удобных» корней:

– корень  $e = 2$  является корнем порядка  $N = 2^{t+1}$  по  $\pmod{F_t}$ ;

– корень  $e = 2^{2^i}$  является корнем порядка  $N = 2^{t+1-i}$  по  $\pmod{F_t}$ .

ТЧПФ имеет длины преобразований, которые выражаются составными числами. Это позволяет для их вычисления воспользоваться алгоритмами типа БПФ. Так, если длина равна степени двойки, то возможны быстрые алгоритмы преобразований, структура которых аналогична БПФ с прореживанием по

частоте и времени за исключением того, что операция умножения на поворачивающий множитель заменяется операцией умножения на степень двойки, т. е. сдвигами:

$$\begin{cases} X(k) \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]2^{2nk} + 2^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1]2^{2nk}, \\ X(k) \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]2^{2nl} + 2^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1]2^{2nk}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Вычислительная сложность быстрого ТЧПФ составит  $N \log_2 N$  операций сложения и  $\frac{N}{2} \log_2 N$  операций сдвига.

*Пример.* Построить матрицу четырехточечного ТЧПФ.

*Решение.* Пусть  $F_t = 2^{2^t} + 1 = 17 = 2^{2^2} + 1$ ;  $t = 2$ . Тогда  $N = 2^{t+1} = 2^3 = 8$  для  $e = 2$ . Для  $N = 2^{t+1-1} = 2^2 = 4 \rightarrow \varepsilon = 4$ .

Выберем  $e = 4$ , тогда

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 4^2 & 4^4 & 4^6 \\ 1 & 4^3 & 4^6 & 4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \pmod{17},$$

$$\mathbf{T}^{-1} = N^{-1} \mathbf{T}_{\text{inv}} = 13 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \end{bmatrix} \pmod{17}.$$

Основное применение ТЧП – это *вычисление точных значений свертки.*

*Пример.* Предположим, необходимо вычислить циклическую свертку двух последовательностей  $\mathbf{x} = [2, -2, 1, 0]^T$  и  $\mathbf{h} = [1, 2, 0, 0]^T$ .

*Решение.* Воспользуемся теоремой о свертке для ДПФ, которая справедлива и для ТЧПФ.

Выберем ТЧПФ с параметрами  $N = 4$ ,  $e = 4$ . Спектры последовательностей равны:

$$\mathbf{X}_{F_t} = \mathbf{T}\mathbf{x} = [1, 10, 5, 9] \pmod{17} \text{ и } \mathbf{H}_{F_t} = \mathbf{T}\mathbf{h} = [3, 5, 12, 5] \pmod{17}.$$

Произведение одноименных спектральных коэффициентов дает следующий результат:  $\{X(k)H(k)\} \rightarrow \mathbf{X}\mathbf{H} = [3, 90, 80, 90]^T = [3, 5, 12, 5]^T \pmod{17}$ . Обратное число  $N^{-1} = 13$ . Значение циклической свертки равно:

$$\mathbf{Y} = 13 \mathbf{T}_{\text{inv}} (\mathbf{X}\mathbf{H}) = [2, 2, 14, 2]^T = [2, 2, -3, 2]^T \pmod{17}.$$

*Дискретное преобразование Фурье над конечными полями.* При анализе сигналов и цифровых методах их обработки особое внимание привлекают ортогональные преобразования, благодаря простоте вычисления координат разлагаемых функций в пространстве. Такие преобразования определены над полем комплексных чисел. Известно, что реализация прямого и обратного ДПФ предопределяет значительные погрешности при вычислении значений спектральных коэффициентов в поле комплексных чисел.

С этой точки зрения привлекательными являются преобразования, определенные над расширенным полем Галуа  $GF(p^m)$ .

Пусть  $\beta$  – элемент порядка  $k$  в мультипликативной группе ненулевых элементов поля  $GF(p^m)$ . Тогда выражение для ДПФ примет следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{d-1} x[n]\beta^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, d-1. \quad (2.21)$$

Обратное преобразование запишется как

$$x[n] = d^{-1} \sum_{k=0}^{d-1} X(k)\beta^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, d-1. \quad (2.22)$$

Анализ выражений (2.21) и (2.22) показывает, что полученное преобразование аналогично ДПФ комплексной области и действует в пространстве циклической группы порядка  $d$ , определенной полем  $GF(p^m)$ . Так как  $\beta^{nk}$  и  $x[n]$  представляют собой целочисленные элементы расширенного поля Галуа, то при реализации выражений (2.21) и (2.22) будут полностью отсутствовать шумы округления. Поэтому оценка спектральных составляющих с помощью (2.21) и (2.22) будет более точной по сравнению с ДПФ.

*Пример.* Дана последовательность  $x[n] = (0, 1, 2, 0, 1, 0, 0)$ . Вычислить прямое и обратное ДПФ над конечным полем  $GF(2^3)[x] / x^3 + x + 1$ .

*Решение.* Представим символы заданной последовательности в двоичной системе счисления  $x[n] = (000, 001, 010, 000, 001, 000, 000)$ .

Исходя из условия возможности представления квантованных значений  $x[n]$  в виде элементов  $\beta$  расширенного поля Галуа, получаем входной вектор

$$x[n] = (0, \beta^0, \beta, 0, \beta^0, 0, 0).$$

Воспользуемся матричным представлением выражения (2.21). Тогда значения спектральных составляющих можно представить следующим образом:

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & \beta^5 & \beta^6 \\ 1 & \beta^2 & \beta^4 & \beta^6 & \beta & \beta^3 & \beta^5 \\ 1 & \beta^3 & \beta^6 & \beta^2 & \beta^5 & \beta & \beta^4 \\ 1 & \beta^4 & \beta & \beta^5 & \beta^2 & \beta^6 & \beta^3 \\ 1 & \beta^5 & \beta^3 & \beta & \beta^6 & \beta^4 & \beta^2 \\ 1 & \beta^6 & \beta^5 & \beta^4 & \beta^3 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \beta^0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta^5 \\ \beta^0 \\ \beta^6 \\ \beta^4 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix}.$$

Процесс вычисления выполняется по правилу поля  $GF(2^3)[x] / x^3 + x + 1$ .

Обратное преобразование осуществляется по формуле (2.22) со значением обратного элемента  $d^{-1} = 1$ , так как  $d d^{-1} \equiv 1 \pmod{7}$ , и имеет следующий вид :

$$x[n] = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \beta^6 & \beta^5 & \beta^4 & \beta^3 & \beta^2 & \beta^1 \\ 1 & \beta^5 & \beta^3 & \beta & \beta^6 & \beta^4 & \beta^2 \\ 1 & \beta^4 & \beta & \beta^5 & \beta^2 & \beta^6 & \beta^3 \\ 1 & \beta^3 & \beta^6 & \beta^2 & \beta^5 & \beta & \beta^4 \\ 1 & \beta^2 & \beta^4 & \beta^6 & \beta & \beta^3 & \beta^5 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & \beta^5 & \beta^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta \\ \beta^5 \\ \beta^0 \\ \beta^6 \\ \beta^4 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta^0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 2.6. Дискретные ортогональные преобразования на конечных абелевых группах

Значительный интерес для цифровой обработки сигналов представляют Фурье-подобные преобразования в пространстве всех функций, заданных на конечной абелевой группе  $H_N = H_{N_1} \oplus H_{N_1} \oplus \dots \oplus H_{N_n}$  и принимающих значения в конечном коммутативном кольце или некотором поле  $K$ . Здесь оператор  $\oplus$  обозначает операцию прямой суммы.

Определим в пространстве  $L$  функции-аналоги ДЭФ –  $\exp(j\alpha x)$ . Отметим, что экспонента является решением функционального уравнения  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$  над полем комплексных чисел с начальным значением  $f(0) = 1$ . Решениями подобных уравнений над кольцом  $K$  являются функции, которые называются характерами и обозначаются  $\chi(x)$ . Каждый характер является гомоморфным отображением группы  $H$  в кольцо  $K$ . Если будем считать, что размер подгруппы  $N_i = p_i^{k_i}$ , где  $p_i$  – простое число, и введем понятие  $\varepsilon_i$  как первообразного корня в степени  $N_i$  в поле или кольце  $K$ , тогда характер можно определить как

$$\chi_\alpha(x) = \varepsilon_i^{\alpha x} \quad \alpha = 0, 1, \dots, N_i - 1.$$

Здесь  $x$  принадлежит числовой циклической группе  $H = \langle \{0, 1, \dots, p_i^{k_i}\}, +, -, 0 \rangle$ .

Рассмотрим случай, когда группа  $H$  равна прямой сумме своих неразложимых циклических подгрупп. Для  $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n$  любой элемент  $x \in H$  может быть представлен в виде

$$x = x_n + x_{n-1} \cdot N_n + x_{n-2} \cdot N_n \cdot N_{n-1} + \dots + x_1 \cdot N_n \cdot N_{n-1} \cdot \dots \cdot N_1,$$

где  $x_i \in \{0, 1, \dots, N_{i-1}\}$ .

Произвольный элемент  $x$  со своим кодом  $(x)_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$  представим как сумму векторов:

$$x = (x_n, 0, \dots, 0) + (0, x_{n-1}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_1) = \sum_{i=0}^n \vec{x}_i.$$

Следовательно, для всех возможных характеров группы справедливо равенство

$$\chi(x) = \chi\left(\sum_{i=0}^n \vec{x}_i\right) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \dots \cdot \chi(x_n)$$

где  $\chi(x_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  – характеры подгрупп  $H_{N_i}$ . Следовательно, все характеры описываются функциями вида

$$\chi_{\alpha_1}(x_1) \cdot \chi_{\alpha_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \chi_{\alpha_n}(x_n) = \varepsilon_1^{\alpha_1 x_1} \cdot \varepsilon_2^{\alpha_2 x_2} \cdot \dots \cdot \varepsilon_n^{\alpha_n x_n},$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ;  $\varepsilon_i = \sqrt[N]{1}$ .

*Свойства характеров.*

1. Инвариантность относительно группового сдвига:

$$\chi_{\alpha}(x_1 + x_2) = \chi_{\alpha}(x_1) \chi_{\alpha}(x_2).$$

2. Мультипликативность:

$$\chi_{\alpha}(x) \chi_{\beta}(x) = \chi_{\alpha+\beta}(x).$$

3. Симметричность:

$$\chi_{\alpha}(x) = \chi_x(\alpha).$$

4.  $\sum_{x \in H} \chi_{\alpha}(x) = N.$

Множество характеров  $\chi_{\alpha}(x)$ ,  $x \in H$ ,  $\alpha \in H^*$ , образует ортонормированные базисы в пространствах  $L(H, K)$  и  $L(H^*, K)$  относительно скалярных произведений:

$$(\chi_{\alpha}(x), \chi_{\beta}(x)) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta; \end{cases}$$

и

$$(\chi_{\alpha}(x), \chi_{\beta}(y)) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Используя полученные базисы, можно произвольную функцию разложить в ряд:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{\alpha \in H^*} F(\alpha) \chi_{\alpha}(x), \\ F(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{x \in H} f(x) \chi_{\alpha}^*(x). \end{cases} \quad (2.23)$$

*Пример.* Пусть абелева группа имеет вид  $H_8 = H_2 + H_2 + H_2$ . Требуется построить систему характеров.

*Решение.* Отообразим элементы этой группы на отрезок  $[0, 7]$  следующим образом. Поставим в соответствие числу в десятичной системе счисления его код двоичной системы:

$$\begin{array}{ll} (0\ 0\ 0) \rightarrow 0 & (1\ 0\ 0) \rightarrow 4 \\ (0\ 0\ 1) \rightarrow 1 & (1\ 0\ 1) \rightarrow 5 \\ (0\ 1\ 0) \rightarrow 2 & (1\ 1\ 0) \rightarrow 6 \\ (0\ 1\ 1) \rightarrow 3 & (1\ 1\ 1) \rightarrow 7. \end{array}$$

Полученные двоичные коды будем считать кодами-векторами индексов  $x \rightarrow (x)_2 = (x_1, x_2, x_3)$  и  $\alpha \rightarrow (\alpha)_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Так как  $q = \text{НОК}(2, 2, 2) = 2$ , то  $\varepsilon_i = \sqrt[2]{1} = -1$ . Получим характеры

$$\chi_\alpha(x) = (-1)^{\alpha_1 x_1} \cdot (-1)^{\alpha_2 x_2} \cdot (-1)^{\alpha_3 x_3} = (-1)^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} = (-1)^{\langle x, \alpha \rangle},$$

образующие систему функций Уолша – Адамара:

$$\begin{array}{l} \chi_0(x): 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \chi_1(x): 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1 \\ \chi_2(x): 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1 \\ \chi_3(x): 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1 \\ \chi_4(x): 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1 \\ \chi_5(x): 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1 \\ \chi_6(x): 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1 \\ \chi_7(x): 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1. \end{array}$$

*Пример.* Пусть  $H_6 = H_2 + H_3$ ,  $N = 6$ ,  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 3$ . Построить систему функций Виленкина – Крестенсона на основе характеров.

*Решение.* Элементы заданной группы представляются на отрезке  $[0, 5]$  в смешанной системе исчисления следующим образом:

$$x = x_n + x_{n-1}N_n = x_2 + x_1 3.$$

Соответствие между представлением чисел в десятичной системе счисления и системой счисления по смешанному основанию имеет вид

$$\begin{array}{ll} (0, 0) \rightarrow 0 & (1, 0) \rightarrow 3, \\ (0, 1) \rightarrow 1 & (1, 1) \rightarrow 4, \\ (0, 2) \rightarrow 2 & (1, 2) \rightarrow 5, \end{array} \quad \varepsilon_1 = \sqrt[2]{1} = (-1), \quad \varepsilon_2 = \sqrt[3]{1}.$$

Характеры группы определяются как  $x \rightarrow (x)_{2,3} = (x_1, x_2)$  и  $\alpha \rightarrow (\alpha)_{2,3} = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\chi_\alpha(x) = \chi_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2) = (-1)^{\alpha_1 x_1} \cdot \varepsilon_2^{\alpha_2 x_2}.$$

Придавая значения индексам  $x_i$  и  $\alpha_i$  из области их определения, получаем

$$\begin{aligned}\chi_0(x) &= 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_1(x) &= 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ \chi_2(x) &= 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ \chi_3(x) &= 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \chi_4(x) &= 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & -1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_2^2 \\ \chi_5(x) &= 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & -1 & -\varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2.\end{aligned}$$

Матрицу функций характеров можно получить другим путем.

Обозначим  $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  и  $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ . Тогда систему функций

можно получить, используя операцию кронекеровского перемножения матриц:

$$H_6 = H_2 \otimes H_3 = \begin{bmatrix} H_3 & | & H_3 \\ \hline H_3 & | & -H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & | & 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & | & 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & | & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & | & -1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & | & -1 & -\varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Важнейшим свойством преобразований на конечных абелевых группах является их инвариантность относительно так называемого  $H$ -сдвига, т. е. сдвига на отрезке  $\Omega_N = [0, N - 1]$  по законам абелевой группы  $H = H_{N_1} \oplus H_{N_2} \oplus \dots \oplus H_{N_m}$  порядка  $N$ .

*Классификация Фурье-подобных преобразований.* В основу классификации преобразований удобно положить принцип, введенный Л. С. Понтрягиным по инвариантному преобразованию функций. На множестве  $A$  значений аргументов (в области определения функции) задается бинарная операция, причем такая, что  $A$  по этой операции является абелевой группой  $G$ . На множестве  $\Phi$  значений функций задается пара таких бинарных операций, что  $\Phi$  образует поле или в более общем случае – кольцо с единицей.

Базисные функции, определяющие ядра преобразований, могут быть выбраны различными способами. В основе Фурье-подобных преобразований используют характеры абелевой группы, соответствующей множеству  $A$  отсчетов заданной функции. Над полем комплексных чисел  $C$  характерами являются:

– для бесконечной непрерывной (континуальной) абелевой группы вещественных чисел – комплексные экспоненты  $\varepsilon(\omega, t) = \exp(j\omega t)$ ;

– для бесконечной, но счетной абелевой группы целых чисел – дискретные экспоненты  $\varepsilon(\omega, n) = \exp(j\omega n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

– для конечной циклической группы порядка  $N$  – корень  $N$ -й степени из единицы, т. е.  $\sqrt[N]{1} = \exp(j2\pi / N)$ .

Преобразования с подобным выбором характеров, используемых в качестве базисных функций, являются ортогональными.

В общем случае пару интегральных преобразований можно представить в виде

$$X(\omega) = \int_G x(t) \chi(\omega, t) dt; \quad x(t) = \int_C X(\omega) \chi^*(\omega, t) d\omega,$$

где  $X(\omega)$  – изображение (спектр) сигнала  $x(t)$ ;  $\chi(\omega, t)$  и  $\chi^*(\omega, t)$  – ядра прямого и обратного преобразований.

Подставляя в выражения для интегральных преобразований комплексные экспоненты, получаем пару одномерных интегральных преобразований Фурье. Используя подстановку дискретной экспоненты, заменяя интеграл знаком суммы и непрерывное время  $t$  дискретным  $nT_0$ , получаем дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) или  $Z$  преобразование (преобразование Лорана). Используя характер  $\chi = \exp(\pm j \frac{2\pi}{N}) = \sqrt[N]{1}$  конечной циклической группы порядка  $N$ , получаем выражения для дискретного (прямого и обратного) преобразования Фурье над полем комплексных чисел.

*Взаимосвязь спектров.* Для линейных ортогональных преобразований возможен переход из одного ортогонального базиса в другой с помощью специальных алгоритмов пересчета (вычисление ядра Фурье).

Рассмотрим взаимосвязь спектров Фурье и Уолша. Преобразование Фурье имеет вид

$$\mathbf{X}_F = \left[ W_N^{nk} \right] \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{x} = \left[ W_N^{nk} \right]^{-1} \mathbf{X}_F.$$

Преобразование Уолша – Адамара запишется как

$$\mathbf{X}_H = \left[ \text{had}(k, n) \right] \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{x} = \left[ \text{had}(k, n) \right]^{-1} \mathbf{X}_H.$$

Тогда спектр Фурье выражается через спектр Уолша следующим образом:

$$\mathbf{X}_F = \left[ W_N^{nk} \right] \left[ \text{had}(k, n) \right]^{-1} \cdot \mathbf{X}_H$$

и наоборот:

$$\mathbf{X}_H = \left[ \text{had}(k, n) \right] \left[ W_N^{kn} \right]^{-1} \mathbf{X}_F.$$

*Пример.* Вычислить ядро Фурье для  $N = 4$ .

*Решение.* Используем соотношения, связывающие спектры Фурье и Уолша.



Получим следующий результат:

$$\left[ W_N^{nk} \right] H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & (2-2j) & (2+2j) \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2+2j) & (2-2j) \end{bmatrix}$$

Сложнее определить взаимосвязь преобразований цифрового сигнала в полях комплексных чисел  $C$  и конечных полях Галуа  $GF(p^v)$ . Предположим, что группа  $G_N$  определяет системы базисных функций над полями  $C$  и  $GF(p^v)$ , т. е. определяет  $\chi$ -преобразования в пространствах  $L_1(G_N, C)$  и  $L_2(G_N, GF(p^v))$ . Обозначим спектральные коэффициенты, а также первообразные корни этих преобразований как  $\varepsilon_F \rightarrow X_F(k)$  и  $\varepsilon_{GF} \rightarrow X_{GF}(k)$  соответственно. Тогда взаимосвязь спектров можно определить через равенство

$$X_{GF}(k) = \lambda \{ [A \vec{X}_F(k)] \},$$

где  $A = [a_1, a_2]$  – матрица преобразований значений спектрального коэффициента  $X_F$  в множество действительных чисел  $R$ ;  $\vec{X}_F(k) = [\text{Re } X_F(k), \text{Im } X_F(k)]^T$ .

## 2.7. Контрольные вопросы и задачи

1. Определите ДПФ каждой из перечисленных конечных последовательностей, считая, что все они имеют длину  $N$ , где  $N$  – четно:

а)  $x[n] = \delta[n]$ ;  $x[n] = \delta[n - n_0]$ ,  $0 \leq n_0 \leq N - 1$ ;

б)  $x[n] = a^n$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ ;

в)  $x[n] = \exp(-j2\pi fn)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ .

2. Даны конечные последовательности

$$x[n] = \cos(\pi n / 2), 0 \leq n \leq 3; h[n] = (-1)^n, 0 \leq n \leq 3:$$

а) вычислите четырехточечные ДПФ, ТЧПФ;

б) вычислите циклические свертки последовательностей, применив для вычисления теорему о свертке, и проведите сравнительный анализ.

3. Рассмотрите конечную последовательность  $x[n]$ , у которой  $x[n] = 0$  при  $n < 0$  и  $n \geq P$ . Необходимо узнать значения ее Фурье-образа в точках  $\omega_k = 2\pi k / N$ , при  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Разработайте и обоснуйте процедуру поиска этих значений через процедуру ДПФ в следующих случаях: а)  $N > P$ ; б)  $N < P$ .

4. Покажите, что для  $N$ -членной последовательности  $x[n]$  и ее  $N$ -точечного

ДПФ  $X(k)$  справедливо тождество Парсеваля 
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

5. Постройте и сравните структурные свойства функций-характеров Уолша – Адамара и Виленкина – Крестенсона для  $N = 8$ .

### 3. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Существует два класса алгоритмов вычисления преобразований Фурье: обычное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое дискретное преобразование Фурье (БПФ).

1. *Дискретное преобразование Фурье*, при вычислении которого допускают все известные способы распараллеливания векторно-матричных операций. Если пользоваться обычным правилом умножения матрицы на вектор, то вычисление векторов  $x$  и  $X$  требует  $N^2$  операций комплексного умножения и  $N(N - 1)$  операций комплексного сложения.

2. *Быстрое преобразование Фурье* включает набор эффективных алгоритмов, предназначенных для вычисления ДПФ. В основе алгоритмов лежит стратегия *divide et impera* (разделяй и властвуй). Идея БПФ по своей природе является алгебраической и заключается в следующем. Величина  $N$ , определяющая длину входной последовательности отсчетов, раскладывается на сомножители, затем вычисляются отдельные ДПФ меньших длин, чем  $N$ , из которых потом формируется выходная последовательность. Происходит так называемое *расщепление* исходного алгоритма на комбинацию подобных алгоритмов меньшего размера.

Положим, что для  $N$ -точечной последовательности нужно вычислить ее ДПФ и  $N$  представляет собой составное число  $N = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_\mu$ , где  $\{r_i\}$  – это набор множителей числа  $N$ , которые необязательно являются простыми. Алгоритм расщепления для вычисления такого ДПФ через комбинацию преобразований меньших размеров потребуют число операций, пропорциональное  $V_{\text{сл}} \approx N \sum_{i=0}^{\mu} r_i$ . Такие алгоритмы называются алгоритмами быстрого преобразования Фурье. В частности, и это важно, когда  $r_1 = r_2 = \dots = r_\mu = 2$ , для БПФ число операций пропорционально  $V_{\text{сл}} \approx N \log_2 N$ .

Разберем возможность сокращения числа операций при вычислении ДПФ на примере двух сомножителей  $N = N_1 N_2$ .

#### 3.1. Быстрое преобразование Фурье по смешанному основанию

ДПФ последовательности  $\{x[n]; n = 0, \dots, N - 1\}$ ,  $N = N_1 N_2$  запишется в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_1 N_2 - 1} x[n] W_N^{nk}.$$

Представим входные  $n$  и выходные  $k$  индексы в смешанной системе счисления с основаниями  $N_1$  и  $N_2$ :

$$n = n_2 N_1 + n_1; \quad k = k_1 N_2 + k_2, \quad \text{где } n_1, k_1 = 0, \dots, N_1 - 1, \quad n_2, k_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Последовательности входных и выходных отсчетов преобразуются в двумерные массивы:

$$d[n_1, n_2] = x[n_2 N_1 + n_1], \quad n_1 = 0, \dots, N_1, \quad n_2 = 0, \dots, N_2 - 1;$$

$$D(k_1, k_2) = X(k_1 N_2 + k_2), \quad k_1 = 0, \dots, N_1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

После подстановки алгоритм ДПФ представляется в виде

$$\begin{aligned} D(k_1, k_2) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} d[n_1, n_2] \exp(-j \frac{2\pi}{N_1 N_2} (k_1 N_2 + k_2)(n_2 N_1 + n_1)) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \exp(-j \frac{2\pi}{N_1 N_2} k_2 n_1) \left( \sum_{n_2=0}^{N_2-1} d[n_1, n_2] \exp(-j \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2) \right) \exp(-j \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таким образом, исходное ДПФ оказалось сведенным к двум ДПФ, производимым над уменьшенными массивами. Алгоритм преобразования может быть представлен следующей схемой.

1. Для всех строк матрицы  $[d[n_1, n_2]]$  вычисляются  $N_2$ -точечные ДПФ. Коэффициенты преобразований размещаются на позициях данных, образуя тем самым матрицу  $[d_1[n_1, k_2]]$ .

2. Каждый элемент полученной матрицы умножается на фазовый множитель  $W_N^{n_1 k_2}$ .

3. Для всех столбцов матрицы  $[[d_1[n_1, k_2] W_N^{n_1 k_2}]$  вычисляются  $N_1$ -точечные ДПФ.

Отметим, что алгоритм имеет инверсный порядок следования индексов в выходной последовательности. Это объясняется инверсией разрядов в позиционно-численном представлении индексов по смешанному основанию. Для сохранения естественного порядка следования отсчетов необходимо выполнить операцию обратной перестановки.

*Пример.* Пусть  $N = 6 = 2 \cdot 3$ ,  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 3$ . Входная последовательность имеет вид

$$\{x[n]; n = 0, \dots, 5\} = [1, 1, 1, -1, -1, -1].$$

Вычислить ДПФ по смешанному основанию.

*Решение.* Элемент матрицы двумерного массива в этом случае равен

$$d[n_1, n_2] = x[2n_2 + n_1], \quad n_1 = 0, 1; \quad n_2 = 0, 1, 2.$$

Сама матрица имеет вид

$$[d[n_1, n_2]] = \begin{bmatrix} x[0] & x[2] & x[4] \\ x[1] & x[3] & x[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

На первом этапе вычислений строки матрицы входных отсчетов преобразуются с помощью трехточечного ДПФ. В результате получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & (1 - j\sqrt{3}) & (1 + j\sqrt{3}) \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

После умножения элементов этой матрицы на поворачивающие множители  $\exp(-j\frac{2\pi}{6}k_2n_1) = W_6^{k_2n_1}$ ,  $k_2 = 0, 1, 2$ , получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} W_6^0 & (1-j\sqrt{3})W_6^1 & (1+j\sqrt{3})W_6^2 \\ -W_6^0 & 2W_6^1 & 2W_6^2 \end{bmatrix}.$$

Применение двухточечного ДПФ к столбцам матрицы, полученной на втором этапе, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} [D(k_1, k_2)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_6^0 & (1-j\sqrt{3})W_6^0 & (1+j\sqrt{3})W_6^0 \\ -W_6^0 & 2W_6^1 & 2W_6^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2(1-j\sqrt{3}) & 0 \\ 2 & 0 & 2(1+j\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) & X(1) & X(2) \\ X(3) & X(4) & X(5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Спектр ДПФ равен

$$X(0) = 0, X(1) = 2(1-j\sqrt{3}), X(2) = 0, X(3) = 2, X(4) = 0, X(5) = 2(1+j\sqrt{3}).$$

Описанный алгоритм предпочтительнее непосредственного прямого вычисления ДПФ, поскольку требуется меньше арифметических операций. Действительно, сложность алгоритма ДПФ по смешанному основанию определяется сложностью вычислений  $N_1$  раз  $N_2$ -точечного ДПФ,  $N_2$  раз  $N_1$ -точечного ДПФ и  $(N_1N_2)$  умножений на фазовые множители. Вычислительные затраты при таком способе вычисления ДПФ равны: количество операций умножения равно  $N(N_1 + N_2 + 1)$ ; сложений —  $N(N_1 + N_2 - 2)$ . Прямое вычисление ДПФ потребовало бы  $(N^2)$  операций комплексного умножения и  $N(N - 1)$  операций комплексного сложения.

Если числа  $N_1$  и  $N_2$  являются составными, то алгоритм БПФ применяется рекурсивно. При этом на каждом шаге рекурсии БПФ сокращает число операций.

### 3.2. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье по основанию два

Наибольшее распространение в цифровой обработке сигналов получили алгоритмы БПФ по основанию 2. Известны два способа организации вычислений в алгоритмах БПФ по основанию 2: метод прореживания по времени и метод прореживания по частоте.

*Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.* Обрабатывается исходная последовательность  $\{x[n]\}$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ ,  $N = 2^m \Rightarrow r_i = 2$ .

На первом шаге алгоритма исходная последовательность разбивается на две последовательности длиной  $N/2$ , соответствующие четным и нечетным отсчетам:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x[0], x[2], \dots, x[2n'], \\ x_2[n] &= x[1], x[3], \dots, x[2n' + 1], \quad n' = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Вычисление  $N$ -точечного ДПФ в этом случае сводится к двум  $N/2$ -точечным ДПФ:

$$\begin{aligned} \text{ДПФ}_N(k, x) &= \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'] e^{-j \frac{2\pi 2n'k}{N}} + \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'+1] e^{-j \frac{2\pi(2n'+1)k}{N}} = \\ &= \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'] e^{-j \frac{2\pi 2n'k}{N}} + e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'+1] e^{-j \frac{2\pi 2n'k}{N}}, \\ & \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя свойства

$$W_N^k = -W_N^{k \pm \frac{N}{2}} \text{ и } W_N^2 = [\exp(-j \frac{2\pi}{N})]^2 = \exp(-j \frac{2\pi}{N/2}) = W_{N/2},$$

преобразуем (3.2) к виду

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2[n] W_{N/2}^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k). \quad (3.3)$$

Для  $k = 0, \dots, N - 1$  имеем (рис. 3.1):

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ X(k) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

На втором шаге аналогичная процедура применяется для получения четырех  $N/4$ -точечных ДПФ из двух  $N/2$ -точечных ДПФ. Далее образуются восемь  $N/8$ -точечных ДПФ из четырех  $N/4$ -точечных ДПФ и т. д. Процесс разбиений продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Отметим, что на каждом шаге происходит разделение данных на четные и нечетные последовательности. В итоге это приводит к тому, что отсчеты исходной последовательности должны быть предварительно переставлены по закону инверсии двоичного кода индекса.

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для  $N = 8$  показан на рис. 3.2.

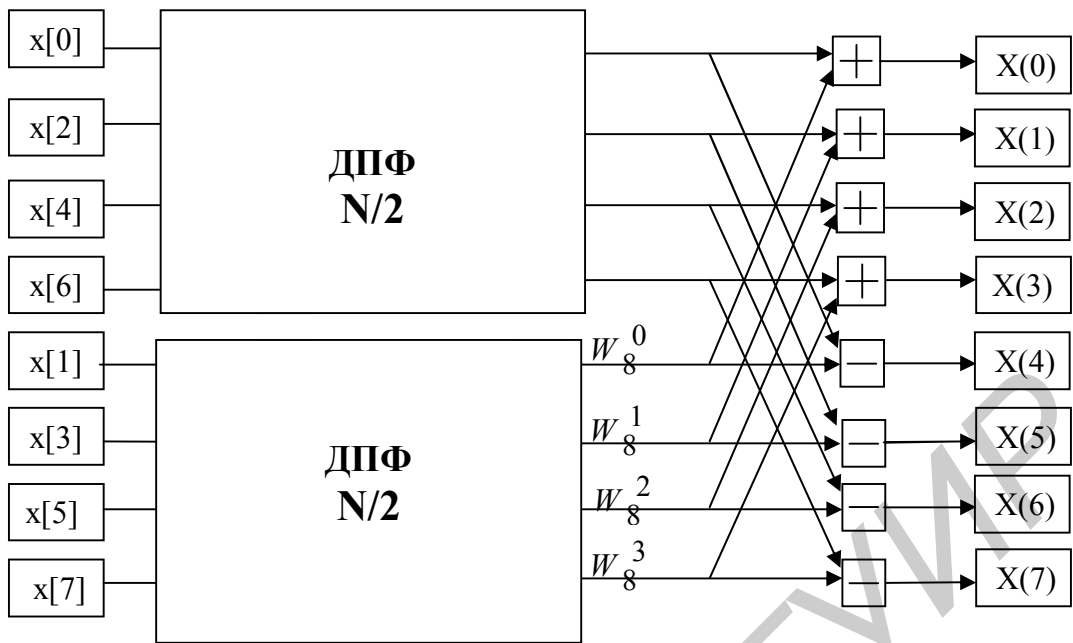


Рис. 3.1. Первый этап построения графа БПФ с прореживания по времени для  $N = 8$

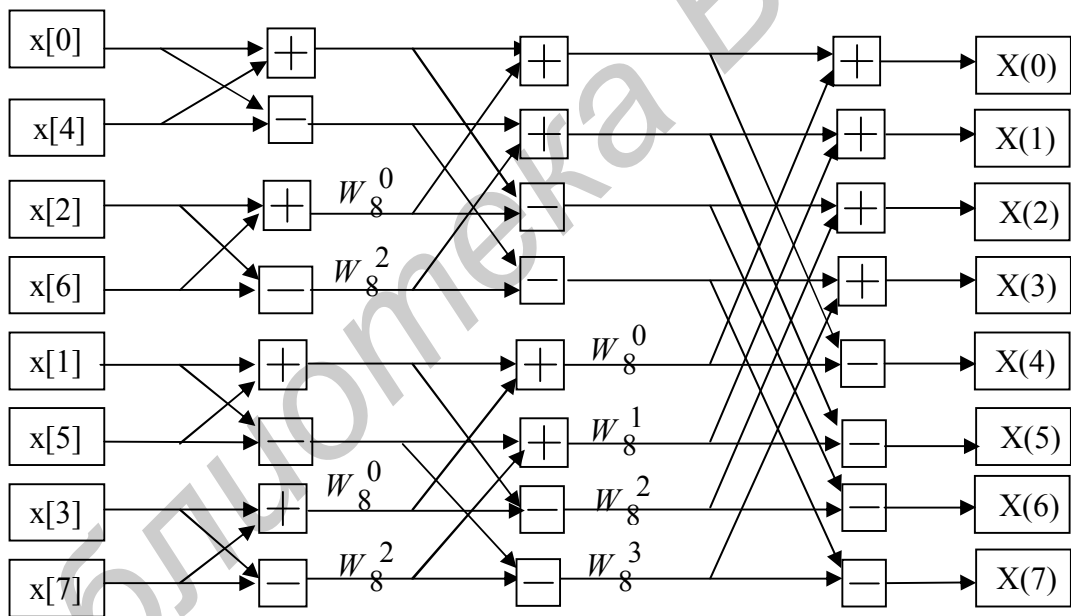


Рис. 3.2. Полный граф БПФ с прореживания по времени для  $N = 8$

Таким образом, последовательное применение метода к вычислению  $N$ -точечных ДПФ,  $N = 2^m$ , приводит к  $m = \log_2 N$  шагам, на каждом из которых  $2^i 2^{m-i}$ -точечные ДПФ сводятся к  $2^{i+1} 2^{m-i-1}$ -точечным ДПФ. На каждом шаге выполняется  $N$  сложений и не более  $N/2$  умножений на поворачивающие множители. Следовательно, сложность  $N$ -точечного ДПФ методом прореживания по времени составляет не более  $(N/2)\log_2 N$  операций комплексного умножения и  $(N\log_2 N)$  операций комплексного сложения. Если учесть все тривиальные умножения на поворачивающие множители, то вычислительные затраты будут еще меньше.

*Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.* В алгоритме прореживания по частоте исходная последовательность разбивается на две подпоследовательности: одна состоит из всех первых  $N/2$  отсчетов, другая – из  $N/2$  последних отсчетов. Выражение для ДПФ принимает вид

$$\text{ДПФ}_N(k, x) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}. \quad (3.5)$$

Для второй суммы применим постановку  $n = n + N/2$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + x\left[n + \frac{N}{2}\right] e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(n + \frac{N}{2}\right)} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x[n] + e^{-j\pi k} x\left[n + \frac{N}{2}\right] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}. \end{aligned}$$

Для четных  $k = 2k'$  и нечетных  $k = 2k'+1$ ,  $k' = 0, \dots, N/2 - 1$  индексов коэффициентов преобразования получаем:

– для четных значений  $k$

$$\text{ДПФ}_N(k, x) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] (-1)^{2k'} \right\} e^{-j\frac{2\pi k'n}{N}} = \text{ДПФ}_{\frac{N}{2}}(k', x) = \quad (3.6)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\} e^{-j\frac{2\pi k'n}{N}};$$

– для нечетных значений  $k$ :

$$\begin{aligned} \text{ДПФ}_N(k, x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] (-1)^{2k'+1} \right\} e^{-j \frac{2\pi n}{N} (2k'+1)} = \text{ДПФ}_{\frac{N}{2}}(k', x) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left( x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) e^{-j \frac{2\pi n}{N/2}} \right\} e^{-j \frac{2\pi n k'}{2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На втором шаге данная процедура применяется для замены двух  $N/2$ -точечных ДПФ на четыре  $N/4$ -точечные ДПФ, что требует  $N/2$  умножений на  $W^k$  и  $N$  сложений. Далее расщепляются блоки  $N/4$ -точечных ДПФ и т.д. Процедура расщепления продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. На каждом шаге происходит разделение данных на две части, содержащих первую и последнюю половинки обрабатываемой части соответственно. В итоге это приводит к тому, что отсчеты выходной последовательности спектральных коэффициентов будут переставлены по закону инверсии двоичного кода индекса.

Вычислительная сложность алгоритма такая же, как и у алгоритма с прореживанием по времени.

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для  $N = 8$  показан на рис. 3.3.

Метод с прореживанием по частоте не требует предварительной перестановки входных отсчетов. Эта особенность может быть использована для организации конвейерной обработки данных, что особенно удобно для спектральной обработки сигналов в реальном масштабе времени (рис. 3.4).

### 3.3. Дискретное преобразование Фурье на основе алгоритмов свертки и корреляции

Рассмотрим алгоритм вычисления ДПФ, используя операцию корреляции. Воспользуемся тождеством

$$nk = \frac{1}{2}(n^2 + k^2 - (n-k)^2). \quad (3.8)$$

Выражение для ДПФ примет вид

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \alpha^{nk} = \alpha^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{\frac{n^2}{2}} x[n] \alpha^{-\frac{(n-k)^2}{2}}. \quad (3.9)$$

Произведем замену переменных:

$$G(k) = \alpha^{\frac{k^2}{2}} X(k), \quad g[n] = \alpha^{\frac{n^2}{2}} x[n], \quad h_{n-k} = \alpha^{-\frac{(n-k)^2}{2}}.$$



Тогда задача ДПФ сводится к вычислению

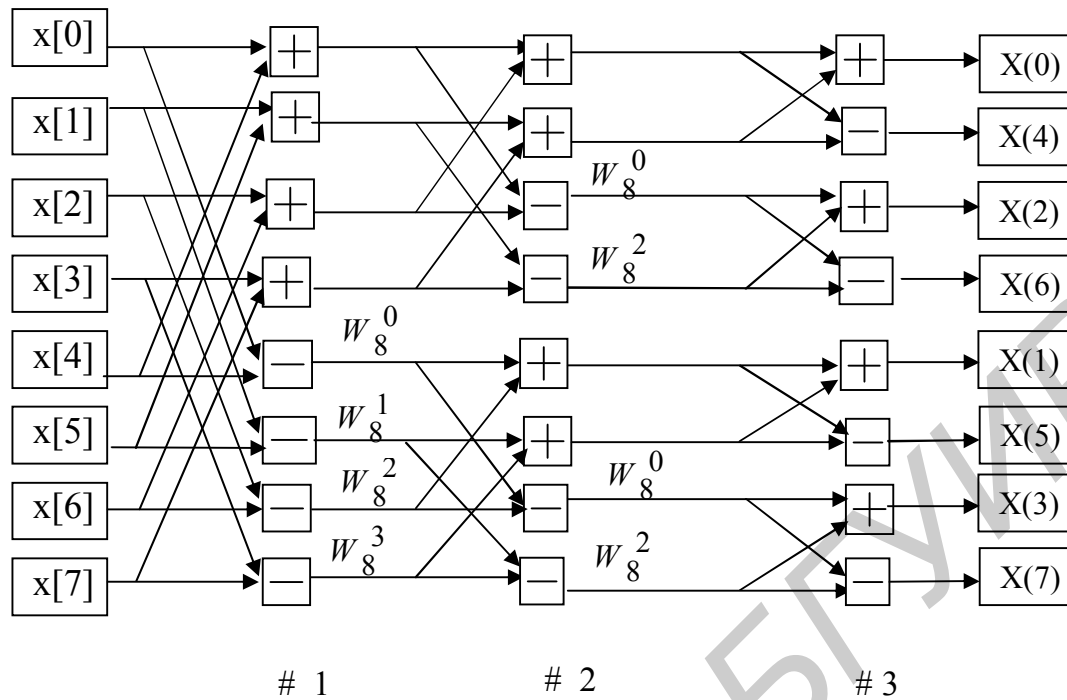


Рис. 3.3. Граф БПФ с прореживанием по частоте для  $N = 8$

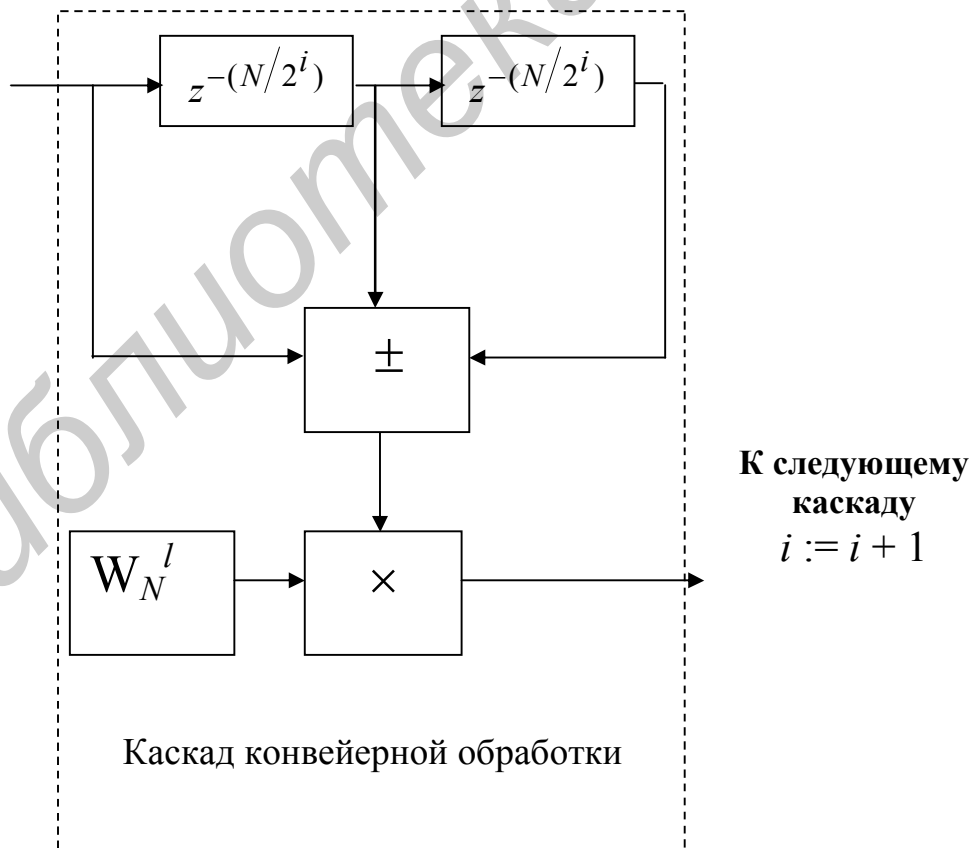


Рис. 3.4. Каскад конвейерной обработки БПФ

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ \vdots \\ G(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{N-1} \\ h_1 & h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ \vdots \\ g[N-1] \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Полученная матрица носит название теплицевой (все ее диагонали содержат одинаковые элементы). Расширим полученную матрицу до  $2N - 2$  циркулянтной, все строки которой являются циклическими сдвигами друг друга.

Например, матрица размером  $6 \times 6$  может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Умножение на такую матрицу эквивалентно вычислению циклической корреляции. Действительно, выражение для функции периодической взаимной корреляции двух действительных последовательностей  $\{s[n]\}$  и  $x[n]$  равной длины имеет вид

$$r(n) = \sum_{l=0}^{N-1} s[l]x[n+l], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s[0] & s[1] & \cdots & s[N-1] \\ s[N-1] & s[0] & \cdots & s[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s[1] & s[2] & \cdots & s[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, задача вычисления ДПФ свелась к вычислению циклической корреляции дополненного нулями преобразованного входного вектора  $\mathbf{g}$  с фиксированной последовательностью  $\mathbf{h}$ , отбрасыванию лишних компонент полученного вектора и делению их на соответствующие константы.

*Пример.* Вычислить ДПФ последовательности  $\mathbf{x} = [1, 1, -1]^T$  с помощью алгоритма корреляции.

*Решение.* Вычислим ДПФ прямым путем с помощью умножения матрицы ДЭФ  $\mathbf{F}_3$  на вектор  $\mathbf{x}$ . Матрица 3-точечного ДПФ имеет вид

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Спектр ДПФ равен

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_3 \mathbf{x} = [1, (1 - j\sqrt{3}), (1 + j\sqrt{3})]^T.$$

Применив алгоритм корреляции, получим тот же результат. Образует вектор  $\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2, h_1]^T$ , где  $h_i = \alpha^{\frac{i^2}{2}}$ ,  $\alpha = \exp(-j\frac{2\pi}{3})$ :

$$\mathbf{h} = [1, (\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})]^T.$$

Вычислим спектр сопряженного 4-точечного ДПФ вектора  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^* \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Образуем вектор  $\mathbf{g} = [g_0, g_1, g_2, g_3]^T$ , где  $g[n] = \alpha^{\frac{n^2}{2}} x[n]$ ,  $n = 0, 1, 2$  и  $g_3 = 0$ :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Вычислим спектр 4-точечного ДПФ вектора  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{F}_4 \mathbf{g} = \begin{bmatrix} (2 - j\sqrt{3}) & \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} - j\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) & 1 & \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + j\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}^T.$$

Перемножим одноименные элементы векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}_1$  и получим вектор  $\mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [H(i)G_1(i); i = 0, 1, 2, 3]^T = \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{9}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\right) & \left(-\frac{1}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\right) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Вычислим обратное ДПФ вектора  $\mathbf{P}$  и получим значения  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_4^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{4} \mathbf{F}_4^* \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & (1 - j\sqrt{3}) & \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}^T.$$

Разделим вычисленные значения  $G(0)$ ,  $G(1)$ ,  $G(2)$  на  $\alpha^{\frac{k^2}{2}}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , соответственно и получим окончательный результат:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{G(k)}{\exp(-j\frac{2\pi}{3}(\frac{k^2}{2}))} \end{bmatrix} = [1, (1 - j\sqrt{3}), (1 + j\sqrt{3})]^T.$$

*Алгоритм ЛЧМ-Z преобразования.* Алгоритм позволяет эффективно вычислить Z-преобразование последовательности  $\{x[n]\}$ . Действительно, пусть  $N$ -точечная последовательность  $\{x[n]\}$  имеет образ Z-преобразования:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n}. \quad (3.11)$$

ДПФ заданной последовательности связано с ее Z-преобразованием выражением:

$$X(k) = X(z) \Big|_{z = \exp(j(2\pi/N)k)}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3.12)$$

Зададим контур преобразования общего вида

$$z_k = AW^{-k}, \quad A = A_0 e^{j2\pi\theta_0}, \quad W = W_0 e^{j2\pi\varphi_0}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (3.13)$$

где  $A$  и  $W$  – произвольные комплексные числа, а  $M$  – произвольное целое число (необязательно равное  $N$ ).

Обозначим через  $X_k$  искомые значения Z-преобразования при  $z = z_k$ :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A^{-n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Подстановка в эту формулу выражения для произведения  $nk$  дает

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] A^{-n} W^{\frac{[n^2+k^2-(k-n)^2]}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] A^{-n} W^{\frac{[n^2]}{2}}] (W^{\frac{k^2}{2}}) W^{\frac{-(k-n)^2}{2}}$$

или

$$X_k = W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] h[k-n], \quad (3.14)$$

где  $s[n] = x[n] A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}$ ,  $h[n] = W^{\frac{n^2}{2}}$ .

Взвешенная свертка может быть вычислена с использованием ДПФ (рис. 3.5). Сложность вычислений при  $L = 2^m$  имеет логарифмическую зависимость.

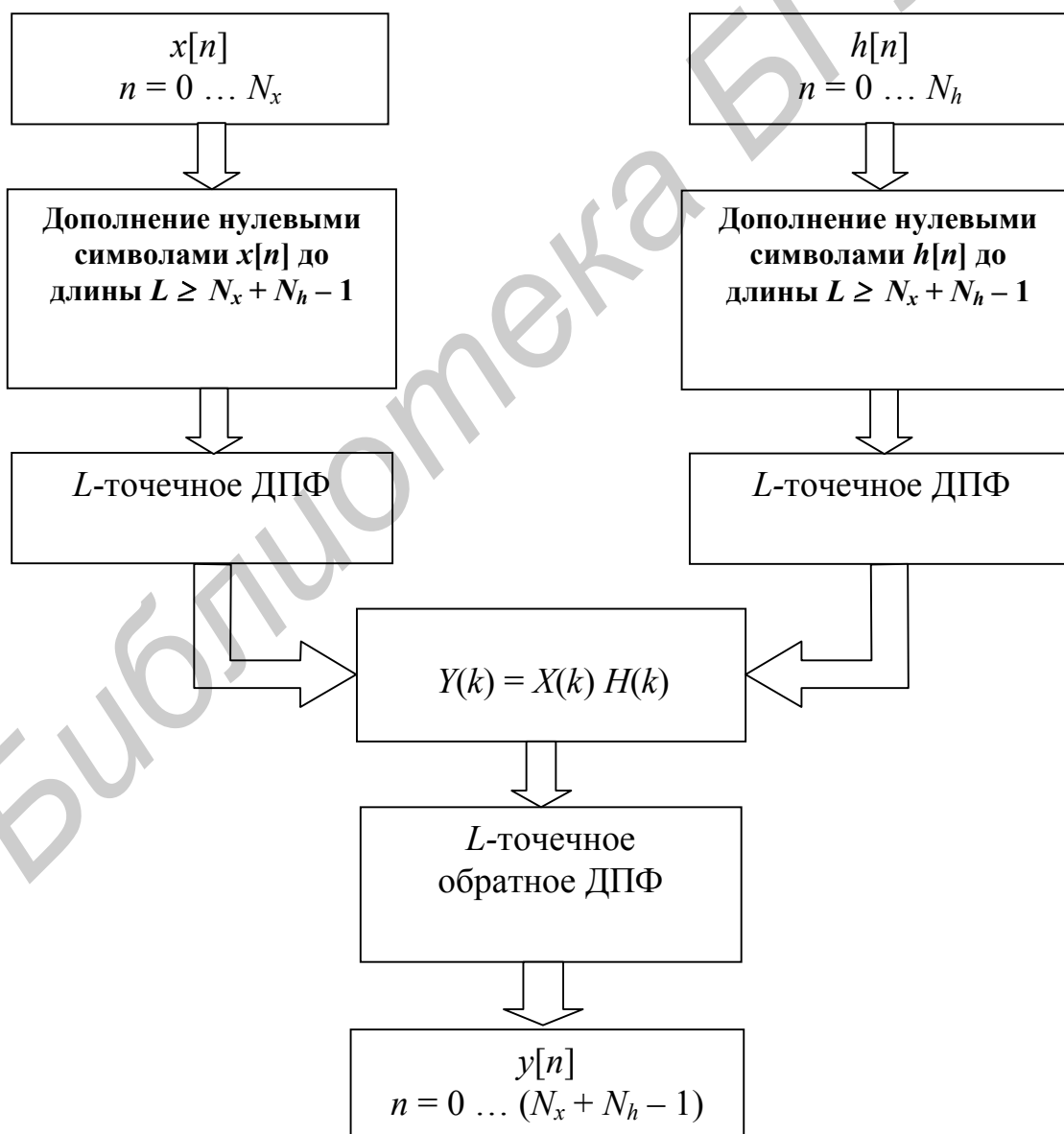


Рис. 3.5. Вычисление свертки с помощью ДПФ

### 3.4. Быстрое преобразование Фурье, полиномиальное представление

ДПФ вектора-реализации  $\mathbf{x}$  по прямому алгоритму имеет оценку сложности вычислений  $O(N^2)$  в предположении, что каждая арифметическая операция выполняется за один шаг.

Рассмотрим алгебраический подход к построению быстрого алгоритма ДПФ. Воспользуемся возможным подобием между частями тех сумм, которые порождаются процессом умножения матрицы ДЭФ на вектор.

*Определение.* Элемент  $W$  из произвольного коммутативного кольца  $K = \langle K, +, \times, 0, 1 \rangle$ , обладающий свойством

$$W \neq 1; \quad W^N = 1; \\ \sum_{i=0}^{N-1} W^{ip} = 0, \quad 1 \leq p < N,$$

является примитивным корнем  $N$ -й степени из единицы.

*Пример.*  $W = \exp(j \frac{2\pi}{N})$ ,  $j = \sqrt{-1}$  является примитивным корнем из единицы в поле (кольце)  $\mathbb{C}$  (комплексных чисел).

Значения  $W^0, W^1, \dots, W^{N-1}$ , принимающие значения в мультипликативной группе кольца  $K$ , суть характеры циклической абелевой группы порядка  $N$ , на которой определено преобразование Фурье. Отсюда вытекают следующие возможности представления процесса вычисления ДПФ.

#### 1. Вычисление ДПФ вектора отсчетов

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$$

эквивалентно вычислению полинома

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]z^i$$

в точках  $z = W^0, W^1, \dots, W^{N-1}$ .

2. Вычисление  $p(z)$  в точке  $z = a$  равносильно нахождению остатка от деления  $p(z)$  на  $(z - a)$ .

*Доказательство.* Запишем полином в виде

$$p(z) = (z - a)q(z) + c,$$

где  $c$  – постоянная. Тогда  $p(a) = c$ .

Таким образом, вычисление ДПФ сводится к нахождению остатка от деления полинома

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]z^i$$

степени  $(N - 1)$  на каждый из полиномов:

$$(z - W^0), (z - W^1), \dots, (z - W^{N-1}).$$

Метод последовательного деления полинома  $p(z)$  на каждый полином  $(z - W^i)$  имеет  $O(N^2)$ . Полиномы  $(z - W^i)$  попарно взаимно просты, а их произведение равно  $z^N - 1$ .

В случае  $N = 2^m$  можно воспользоваться следующим приемом.

Поскольку

$$W^{\frac{N}{2}} \equiv -1 \pmod{M},$$

имеем

$$z^N - 1 = (z^{\frac{N}{2}} - 1)(z^{\frac{N}{2}} + 1) \equiv (z^{\frac{N}{2}} - 1)(z^{\frac{N}{2}} - W^{\frac{N}{2}}) \pmod{M}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} z^{\frac{N}{2}} - 1 &= (z^{\frac{N}{4}} - 1)(z^{\frac{N}{4}} + 1) \equiv (z^{\frac{N}{4}} - 1)(z^{\frac{N}{4}} - W^{\frac{N}{2}}) \pmod{M}; \\ (z^{\frac{N}{4}} - W^{\frac{N}{2}}) &\equiv (z^{\frac{N}{4}} - W^{\frac{N}{4}})(z^{\frac{N}{4}} - W^{\frac{3N}{4}}) \pmod{M} \end{aligned}$$

и т. д., пока в правой части не получатся полиномы первой степени  $(z - W^i)$ .

Этот процесс можно описать деревом высоты  $n$ , где полином  $z^N - 1$  является корнем, а линейные полиномы  $(z - W^i)$  – листьями. Из каждой вершины, не являющейся листом, выходят два ребра, соответствующие разложению на два сомножителя.

Теперь для вычисления остатка от деления полинома  $p(z)$  на каждый из полиномов  $(z - W^0)$ ,  $(z - W^1)$ , ...,  $(z - W^N)$  сначала делим  $p(z)$  с остатком на полиномы  $(z^{\frac{N}{2}} - 1)$  и  $(z^{\frac{N}{2}} - W^{\frac{N}{2}})$ , каждый из полученных остатков делим с остатком на полиномы вида  $(z^{\frac{N}{4}} - W^{\frac{N}{4}})$  и т. д.

Для вычисления остатка от деления произвольного полинома, имеющего степень  $2t - 1$  на полином  $(z^t - c)$ , где  $c$  – некоторая константа, требуется  $O(t)$  элементарных операций.

Пусть  $N = 2^n$ ,  $W$  – примитивный корень степени  $N$  из единицы. Определим  $(d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0)_2$  – двоичное представление целого числа  $j$ ,  $0 \leq j < 2^n$ ,

$j = \sum_{i=0}^{n-1} d_i 2^i$ , а также  $\text{rev}(j)$  – целое число с инверсным двоичным представлением  $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})_2$ .

Тогда справедливо соотношение

$$\prod_{j=l}^{l+2^s-1} (z - W^{\text{rev}(j)}) \equiv z^{2^s} - W^{\text{rev}(l/2^s)} \pmod{M},$$

где  $0 \leq s \leq n$ , число  $l$  кратно  $2^s$ ,  $0 \leq l < n - 1$ .

Последнее соотношение задает порядок появления степеней  $i$  в полиномах вида  $(z^t - \omega^i)$  при составлении попарных произведений так, чтобы все произведения имели вид  $(z^{2^s} - \omega^i)$ .

### Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Вход: вектор  $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$ ,  $N = 2^n$ .

Выход: вектор  $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ , где  $X(i) = \sum_{j=0}^{N-1} x[j]W^{ij}$ .

#### Шаги алгоритма

1. Положить  $r_{0,n} \leftarrow \sum_{j=0}^{N-1} x[j]z^j$ .

2. Для  $s = n-1, n-2, \dots, 0$  выполнить следующие действия:

Положить  $t \leftarrow 0$ .

Пока  $t < N-1$ :

Представить полином  $r_{t,s+1}(z)$  в виде  $\sum_{j=0}^{2^{s+1}-1} x[j]z^j$ .

2.2.2. Положить  $e \leftarrow \text{rev}(t / 2^s)$ .

Положить  $r_{t,s}(z) \leftarrow \sum_{j=0}^{2^s-1} (x[j] + W^e x[j+2^s])z^j$ .

Положить  $r_{t+2^s,s}(z) \leftarrow \sum_{j=0}^{2^s-1} (x[j] + W^{\frac{e+N}{2}} x[j+2^s])z^j$ .

Положить  $t \leftarrow t + 2^{s+1}$  и вернуться на шаг 2.2.

3. Для  $i = 0, 1, \dots, N-1$  положить  $X(\text{rev}(i)) \leftarrow r_{i,0}$ .

4. Результат  $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ .

Сложность алгоритма равна  $O(N \log_2 N)$ .

### 3.5. Алгоритмы Горнера и Герцеля

В некоторых случаях требуется вычислить небольшое количество элементов вектора ДПФ. Предположим, необходимо найти компоненту

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\alpha^{nk} = f(\alpha^k).$$

*Алгоритм Горнера.* Значение одной компоненты преобразования Фурье можно вычислить по алгоритму Горнера, дающему один из способов вычисления многочлена в некоторой точке  $\beta$ :

$$f(\mu) = f_{N-1}\mu^{N-1} + f_{N-2}\mu^{N-2} + \dots + f_1\mu + f_0.$$

Применительно к ДПФ алгоритм Горнера строится следующим образом.

Полином  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W^{nk}$  представляется как

$$X(k) = x[0] + \underbrace{W^k (x[1] + x[2]W^k + \dots + x[N-1]W^{N-2})}_{\downarrow},$$



$$x[1] + W^k \underbrace{(x[2] + \dots + x[N-1]W^{N-3})}_\downarrow W,$$

$$x[2] + W^k \underbrace{(x[3] + \dots + x[N-1]W^{N-4})}_\vdots$$

или в рекурсивной форме

$$X(k) = x[0] + W^k (x[1] + W^k (x[2] + \dots + W^k (x[N-2] + W^k x[N-1]) + \dots)).$$

Базовая операция имеет вид  $(\alpha A + B)$ . Рекурсивная схема преобразования описывается передаточной функцией

$$F(z^{-1}) = \frac{1}{1 - Wz^{-1}}.$$

*Пример.* Пусть  $N = 7$ ,  $W = e^{-j\frac{2\pi}{7}}$ . Требуется вычислить ДПФ по схеме Горнера.

*Решение.* ДПФ в матричном виде запишется как

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^1 & W^3 & W^5 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^2 & W^5 & W^1 & W^4 \\ W^0 & W^4 & W^1 & W^5 & W^2 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^5 & W^3 & W^1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[5] \\ x[6] \end{bmatrix}.$$

Используя схему вычисления Горнера, получаем

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[6] & x[5] & x[4] & x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \\ x[3] & x[6] & x[2] & x[5] & x[1] & x[4] & x[0] \\ x[2] & x[4] & x[6] & x[1] & x[3] & x[5] & x[0] \\ x[5] & x[3] & x[1] & x[6] & x[4] & x[2] & x[0] \\ x[4] & x[1] & x[5] & x[2] & x[6] & x[3] & x[0] \\ x[1] & x[2] & x[3] & x[4] & x[5] & x[6] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^6 \\ W^5 \\ W^4 \\ W^3 \\ W^2 \\ W^1 \\ W^0 \end{bmatrix},$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

В общем случае

$$X(r) = \sum_{n=0}^{N-1} x[nr^*]W^n, \quad 1 \leq r \leq N-1,$$

где  $rr^* = 1 \pmod{N}$ ,  $r^*$  – обратное число.

Алгоритм требует  $(N - 1)$  сложений и  $(N - 1)$  умножений в поле элемента  $\alpha$ . Преимущество алгоритма Горнера состоит в том, что он не требует предварительного вычисления и запоминания степеней.

*Алгоритм Герцеля.* Построим многочлен  $\psi(\mu)$  минимальной степени с вычислительно простыми коэффициентами, имеющий  $\alpha^k$  своим корнем. В случае ДПФ этот многочлен имеет вид

$$\psi(\mu) = (\mu - \alpha^k)(\mu - \alpha^{-k}) = \mu^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\mu + 1.$$

Для конечных полей воспользуемся минимальным многочленом элемента  $\alpha^k$ . Пусть  $f(\mu) = Q(\mu)\psi(\mu) + r(\mu)$ . Очевидно, что  $r(\alpha^k) = f(\alpha^k)$ . Вычисление остатка от деления можно реализовать с помощью авторегрессионного фильтра.

Рассмотрим реализацию алгоритма в комплексном поле. Алгоритм Герцеля реализует в этом случае комплексный резонатор – БИХ-фильтр 2-го порядка – и вычисляет значение единственного бина ДПФ.

Выходной сигнал фильтра равен отсчету ДПФ  $X(k)$  в момент времени  $n = N$ , если индекс первого отсчета  $n = 0$ . Передаточная функция фильтра Герцеля имеет вид

$$F(z^{-1}) = \frac{\left(1 - e^{\frac{-j2\pi k}{N}} z^{-1}\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)z^{-1} + z^{-2}} = \frac{(1 - \alpha z^{-1}) + j\beta z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}.$$

Фильтр Герцеля имеет следующие параметры:

- единственный ноль расположен в точке  $z = e^{\frac{-j2\pi k}{N}}$ ;
- комплексно-сопряженные полюса – в точках  $z = e^{\frac{\pm j2\pi k}{N}}$ ;
- ноль и один полюс взаимно уничтожаются.

Схема фильтра Герцеля приведена на рис. 3.6. Схема обрабатывает блоки отсчетов сигнала длиной  $(N + 1)$ . Внутренние регистры данных обнуляются в начале обработки каждого нового блока данных. Частотная характеристика

фильтра содержит резонансный пик на относительной частоте  $\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ . Импульсная

характеристика фильтра равна  $h[n] = e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$  и имеет бесконечную длительность.

Разностные уравнения, описывающие работу фильтра, имеют вид

$$s[n] = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)s[n-1] - s[n-2] + x[n], \quad (3.15)$$

$$y[n] = s[n] - \exp\left(\frac{-2\pi k}{N}\right)s[n-1]. \quad (3.16)$$

Причем уравнение (3.15) выполняется  $N$  раз, а уравнение (3.16) вычисляется один раз при подаче на вход  $N$ -го отсчета. Вычислительные затраты составляют  $(N + 2)$  действительных умножений и  $(2N + 1)$  действительных сложений.

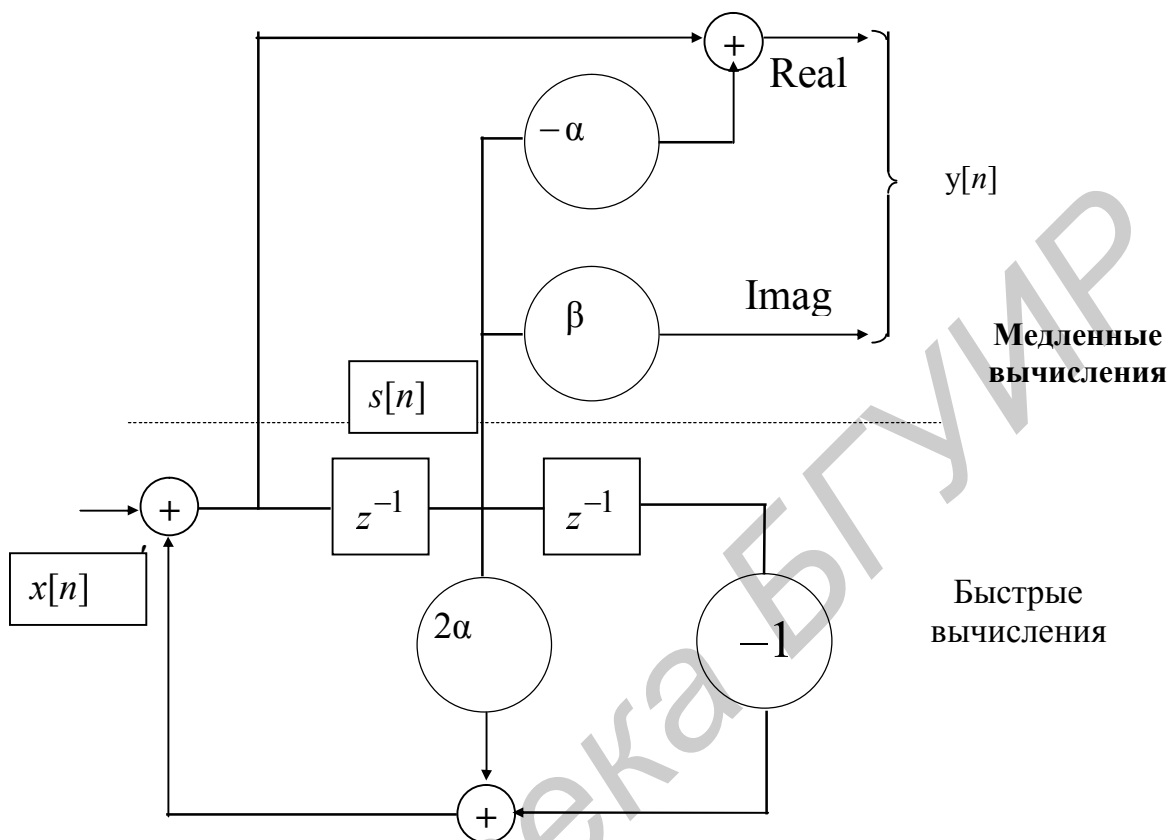


Рис. 3.6. Схема фильтра Герцеля

### 3.6. Контрольные вопросы и задачи

1. Вычислите с помощью алгоритмов БПФ линейные свертки последовательностей  $\mathbf{x} = [1, 2, -1]^T$  и  $\mathbf{h} = [1, -1, 1, 1]^T$ .
2. Запишите матрицы прямого и обратного ДПФ для  $N = 4, 16$ .
3. Сопоставьте вычислительную сложность преобразований Фурье, Уолша – Адамара.
4. Вычислите спектр последовательностей  $(1, 1, -1, -1)$ ,  $(1, -1, 1, 1)$ . Убедитесь в справедливости свойств ДПФ.
5. Вычислите спектр ДПФ действительной последовательности  $\mathbf{x} = [x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 2, x(3) = -1]^T$ . С помощью возможных алгоритмов обратного БПФ восстановите сигнал.
6. Синтезируйте структуру фильтра Герцеля на частоту 10 Гц.
7. Проведите сравнительный анализ алгоритмов БПФ в полиномиальном и обычном представлениях.

## 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

### 4.1. Спектральный анализ в одной точке

Задачу спектрального анализа можно рассматривать как задачу вычисления  $Z$ -преобразования модифицированного сигнала в некоторой области на  $Z$ -плоскости. Теоретически спектр можно измерять в любой точке  $z_1$  на  $Z$ -плоскости. При обработке на конечных интервалах обобщенный спектр сигнала  $x[n]$  можно определить как

$$S_n(z_1) = x[n] + x[n-1]z_1^{-1} + x[n-2]z_1^{-2} + \dots + x[n-N+1]z_1^{-(N-1)}$$

или

$$S_n(z_1) = \sum_{m=n-N+1}^n x[m]z_1^{-(n-m)},$$

где  $N$  – число отсчетов, по которым находится оценка спектра.

Если спектр сигнала изменяется во времени, приходится измерять  $S_n(z_1)$  для последовательности значений  $n$ , т. е.  $S_0(z_1)$ ,  $S_1(z_1)$ ,  $S_2(z_1)$  и т. д. Такой способ измерений называют скользящим спектральным измерением, при этом обеспечивается смещение временного окна на один отсчет вперед (содержащего  $N$  отсчетов) и повторение измерения.

Анализ приведенных выше формул показывает, что скользящее спектральное измерение в одной точке  $z = z_1$  эквивалентно обработке сигнала КИХ-фильтром с импульсной характеристикой в виде

$$h[n] = z_1^{-n}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Проанализировав выражения для последовательных спектральных измерений  $S_{n-1}(z_1)$  и  $S_n(z_1)$ , можно получить рекуррентную формулу:

$$S_n(z_1) = z_1^{-1}S_{n-1}(z_1) + x[n] - z_1^{-N}x[n-N].$$

### 4.2. Спектральный анализ с применением дискретного преобразования Фурье

На практике представляет интерес поведение спектра в некоторой заданной большой совокупности точек на  $Z$ -плоскости. Если точки измерения имеют равномерное распределение, то измерения такого типа соответствуют вычислению ДПФ конечной последовательности.

Предположим, что все точки равномерно распределены по окружности радиусом  $r$ . Спектральное измерение можно представить как

$$S(re^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\{x[n]r^{-n}\}}_{\hat{x}[n]} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Такое преобразование соответствует ДПФ последовательности  $\hat{x}[n] = x[n]r^{-n}$ , поэтому спектральный анализ сводится к предварительному умножению массива сигнала на  $r^{-n}$  и последующему выполнению ДПФ (БПФ).

*Характеристики спектрального анализа.*

Двумя наиболее важными характеристиками спектрального анализа являются:

- 1) количество частот, на которых желательно измерять спектр;
- 2) разрешающая способность измерения спектра.

Для анализа обеих характеристик удобно использовать фильтрационную модель спектрального анализа.

*Пример.* Необходимо найти спектр сигнала в  $N$  точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Число отсчетов сигнала, используемых при измерениях, также равно  $N$ .

*Решение.* Спектральный анализ, удовлетворяющий этим условиям, может быть выполнен двумя эквивалентными способами: либо с помощью  $N$ -точечного ДПФ, либо с помощью гребенки из  $N$  фильтров (рис. 4.1). Импульсная характеристика  $k$ -го фильтра, обеспечивающего измерение спектра в точке

$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ , равна

$$h[n] = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

$Z$ -преобразование импульсной характеристики имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}.$$

Вычислив значения  $H(z)$  на единичной окружности, получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{j\frac{\pi k}{N}} f_N(\omega, k).$$

Скользящее ДПФ эквивалентно довольно грубому набору фильтров с относительно большими боковыми лепестками и существенным перекрытием между соседними каналами-фильтрами.

Для увеличения разрешающей способности введем избыточность в процесс измерений и осуществим дискретизацию в частотной области. Предположим теперь, что число отсчетов сигнала  $L$  больше числа спектральных коэффициентов  $N$ . Пусть в общем случае

$$L = NM,$$

где  $N$  – требуемое число спектральных коэффициентов, а  $M$  – целое число больше единицы.

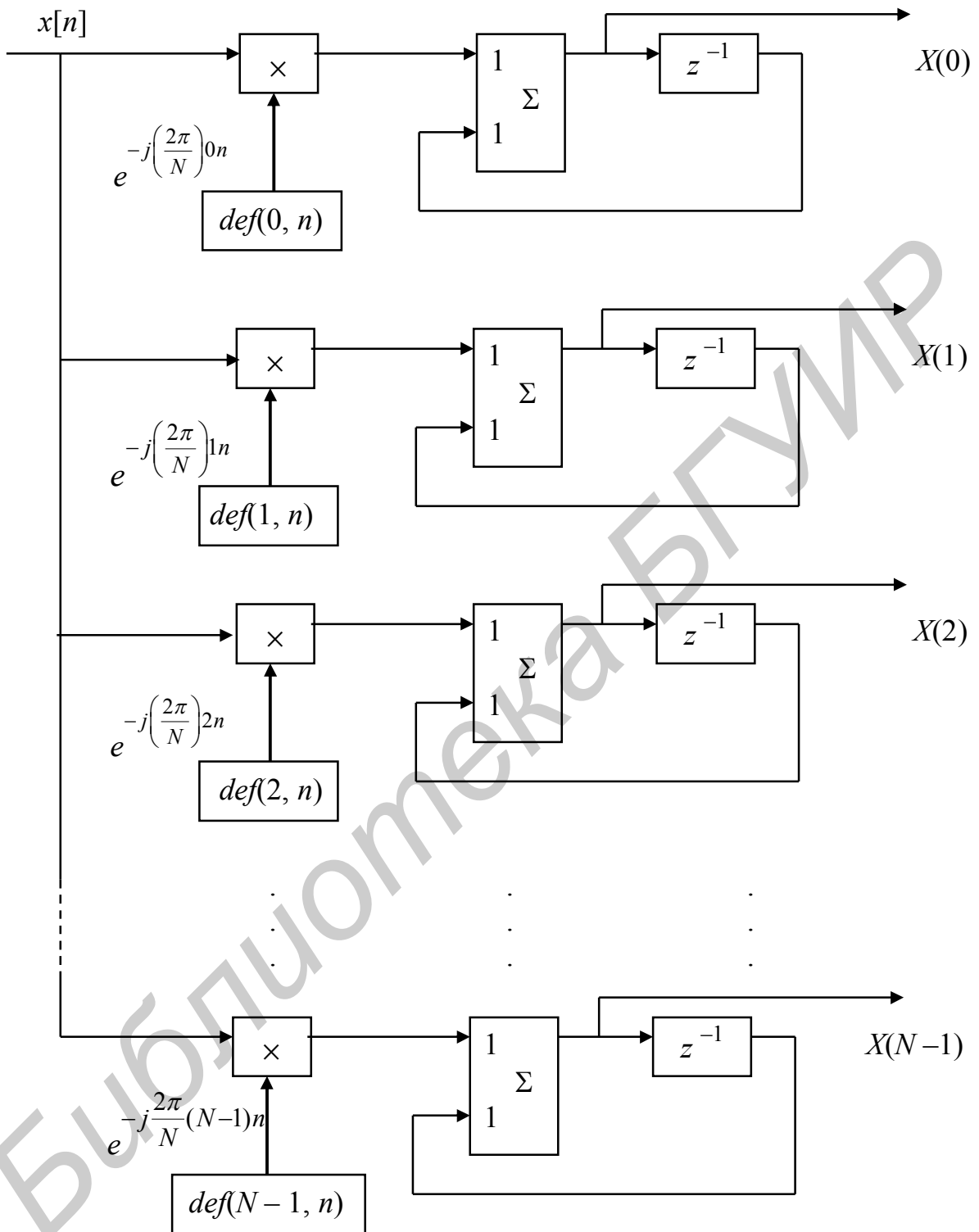


Рис. 4.1. Модель спектра-анализатора ДПФ

ДПФ с предварительным накоплением можно записать в следующем виде:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} x[n+mN] \right\} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Из формулы следует, что при вычислении спектра производится предварительное суммирование входных отсчетов, равноотстоящих друг от друга на  $N$  точек, после чего вычисляется ДПФ образованной новой последовательности. Напомним, что согласно свойствам ДПФ дискретизации в частотной области соответствует наложение во времени во временной области.

### 4.3. Использование весовых окон при спектральном анализе

Модель измерения спектра, определяемого через Z-преобразование, предполагает использование одного фильтра или гребенки фильтров с заданным спектральным разрешением. Изменяя параметры фильтра, можно изменять его эффективную полосу, чтобы, например, подавить нежелательный шум и сигналы вне полосы пропускания. Ответ на вопрос, каким образом можно изменять форму частотной характеристики фильтра, дает понятие весовой последовательности (окна)  $w[n]$ . Заданная последовательность отсчетов почленно умножается на значения весовой функции так, что спектр сигнала становится равным

$$S_n(z_1) = \sum_{m=n-N+1}^n x[m]w[n-m]z_1^{-(n-m)}.$$

С точки зрения вычислений использование окна наиболее удобно, когда выполняется полный спектральный анализ с применением ДПФ. Преобразование с весовой функцией часто называют взвешенным ДПФ и записывают в виде

$$X(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[l-n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (4.1)$$

Выбор формы окна зависит от решаемой задачи. Так, если фильтры анализатора спектра должны обеспечить сразу два различных разрешения, то проще всего дважды находить ДПФ, используя различные окна.

Особый интерес вызывает метод, основанный на эквивалентности умножения во временной области и свертке в частотной области. Тогда, например, умножение на весовую функцию можно заменить взвешенным суммированием нескольких соседних (по частоте) значений спектральных коэффициентов.

*Кратковременное дискретное преобразование Фурье.* В задачах спектрального анализа нестационарных сигналов используется так называемое кратковременное преобразование Фурье (КПФ):

$$X_{\text{КПФ}}(e^{j\omega}, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-j\omega m}, \quad (4.2)$$

где  $w[n]$  – весовая последовательность. КПФ зависит от двух параметров: целочисленного временного индекса  $n$  и значения непрерывной частоты  $\omega$ . КПФ является периодической функцией с периодом  $2\pi$ . Модуль  $|X_{\text{КПФ}}(e^{j\omega}, n)|$  часто называют *спектрограммой*.

Дискретизация КПФ в частотной области в точках  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$  приводит к дискретному кратковременному преобразованию Фурье, которое можно трактовать как  $R$ -точечное ДПФ функции  $(x[n-m]w[m])$ ,  $N \geq R$ :

$$X_{\text{КПФ}}(k, n) = X_{\text{STFT}}\left(e^{j\omega}, n\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{m=0}^{R-1} x[n-m]w[m]e^{\frac{2\pi km}{N}}, \quad (4.3)$$

$$0 \leq k \leq N-1, \quad N \geq R.$$

При равенстве размеров ДПФ и массива анализируемых данных  $N = R$  получаем *взвешенное ДПФ*:

$$X_{\text{ВДПФ}}(k, m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[m-n]W_N^{nk}. \quad (4.4)$$

#### 4.4. Спектральный анализ стационарных гармонических сигналов

Для спектрального анализа таких сигналов может быть использовано дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

На практике используется взвешенная последовательность  $g[n] = x[n]w[n]$ , которая определяется как произведение дискретного сигнала  $x[n]$  на весовую функцию  $w[n]$  на конечном интервале  $N$ . В качестве оценки спектра  $X(e^{j\omega})$

берется спектр взвешенной последовательности  $G(e^{j\omega})$ ,  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ , который вычисляется в общем случае с помощью  $R$ -точечного ДПФ (БПФ):

$$G(e^{j\omega}, l) = \sum_{n=0}^R x[n]w[l-n]e^{-j\omega n}.$$

Переход к дискретным частотам осуществляется в точках  $R = N$ :

$$G(k) = G(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Дискретные частоты  $\omega_k$  связаны с номером отсчета ДПФ соотношением

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (4.5)$$



При этом номер  $k$  коэффициента ДПФ связан с частотой сигнала  $f_c$  и частотой дискретизации  $f_\partial$  соотношением

$$k = \frac{f_c}{f_\partial} N. \quad (4.6)$$

Выход канала ДПФ  $G(k)$  совпадает с выходом нерекурсивного фильтра с импульсной характеристикой, отвечающей условию

$$h[N-1-m] = w[m] e^{-j\omega_k m T_\partial} \quad \text{или} \quad h[m] = w[N-1-m] e^{-j\omega_k (N-1-m) T_\partial}.$$

Такой фильтр имеет частотную характеристику

$$H(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)T_\partial} W^*[j(\omega - \omega_k)],$$

являющуюся комплексно-сопряженной частотной характеристикой весовой функции  $W^*(j\omega)$ , смещенной вправо (или влево) к частоте  $\omega_k$ .

Для анализатора с прямоугольной весовой функцией

$$H(j\omega_k, \omega) = e^{-j\omega(N-1)T_\partial/2} \frac{\sin[(\omega - \omega_k)NT_\partial/2]}{\sin[(\omega - \omega_k)T_\partial/2]}.$$

Частотная характеристика имеет главный лепесток шириной  $\Delta = \frac{4\pi}{2M+1}$  с относительным уровнем максимального бокового лепестка  $\delta_{\text{бл}} = -13,6$  дБ.

Однозначное разрешение комплексного гармонического сигнала имеет место только на частотах, совпадающих с частотами анализа ДПФ, когда в интервале анализа укладывается целое число периодов сигнала. В этом случае сигнал присутствует только на выходе одного канала или проецируется на один бин ДПФ.

На сигналы с частотой, не равной  $\omega_k$ , откликаются два соседних канала на уровне главных лепестков их частотных характеристик, а на уровне боковых лепестков откликаются все каналы ДПФ. Это явление называют размыванием спектра или *эффектом просачивания* (рис. 4.2).

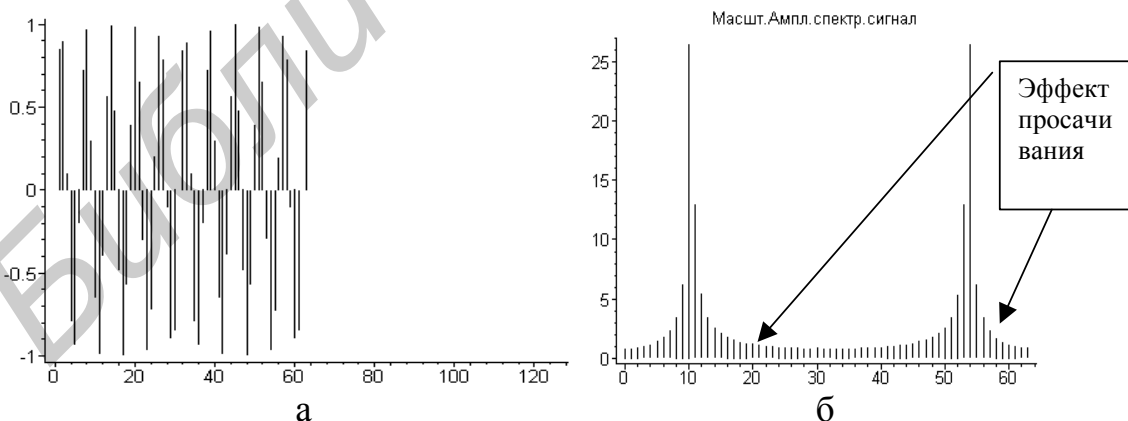


Рис. 4.2. Эффект просачивания в спектре ДПФ гармонического сигнала: а – вид гармонического сигнала; б – спектр ДПФ (без весового окна)

*Пример.* Предположим, что требуется оценить спектр сигнала  $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , на частотах  $f_{0,1} = 10$  Гц и  $f_{0,2} = 11$  Гц. Обработка сигнала осуществляется с помощью ДПФ  $N = 32$ , частота дискретизации  $f_\partial = 64$  кГц.

*Решение.* Представим сигнал в виде

$$x[n] = \frac{1}{2} \left( e^{j(\omega_0 n + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi)} \right).$$

Дискретное во времени преобразование Фурье дает

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi l) + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi l).$$

Усреднение по фазе дает спектр

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j(\omega-\varphi)}) d\varphi,$$

который представляет собой сдвиг на  $2\pi(f_0/f_\partial)$  частотной характеристики весового окна  $H(e^{j\omega})$  с учетом масштабирующего множителя.

При введении прямоугольного окна  $h[n]$  образуется сигнал на конечном интервале  $g[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ . Введем коэффициент  $k = (f_0/f_\partial)N$ , оценивающий кратность частот сигнала и процесса дискретизации на интервале анализа.

Пусть частота сигнала  $f_{0,1} = 10$  Гц. Тогда

$$k = (f_{0,1}/f_\partial)N = (10/64)32 = 5.$$

Спектр ДПФ будет содержать два отличных от нуля коэффициента  $X(5)$  и  $X(32 - 5 = 27)$ .

Если частота сигнала  $f_{0,2} = 11$  Гц, то при таких же условиях получаем

$$k = (f_{0,2}/f_\partial)N = (11/64)32 = 5,5.$$

Спектральная составляющая дискретного во времени преобразования Фурье для частоты  $f_{0,2} = 11$  Гц будет располагаться между коэффициентами спектра ДПФ с номерами  $k = 5$  и  $k = 6$ . Происходит размытие спектра сигнала на выходе спектра-анализатора.

В частотном диапазоне  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  это проявляется в виде двух пиков на частотах  $0,344\pi$  и  $2\pi(1 - 11/64) = 1,656\pi$ .

*Влияние весовой функции.* Высокий уровень боковых лепестков и обусловленное им сильное влияние каналов анализатора спектра являются основным недостатком прямоугольной весовой функции. Эти недостатки преодолеваются с помощью специальных весовых функций (окон), имеющих меньший уровень боковых лепестков (рис. 4.3).

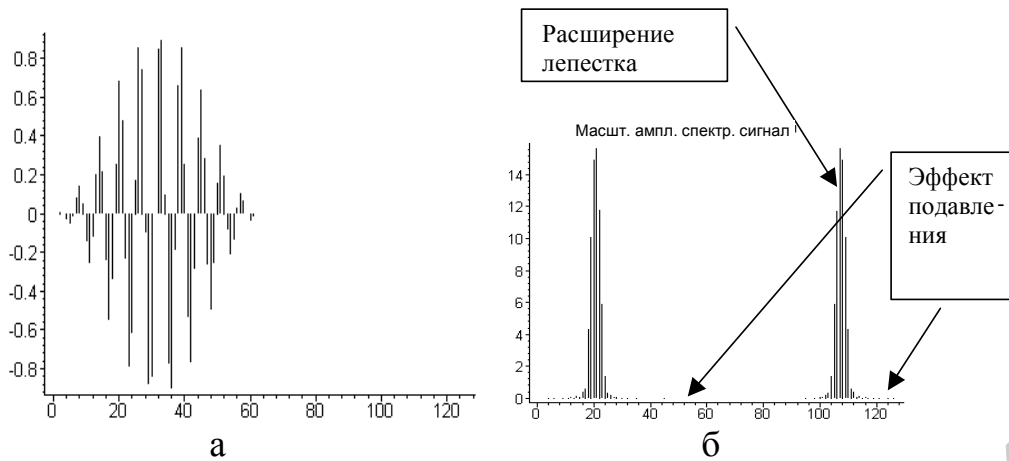


Рис. 4.3. Влияние весового окна на спектр ДПФ:

а – последовательность отсчетов, промодулированная весовой функцией Хэмминга; б – спектр ДПФ взвешенного сигнала

Воздействие окна на массив данных (как мультипликативной весовой функции) состоит в уменьшении порядка разрыва на границе периодического продолжения. Этого добиваются согласованием на границе как можно большего числа производных взвешенных данных. Проще всего обеспечить такое согласование, сделав эти производные равными или по крайней мере близкими к нулю. Таким образом, вблизи границ интервала взвешенные данные плавно стремятся к нулю так, что периодическое продолжение сигнала оказывается непрерывным вплоть до производных высших порядков.

Можно считать, что окно мультипликативно воздействует на базисное множество так, чтобы сигнал произвольной частоты имел значительные проекции только на те базисные векторы, частоты которых близки к частоте сигнала. Оба подхода ведут, конечно, к одинаковым результатам.

Наиболее известны весовые функции:

– Хэмминга:  $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N}$ ,  $\delta_{\text{обл}} = -43$  дБ,  $\Delta = 8 \frac{\pi}{N}$ ;

– Блэкмана:  $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{2\pi n}{N}$ ,  $\delta_{\text{обл}} = -58$  дБ;

– окно Кайзера:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{\frac{1}{2}}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $I_0(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя первого типа нулевого порядка;  $\alpha = \frac{M}{2}$ ;  $(M + 1)$  – длина окна;  $\beta$  – параметр формы.

Применение окон приводит к расширению главного лепестка, тем самым ухудшает разрешающую способность в этой области. С другой стороны, увеличение времени анализа сигнала (числа точек ДПФ) повышает разрешающую способность анализатора спектра.

#### 4.5. Спектральный анализ на основе дискретного преобразования Фурье с дробными величинами

Одной из концепций обобщения ДПФ является спектральное преобразование с дробными величинами.

Пусть задана последовательность комплексных значений

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T.$$

Определим преобразование Фурье с дробными величинами как

$$G_k(\mathbf{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk\alpha}.$$

Параметр  $\alpha$  не ограничивается рациональными числами и может быть любым комплексным числом. Хотя данное преобразование определено для всех целых  $k$ , часто достаточно вычислить первые  $N$  значений,  $0 \leq k \leq N-1$ .

Обычные прямое и обратное ДПФ представляют собой частный случай дискретное преобразования Фурье с дробными величинами (ДПФДВ):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} = G_k(\mathbf{x}, \frac{1}{N}), \quad 0 \leq k < N;$$

$$X^{-1}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} G_k(\mathbf{x}, \frac{-1}{N}), \quad 0 \leq k < N.$$

Отметим, что дискретное преобразование Лапласа также может быть записано в терминах ДПФДВ.

Если  $\alpha$  – рациональное число, то ДПФДВ может быть выражено через ДПФ и БПФ. Положим  $\alpha = r/L$ , где  $r$  и  $L$  взаимно простые целые числа и выполняется неравенство  $L \geq N$ . Пусть  $p$  будет целое число, удовлетворяющее неравенству  $0 \leq p < L$ , и  $pr \equiv 1 \pmod{L}$ . Увеличим длину последовательности  $\mathbf{x}$  до длины  $L$ , заполнив недостающие позиции нулевыми символами. Тогда

$$G_k(\mathbf{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi nkr}{L}} = \sum_{n=0}^{L-1} x[pn] e^{\frac{-j2\pi(pn)}{L}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} x[pn] e^{\frac{-j2\pi nk}{L}} = F_k(\mathbf{y}), \quad 0 \leq k < L,$$

где вектор  $\mathbf{y}$  представляет собой последовательность из  $L$  символов  $\{y[n]\}$ , которые равны  $y[n] = x[pn \bmod L]$ .

*Возможные применения ДПФДВ.*

1. *Спектральный анализ, точная оценка частоты гармонического сигнала.*

Пусть последовательность  $\mathbf{x}$  состоит из  $N$  символов следующего вида:

$\{e^{j2\pi n\beta}, 0 \leq n < N\}$ , где  $\beta$  – неизвестная величина, не являющаяся целым числом. ДПФ последовательности  $\mathbf{x}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi n\beta}{N}} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi n(\beta-k)}{N}} = \\
&= \frac{1 - e^{j2\pi n(\beta-k)}}{1 - e^{\frac{j2\pi(\beta-k)}{N}}} = e^{\frac{j\pi(\beta-k)(N-1)}{N}} \frac{\sin[\pi(\beta-k)]}{\sin[\pi(\beta-k)/N]}, \quad 0 \leq k < N.
\end{aligned}$$

Для спектра ДПФ гармонического сигнала характерен эффект просачивания. В этом случае спектр содержит набор отличных от нуля коэффициентов, амплитуда которых быстро убывает с увеличением расстояния от частоты  $\beta$ .

В спектре сигнала имеются максимальные коэффициенты, что позволяет грубо оценить по ним неизвестную частоту  $\beta$ . Предположим, что это сделано и величина  $b$  – наибольшее целое меньше  $\beta$ . Отметим, что в присутствии шума погрешность оценки увеличивается.

Поставим задачу более точной оценки частоты сигнала. Применение ДПФДВ может значительно повысить точность оценки на интервале  $[b, b + 1]$ . Коэффициенты спектра, имеющие индексы  $k$  на интервале, начиная с  $[b, b + k\delta]$ , запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
X(b + k\delta) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi n(b+k\delta)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi nb}{N}} e^{\frac{-j2\pi nk\delta}{N}} = \\
&= G_k(\mathbf{y}, \delta/N), \quad 0 \leq k < N,
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{y} = x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}b}$ ,  $0 \leq n < N$ , величина  $\delta$  обычно берется равной  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , что соответствует случаю, когда в оценке частоты на интервале  $[b, b + 1]$  участвуют только  $\sqrt{N}$  первых значений ДПФДВ. Частота может быть оценена по наибольшему значению спектральной компоненты  $X(b + k\delta)$ . Точность оценки частоты  $\beta$  задается размером интервала  $[b, b + 1]$ .

Рассмотрим случай, когда значение индекса  $b$  приближается к дробной величине  $\beta$ . Определим соотношение  $\alpha = b / \beta$ , где  $\alpha \approx 1$ . Тогда можно записать выражение

$$X(k) = \sum_{n=0}^{r-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N\alpha}k} = G_k(\mathbf{z}, \frac{1}{N\alpha}), \quad 0 \leq k < r,$$

где  $r$  – ближайшее целое к  $N\alpha$ ; вектор  $\mathbf{z}$  состоит из  $r$  первых отсчетов вектора  $\mathbf{x}$ .

Если  $r = N\alpha$  – целое число, то имеем

$$X(k) = \sum_{n=0}^{r-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{r}nk} = \sum_{n=0}^{r-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n\beta} e^{-j\frac{2\pi}{r}nk} = \sum_{n=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}n(b-k)} = r\delta(k, b),$$

где  $\delta(k, b) = 1$ , если  $k = b$ , и принимает нулевые значения в остальных случаях. Спектр сигнала имеет вид дельта-функции с нулевыми боковыми лепестками.

Однако, если величина  $N\alpha$  – не целое число, то спектр сигнала содержит максимальный выброс  $X(b) = r$  и боковые лепестки. Действительно, пусть  $s = r - N\alpha$ , и положим, что  $|s| \leq \frac{1}{2}$ , тогда получим следующее выражение для амплитудного спектра:

$$\begin{aligned} |X(k)| &= \left| \sum_{n=-}^{r-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N\alpha}nk} \right| = \left| \sum_{n=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{N\alpha}n(b-k)} \right| = \left| \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N\alpha}r(b-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N\alpha}(b-k)}} \right| = \\ &= \left| \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N\alpha}s(b-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N\alpha}(b-k)}} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi s(b-k)}{N\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(b-k)}{N\alpha}\right)} \right|. \end{aligned}$$

Когда значения индексов  $k$  и  $b$  близки, значения  $|X(k)|$ ,  $k \neq b$ , можно аппроксимировать, считая их приблизительно равными величине  $|s|$ , граничные значения которой не превышают  $\frac{1}{2}$  и достаточно малы по сравнению со значением  $X(b) = r$ .

Если  $k$  достаточно велико (значения  $r$  близки), а  $b$  мало или наоборот, то знаменатель выражения амплитудного спектра принимает малые значения. Боковые лепестки спектра увеличиваются и ограничиваются значениями  $\frac{N}{(\pi\beta)}$

или  $\frac{N}{[\pi(N-\beta)]}$ , что значительно меньше чем  $r$ .

2. *Тригонометрическая интерполяция на основе ДПФ.* Имеется последовательность  $\mathbf{x}$ , заданная в табличной форме. Требуется аппроксимировать её значения в точках  $x\left[\frac{n+1}{2}\right]$ .

ДПФ в стандартной форме имеет вид

$$F_k(\mathbf{x}) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k < N.$$

Для решения задачи более удобна другая форма ДПФ, определяемая для последовательности отсчетов  $\tilde{\mathbf{x}} = [x[n] - \frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}]^T$  следующим образом:

$$\tilde{F}_k(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{X}(k) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad -\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}.$$

Форма обратного преобразования определяется аналогично. Форма  $\tilde{X}(k)$  предполагает, что  $N$  четно. Отметим, что вторая форма записи ДПФ менее чувствительна к эффекту наложения.

Неравнозначность форм ДПФ при решении задачи интерполяции можно пояснить следующим образом. Хотя вычисление обычного спектра ДПФ дает равенство  $\tilde{X}(k) = X(k)$  при всех  $k$ , но при интерполяционных преобразованиях равенство может нарушаться:  $\tilde{X}(k + \frac{1}{2}) \neq X(k + \frac{1}{2})$ . Это объясняется тем обстоятельством, что функция  $f_k(t) = e^{jkt}$  имеет бесконечное число альтернативных значений в точках  $t_n = \frac{2\pi n}{N}$ , т. е.  $f_{k+N}(t) = e^{j(k+N)t}$ . При этом ее интерполяционные значения  $f_k(t)$  и  $f_{k+m}(t)$  различны.

На интервале  $0 \leq t \leq 2\pi$  наименьший разброс значений имеют базисные функции  $\{f_k(t) = e^{jkt}; \frac{-N}{2} \leq k < \frac{N}{2}\}$ , что позволяет сделать вывод об их лучших интерполяционных свойствах.

Между тем вторая форма ДПФ может быть приведена к первой форме следующим образом. Определим последовательность  $y$  и ее образ Фурье  $Y$  как

$$y[n] = (-1)^n x[n - \frac{N}{2}], \quad 0 \leq n < N,$$

и

$$Y(k) = (-1)^k \tilde{X}(k - \frac{N}{2}, \tilde{x}), \quad 0 \leq k < N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(k) &= (-1)^k \tilde{X}(k - \frac{N}{2}, \tilde{x}) = e^{-j\pi k} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k - \frac{N}{2})} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n - \frac{N}{2}] e^{-j\frac{2\pi}{N}(n - \frac{N}{2})k} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = F_k(\mathbf{y}), \\ & \quad 0 \leq k < N. \end{aligned}$$

Следовательно,  $Y$  вычисляется через обычное  $N$ -точечное ДПФ последовательности  $y$ . С другой стороны, можно определить значения  $y[n] = x[n]$  для  $0 \leq n < N$  и  $y[n] = x[n - N]$  для  $\frac{N}{2} \leq n < N$ , что несколько упрощает определение значений  $Y(k)$  в терминах  $\tilde{X}(k)$ .

3. *Метод тригонометрической интерполяции.* Предположим, требуется вычислить  $q$  интерполяционных значений, располагающихся между каждыми из  $N$  значений вектора  $\tilde{x}$ . Пусть  $M = qN$ . Предварительно вычислим обратные преобразования Фурье второго вида  $\tilde{F}^{-1}$  для последовательности  $\tilde{x}$  и затем

расширим полученный спектр до спектра  $M$ -значной последовательности  $\tilde{Y}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \tilde{F}_k^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad |k| < \frac{N}{2}; \\
 Y(k) &= 0, \quad -\frac{M}{2} \leq k < -\frac{N}{2}; \\
 Y(-\frac{N}{2}) &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{\frac{N}{2}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}); \\
 Y(k) &= 0, \quad \frac{N}{2} < k < \frac{M}{2}. \\
 Y(\frac{N}{2}) &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{\frac{N}{2}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}});
 \end{aligned}$$

Такой вид преобразований позволяет получить более точную интерполяцию при обработке последовательности действительных отсчетов.

Далее вычисляется интерполированный  $M$ -значный вектор  $\tilde{y}$  со значениями  $y[n] = x[\frac{n}{q}]$ ,  $M = qN$  с помощью  $M$ -точечного ДПФ  $\tilde{F}(\tilde{Y})$ :

$$y[n] = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} Y(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{n}{q} \cdot k} = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} Y(k) e^{-j\frac{2\pi}{M} nk}, \quad -\frac{M}{2} \leq k < \frac{M}{2}.$$

Основные вычислительные затраты интерполяционного процесса при условии использования алгоритмов быстрых преобразований Фурье оцениваются как  $5M \log_2 M$  операций с плавающей запятой.

#### 4.6. Анализ сигналов в частотно-временной области

Рассмотрим вопрос анализа сигнала в частотно-временной области. Применим для этого теорию дискретных операторов и определим дискретные матричные операторы, связывающие дискретные переменные времени и частоты.

Предположим, что имеется дискретная последовательность отсчетов  $x[n]$  конечной длины  $N$  и такого же размера  $N$ -точечное дискретное преобразование Фурье  $X(k)$ .

Вначале определим дискретный *частотный оператор*, действующий во временной области и учитывающий результат преобразования в частотной области.

Для непрерывных сигналов такой оператор имеет вид  $(-j\frac{d}{dt})$ . Применение такого оператора позволяет найти решение уравнения квадратичных функционалов:

$$\int x^*(t) A x(t) dt = \int X^*(\omega) \omega X(\omega) d\omega.$$

Используя  $k$ ,  $X(k)$  и  $x[n]$ , заменяя операцию интегрирования на операцию суммирования, для дискретного переменного можно получить соотношение



$$A\{x[n]\} = \eta[n] \circ x[n],$$

где  $\circ$  – оператор свертки,  $\eta[n] = \begin{cases} \left(\frac{j}{2}\right)(-1)^n \\ \sin \frac{\pi n}{N}, n \neq 0 \\ 0, n = 0 \end{cases}$  – отсчеты обратного

дискретного преобразования Фурье последовательности чисел  $\left\{\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2-1}, \dots, 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}\right\}$ .

Оператор  $A$  может быть выражен не только через свертку, но также записан в виде матрицы-циркулянта  $\mathbf{K}$  с элементами  $\{\eta[n]\}$ . Оператор  $\mathbf{K}$  является чисто мнимым, эрмитовым, и его применение в качестве показателя экспоненциального множителя приводит к сдвигу сигнала:

$$e^{j\frac{2\pi m\mathbf{K}}{N}} x[n] = x[n+m].$$

Соответственно временной дискретный оператор, действующий в частотной области и учитывающий результат преобразования во временной области, может быть записан в виде диагональной матрицы  $\mathbf{L}$ , сформированной с помощью чисел  $\left\{\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}-1, \dots, 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}\right\}$ .

*Оценка распределения энергии в частотной области.* Вычислим с помощью дискретного преобразования Фурье характеристическую функцию распределения энергии сигнала  $P(k)$ :

$$\sum_k e^{j\frac{2\pi mk}{N}} P(k) = \sum_n x^*[n] e^{j\frac{2\pi m\mathbf{K}}{N}} x[n] = \sum_n x^*[n] x[n+m].$$

Дискретное преобразование последнего выражения (автокорреляционной функции сигнала) в формуле характеристической функции приводит к периодограмме  $|X(k)|^2$ .

*Оценка дискретного частотно-временного распределения.* Для функции  $P(n, k)$  совместного частотно-временного распределения энергии может быть определена характеристическая функция следующего вида:

$$M(\theta, m) = \left\langle e^{j\frac{2\pi\theta\mathbf{L}}{N} + j\frac{2\pi m\mathbf{K}}{N}} \right\rangle.$$

Так как операторы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{K}$  некоммутативные операторы, экспоненциальная функция может быть записана в разном виде, что приводит к разным частотно-временным преобразованиям, например преобразованиям Рихачека или Вигнера [15].

Дополним выражение характеристической функции функцией  $\varphi[\theta, m]$ :

$$M(\theta, m) = \sum_n x^*[n] \varphi[\theta, m] e^{j \frac{2\pi\theta \mathbf{L}}{N}} e^{j \frac{2\pi m \mathbf{K}}{N}} x[n],$$

где  $\varphi[\theta, m]$  – элементы квадратной матрицы порядка  $N$ .

В матричном виде получаем следующую запись:

$$M(\theta, m) = \mathbf{x}^H \varphi \Lambda_1 \mathbf{G} \Lambda_2 \mathbf{G}^H \mathbf{x},$$

где  $\Lambda_1$  – диагональная матрица  $\exp(j \frac{2\pi\theta \mathbf{L}}{N})$ ;  $\mathbf{G}$  – унитарная матрица собственных векторов оператора  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{G} = \mathbf{K} \mathbf{L} \mathbf{K}^H$ );  $\Lambda_2$  – диагональная матрица  $\exp(j \frac{2\pi m \mathbf{L}}{N})$ .

Применив к матричному выражению  $M(\theta, m)$  двумерное ДПФ, получим

$$P(n, k) = \mathbf{x}^H A \mathbf{x} = \mathbf{x}^H (\Phi \cdot \mathbf{G}) \mathbf{G}^H \mathbf{x},$$

где  $(\cdot)$  – выполняет операцию поэлементного перемножения;  $\Phi$  – двумерное преобразование Фурье матрицы  $\varphi$ .

Если принять ограничение, что матрица  $A$  должна быть положительно определенной для любых значений  $n$  и  $k$ , тогда  $A = \mathbf{W} \mathbf{W}^H$ , где  $\mathbf{W}$  – не-сингулярная матрица.

Пусть матрица  $\mathbf{G} = \mathbf{F}$  равна матрице ДПФ. Тогда для  $n = 0, k = 0$  получим

$$(\Phi \cdot \mathbf{F}) \mathbf{F}^H = \mathbf{W} \mathbf{W}^H \rightarrow \Phi = (\mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{F}) ./ \mathbf{F},$$

где  $./$  – оператор покомпонентного деления. Сдвинув строки матрицы  $\Phi$  на  $n$  позиций, а столбцы – на  $k$  позиций, приняв  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w[n-m] e^{j \frac{2\pi m k}{N}} \end{bmatrix}$  и подставив результат в выражение для  $P(n, k)$ , получим

$$P(n, k) = \mathbf{x}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{x} = \|\mathbf{x}^H \mathbf{W}\|^2 = \left\| \sum_{m=0}^{N-1} x[m] w_n[n-m] e^{-j \frac{2\pi m k}{N}} \right\|^2.$$

Таким образом, квадрат амплитуды короткого дискретного преобразования Фурье может служить оценкой дискретного частотно-временного представления сигнала. Следовательно, оценкой положительного дискретного квадратичного частотно-временного распределения является спектрограмма.

Частотно-временная диаграмма спектрограммы короткого преобразования Фурье-сигнала на интервале  $(-N, N)$  на основе ДПФ со скользящим окном показана на рис. 4.4. Отметим, что на каждом сечении спектрограмма может использовать свое окно.

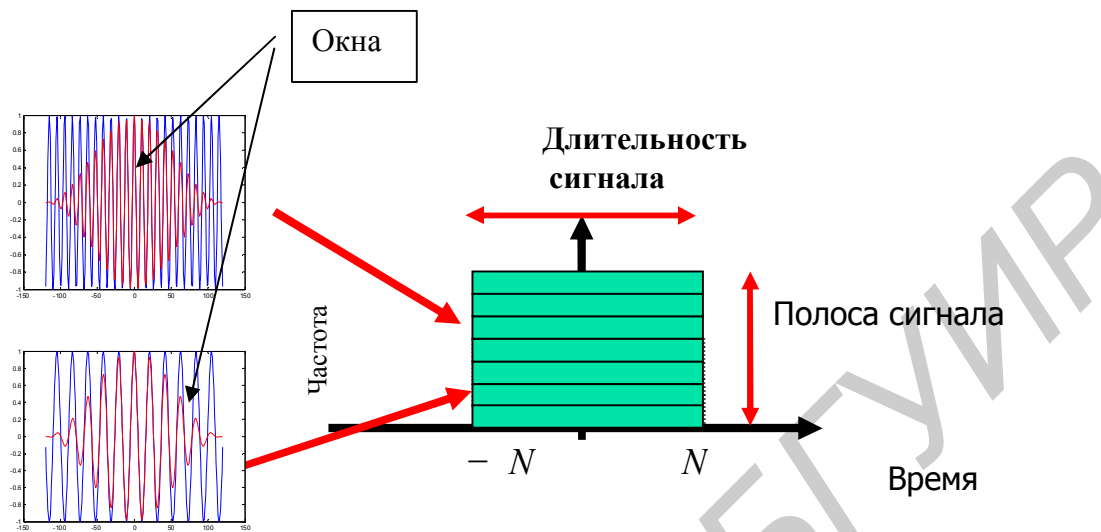


Рис. 4.4. Частотно-временная диаграмма короткого ДПФ

На рис. 4.5 показаны спектр Фурье ЛЧМ сигнала и его спектрограмма. Как видно из рисунка, спектрограмма дает больше информации о сигнале и его параметрах.

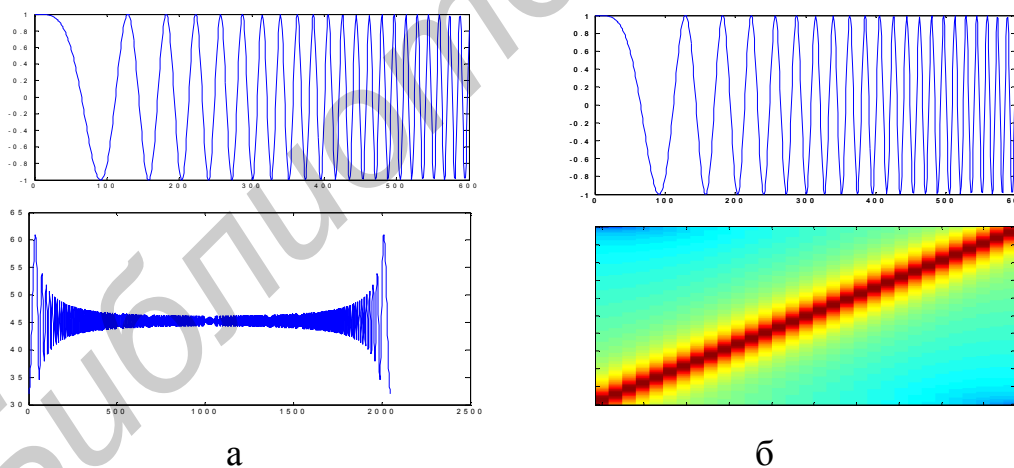


Рис. 4.5. Спектральный анализ ЛЧМ-сигнала:

а – спектр дискретного преобразования Фурье; б – спектрограмма короткого преобразования Фурье (вид сверху)

На рис. 4.6 приведен пример частотно-временного оконного преобразования сигнала, состоящего из четырех непересекающихся интервалов, в каждом из которых присутствует сумма двух гармоник разной частоты и используются гауссовские оконные функции разной ширины. Узкое окно обеспечивает лучшее временное разрешение и четкую фиксацию границ

интервалов и широкие пики частот в пределах интервалов. Широкое окно, напротив, четко отмечает частоты интервалов, но с перекрытием границ временных интервалов.

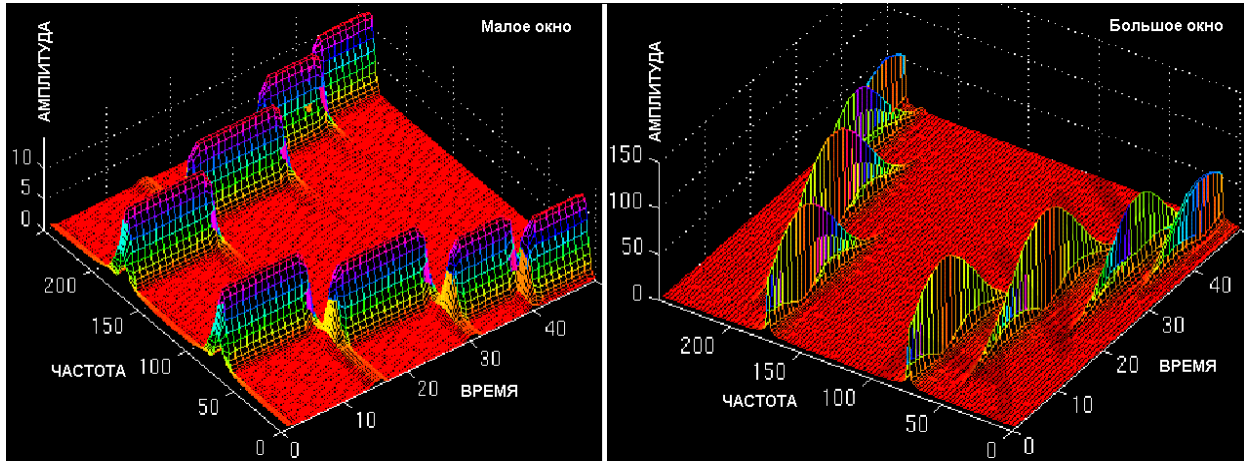


Рис. 4.6. Частотно-временные оконные преобразования сигнала, состоящего из четырех непересекающихся интервалов

При решении практических задач приходится выбирать окно для анализа всего сигнала, тогда как разные его участки могут требовать применения разных окон. Если сигнал состоит из далеко отстоящих друг от друга частотных компонент, то можно пожертвовать спектральным разрешением в пользу временного и наоборот.

#### 4.7. Контрольные вопросы и задачи

1. Поясните, на какие характеристики спектрального анализа влияют весовые окна.
2. Вычислите импульсную и частотную характеристики окна Хэмминга для  $N = 8$ . Как данное окно может быть использовано в алгоритме спектрального анализа на основе ДПФ?
3. Поясните, в каких случаях целесообразно применять короткое ДПФ. Чем спектрограмма отличается от амплитудного спектра ДПФ?
4. Поясните, что дает применение ДПФ с дробными величинами.

## 5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В широком смысле стационарные случайные процессы  $x(n)$  характеризуются средним значением  $\mu$  и автокорреляционной функцией (АКФ)  $r_{xx}(k) = M\{x[n]x[n+k]\}$ . На практике имеется последовательность ограниченной длины  $x[n]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , поэтому в качестве оценки корреляционной функции принимается величина

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n]. \quad (5.1)$$

Это оценка называется несмещенной оценкой корреляционной функции, так как ее математическое ожидание равно истинной автокорреляционной оценке. Кроме (5.1) на практике часто используют смещенную оценку корреляционной функции:

$$\check{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n]. \quad (5.2)$$

Эта оценка называется смещенной оценкой корреляционной функции, так как ее математическое ожидание равно ортонормированной истинной автокорреляционной оценке.

*Спектральная плотность мощности* (СПМ). Альтернативной для АКФ (по Винеру – Хинчину) является функция спектральной плотности мощности (СПМ)  $S_{xx}(f)$ :

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k)e^{-j2\pi fk}. \quad (5.3)$$

СПМ имеет частотный диапазон  $f \in (-\infty, \infty)$  для непрерывных сигналов и  $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  – для дискретных сигналов.

В более общем виде СПМ стационарного решетчатого процесса определяется как двустороннее  $Z$ -преобразование корреляционной функции

$$S_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k)z^{-k}.$$

*Свойства СПМ.*

1.  $S_{xx}(f)$  – действительная неотрицательная функция.
2. Дисперсия процесса  $x(n)$  может быть определена как

$$\sigma_x^2 = r_{xx}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{xx}(f)df.$$

3. Поведение СПМ подобно поведению функции распределения вероятностей, т. е. СПМ – это действительная неотрицательная функция, имеющая постоянную площадь.

## 5.1. Коррелограммный и периодограммный методы оценки спектральной плотности мощности

*Коррелограммный метод оценки СПМ.* Пусть имеется несмещенная оценка корреляционной функции. Для максимально возможного корреляционного сдвига  $L$  запишем выражение для оценки СПМ на конечном интервале:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi mf). \quad (5.4)$$

На практике  $L$  берут много меньше длины последовательности:  $L \ll N$ . ( $L \cong \frac{N}{10}$ ), где  $N$  – длина последовательности. Используя смещенную оценку корреляции, можно получить смещенную СПМ:

$$\tilde{S}_{xx}(f) = \sum_{m=-L}^L \tilde{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi mf). \quad (5.5)$$

Коррелограммный метод оценки СПМ можно дополнить, умножив корреляционную функцию на функцию окна:

$$\hat{S}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] w[m] \exp(-j2\pi m f T),$$

где  $w[n]$  – функция весового окна.

*Алгоритм коррелограммной оценки.*

1. Выбрать последовательность  $x[n]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .
2. Вычислить корреляционную функцию по соотношению (5.1) или (5.2) для максимального корреляционного сдвига  $L$  ( $L \ll N$ ).
3. Выбрать число отсчетов в частотной области. Пусть  $M$  – число отсчетов в области частот от  $[-\frac{F_d}{2}; \frac{F_d}{2}]$ , где  $F_d$  – частота дискретизации. Должно выполняться условие  $2L < M$ . Определить функцию корреляции из условия

$$\tilde{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \hat{r}_{xx}[m], & m=0, \dots, L, \\ \hat{r}_{xx}[M-m], & m=M-L, \dots, M-1, \\ 0, & m=L+1, \dots, M-L-1. \end{cases}$$

4. Умножить  $\tilde{r}_{xx}[m]$  на функцию окна.
5. Вычислить Фурье-преобразование и разделить на мощность окна:

$$\hat{S}_{xx}(k) = \frac{1}{U} \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{r}_{xx}[m] w[m] \exp(-j2\pi km / M), \quad (5.6)$$

где  $U = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |w[m]|^2$ .

*Периодограмма.* Периодограммная функция определяется для последовательности отсчетов  $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$  как оценка СПМ:

$$\hat{S}_{xx}^{\text{PER}}(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2 = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2. \quad (5.7)$$

Периодограммную функцию можно определить через Фурье-преобразование оценки автокорреляционной функции сигнала  $r_{xx}$ :

$$\hat{S}_{xx}^{\text{PER}}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(k) e^{-j2\pi fk}. \quad (5.8)$$

Значение периодограммы на частоте  $f_0$  можно получить, если пропустить сигнал через фильтр с импульсной характеристикой

$$h_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi f_0(n-N)} u(n)$$

и вычислить квадрат отклика фильтра в момент времени  $n = N$ .

*Свойства периодограмм.*

1. Смещение периодограммы можно оценить из выражения  $M \{ \hat{S}_{xx}^{\text{PER}}(f) \} = F_B(f) * S_{xx}(f)$ , где  $F_B(f) \propto \text{sinc}^2(f)$  – Фурье-преобразование треугольного окна (Барлетта).

2. Периодограмма асимптотически не смещена, но сглажена для конечных интервалов анализа.

3. При  $N \rightarrow \infty$  периодограмма не сжимается и, следовательно, не является состоятельной в статистическом смысле функцией.

4. Эмпирически разрешающую способность по частоте можно оценить величиной  $(1/N)$  циклов на отсчет.

5. Периодограмма неэффективный инструмент анализа непрерывных спектров или близко расположенных по частоте гармонических сигналов.

6. С другой стороны, применение периодограммы дает хороший результат оценки частот одиночных или широко расположенных по частоте гармонических сигналов.

*Алгоритм периодограммной оценки СПМ.*

1. Исходная реализация  $x[n]$ , содержащая  $N$  отсчетов, разбивается на  $P$  перекрывающихся участков:

$$x^{(i)}(m) = x(m + (i-1)M_C),$$

где  $m=0, \dots, M-1$ ,  $i=1, \dots, P$ .

Число  $P = \text{ent}\{(N-M)/(M(1-C))\} + 1$ ;  $M_C = M - \text{ent}\{MC\}$ . Здесь  $C < 1$  – параметр (процент) перекрытия. Использование перекрытия особенно целесообразно в тех случаях, когда применяются временные окна с низким уровнем боковых лепестков.

2. На следующем шаге выполняется центрирование сигнала на каждом участке:  $\hat{x}^{(i)}(m) = x^{(i)}(m) - M_x(i)$ , где  $M_x(i) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x^{(i)}(m)$  – среднее значение сигнала на  $i$ -ом участке реализации.

3. Осуществляется взвешивание сигнала функцией окна  $x_w^{(i)}(m) = w(m)\hat{x}^{(i)}(m)$ ,  $m = 0, \dots, M-1$  и рассчитывается энергетическая характеристика окна  $U = \sum_{m=0}^{M-1} |w(m)|^2$ , где  $w(m)$  – весовая функция окна.

4. Для каждого участка реализации с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье вычисляется периодограмма, и оценка СПМ формируется путем усреднения значений периодограммы:

$$\hat{S}_{xx}(k) = \frac{1}{PU} \sum_{i=1}^P \left| \sum_{m=0}^{M-1} x_w^{(i)}(m) \exp\left(-\frac{j2\pi km}{M}\right) \right|^2. \quad (5.9)$$

*Методы усреднения периодограмм*

*Метод Барлетта.* Последовательность отсчетов, как показано на рис. 5.1, разбивается на сегменты.

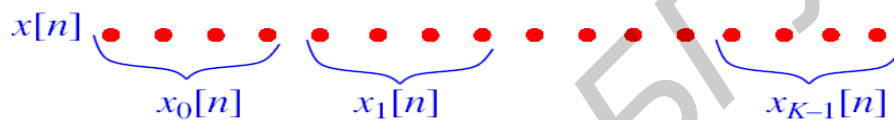


Рис. 5.1. Сегментация данных по методу Барлетта

1. Исходная последовательность  $x[n]$  делится на  $K = \frac{L}{M}$  неперекрывающихся сегментов  $x_0[n], x_1[n], \dots, x_{K-1}[n]$ .
2. Вычисляются периодограммы для каждого сегмента.
3. Результаты вычислений усредняются:

$$\hat{S}_B(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{S}_k(\omega), \quad (5.10)$$

где  $\hat{S}_k(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_k[n] e^{-j\omega n} \right|^2$ .

Если  $K$  периодограмм в алгоритме Барлетта независимы, тогда дисперсия усредненной периодограммы Барлетта равна  $\sigma_{\hat{S}_B(\omega)}^2 \cong \frac{1}{K} S_{xx}^2(\omega)$ . Дисперсия уменьшается с увеличением  $K$ .

*Метод Уэлча.* Использует сегменты последовательности отсчетов с перекрытием (рис. 5.2).



Рис. 5.2. Разбиение последовательности отсчетов по методу Уэлча



Исходная последовательность делится на  $K$  перекрывающихся сегментов длиной  $M$ . Уэлч показал:

- если сегменты перекрываются на 50 %, тогда дисперсия уменьшается почти в 2 раза по сравнению с методом Барлетта, поскольку происходит удвоение числа сегментов;

- увеличение перекрытия более чем на 50 % не приводит к уменьшению дисперсии, поскольку сегменты становятся менее независимы;

- поведение дисперсии похоже на случай, когда используется непрямоугольное весовое окно – имеет место модификация периодограммы.

На рис. 5.3 показаны периодограммы Уэлча для  $M = 20$  – 50%-го перекрытия сигналов.

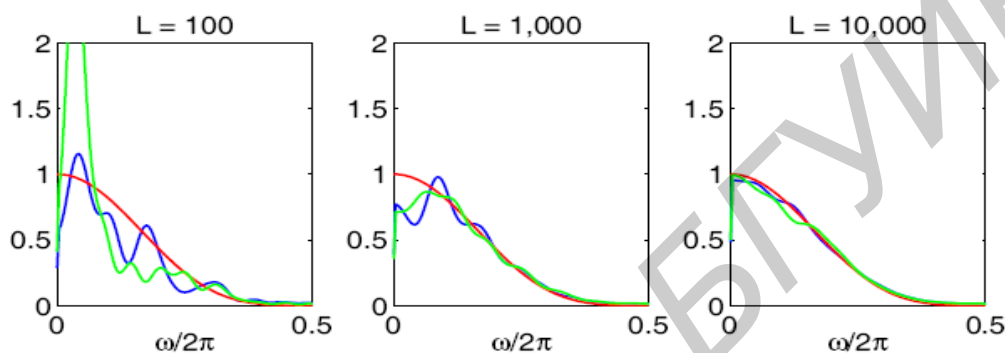


Рис. 5.3. Периодограммы, вычисленные по методу Уэлча

## 5.2. Оценка спектра на основе окон сферидальных функций

*Модель случайного процесса Винера.* Случайный стационарный в широком смысле процесс  $x(n)$  может быть представлен в виде суммы случайных гармонических колебаний:

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi fn} dZ(f), \quad (5.11)$$

где  $dZ(f)$  принято называть распределением комплексных гармонических колебаний со случайными фазами и амплитудами.

*Свойства  $dZ(f)$ .*

1. Среднее значение  $M\{dZ(f)\} = 0$ .
2. Дисперсия

$$M\{|dZ(f)|^2\} = dH_{xx}(f),$$

где  $H_{xx}(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^f S_{xx}(\lambda) d\lambda$  для диапазона частот дискретного сигнала  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ ;

$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-j2\pi fk}$  – функция спектральной плотности мощности.

3. Функция спектральной плотности мощности (если она существует)

может быть определена через  $dZ(f)$  как  $S_{xx}(f) = \frac{M\{|dZ(f)|^2\}}{df}$ . Спектральная

оценка определяется через моменты распределения  $dZ(f)$  для конечного временного ряда  $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$ .

4.  $dZ(f)$  можно рассматривать как комплексный, белый, случайный, недифференцируемый (нельзя писать  $dZ(f) = z(f) df$ ) процесс.

Введем в рассмотрение ядро Дирихле  $D_N(v)$ :

$$D_N(v) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nx} = \frac{1 - e^{-j2\pi vN}}{1 - e^{-j2\pi v}} = e^{-j2\pi v \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)}. \quad (5.12)$$

Функцию  $D_N(v)$  можно рассматривать как результат применения преобразования Фурье к дискретному весовому окну прямоугольной формы длины  $N$ .

Дискретное преобразование Фурье ряда данных дает основное уравнение спектральной оценки:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi fn} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(u-f)n} dZ(u) = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(f-u) dZ(u) = D_N(f) * dZ(f). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Вычисление спектра Фурье конечной последовательности можно рассматривать как свертку истинного спектра сигнала  $dZ(f)$  с ядром Дирихле, что дает наблюдаемый спектр  $X(f)$  и ставит задачу противодействия эффекту размытия спектра. При этом сталкиваются с трудностью решения «инверсной задачи», которая подобна задаче решения системы линейных уравнений с числом неизвестных больших, чем число уравнений.

Точное вычисление свертки (5.13) невозможно, т. к. информация о полном сигнале теряется при обработке выборки на конечном интервале. Один из методов повышения точности анализа основан на расширении ядра Дирихле с использованием его собственных векторов и больших собственных значений.

Определим последовательность  $\{g[n], n = 0, 1, \dots, N-1\}$  с действительными значениями отсчетов и соответствующее ей преобразование Фурье  $G(f)$ .

В качестве меры концентрации спектральных компонент будем использовать нормированное значение энергии спектра в полосе  $\Delta f$ :

$$\beta(\Delta f) = \frac{\int_{-\frac{\Delta f}{2}}^{\frac{\Delta f}{2}} |G(f)|^2 df}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |G(f)|^2 df}. \quad (5.14)$$

Так как  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^*$ , то числитель отношения (5.14) можно представить в виде

$$\int_{-\Delta f}^{\Delta f} |G(f)|^2 df = \int_{-\Delta f}^{\Delta f} \left( \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{-j2\pi fn} \right) \left( \sum_{m=0}^{N-1} g[m]e^{j2\pi fm} \right) df =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} g[n]g[m] \int_{-\Delta f}^{\Delta f} e^{j2\pi f(m-n)} df = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} g[n]g[m] \frac{\sin[2\pi\Delta f(m-n)]}{\pi(m-n)}.$$

Обратимся к векторно-матричной интерпретации. Определим вектор  $\mathbf{g} = [g[0], g[1], \dots, g[N-1]]^T$  и теплицеву матрицу  $\mathbf{D}$ , элементами которой являются значения

$$d_{m,n} = \frac{\sin[2\pi\Delta f(m-n)]}{\pi(m-n)} = 2\Delta f \operatorname{sinc}(2\Delta f(m-n)).$$

Тогда меру концентрации спектральных компонент можно представить через соотношение Релея  $\frac{\mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g}}{\mathbf{g}^T \mathbf{g}}$ . Это позволит получить решение задачи о

концентрации энергии в виде собственного вектора  $\mathbf{v}_0(N, \Delta f)$ , соответствующего наибольшему собственному значению  $\lambda_0(N, \Delta f) = \beta(\Delta f)$  матрицы  $\mathbf{D}$ . Следующий по значимости собственный вектор  $\mathbf{v}_1(N, \Delta f)$  имеет наибольшую спектральную концентрацию среди векторов, ортогональных  $\mathbf{v}_0$ , и т. д.

Собственные векторы  $\mathbf{v}_k(N, \Delta f)$  матрицы  $\mathbf{D}$  носят название *дискретных вытянутых сфероидальных векторов* (ДВСВ), или последовательностей Слепяна. Поскольку матрица  $\mathbf{D}$  симметричная, то множество  $\{\mathbf{v}_k(N, \Delta f)\}$  ортонормальное.

Фурье-преобразование последовательностей Слепяна  $\{\mathbf{v}_k(N, \Delta f)\}$  дает набор спектральных коэффициентов  $\{\mathbf{V}_k(N, \Delta f; f)\}$ , которые называются *дискретными вытянутыми сфероидальными волновыми функциями* (ДВСВФ) и могут рассматриваться как локальные собственные функции ядра Дирихле при решении интегрального уравнения

$$\int_{-\Delta f}^{\Delta f} D_N(f-u) V_k(N, \Delta f; f) du = \lambda_k(N, \Delta f) V_k(N, \Delta f; f). \quad (5.15)$$

ДВСВ – ДВСВФ является системой, которая обладает свойством двойной ортогональности и может служить основой для построения оператора локализации энергии в частотно-временной области. Значения  $\lambda_k(N, \Delta f)$  дают оценку уровня концентрации.

Собственные значения  $\lambda_k(N, \Delta f)$  положительны, различны, не превышают единицы и могут быть упорядочены в порядке возрастания их значений:

$$0 < \lambda_{N-1}(N, \Delta f) < \dots < \lambda_1(N, \Delta f) < 1.$$

Первые  $2N\Delta f$  собственных значений наиболее близки к единице, и соответственно только первые  $2N\Delta f$  собственные функции обладают высокой концентрацией в заданной полосе.

Сигналы длительностью  $T$  и полосой  $\Delta f$  занимают область  $2T\Delta f$ , в которой могут использоваться для передачи  $2T\Delta f$  независимых числовых значений. Обычно выбирают базис из  $K \leq 2T\Delta f - 1$  функций, поскольку значения  $\lambda_{2N\Delta f-1}(N, \Delta f)$  уже становятся достаточно малыми (рис. 5.4).

*Сглаженная спектральная оценка с использованием системы разных окон*  
Рассмотрим вопрос локального усреднения в полосе  $2\Delta f$ :

$$M\{\hat{S}_{xx}(f)\} \approx \frac{1}{2\Delta f} \int_{f-\Delta f}^{f+\Delta f} S_{xx}(u) du .$$

Сглаженная спектральная оценка по сфероидальной системе разных окон записывается в виде

$$\hat{S}_{xx\Sigma}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \lambda_k(N, \Delta f) \hat{S}_{xx\Sigma}^{(k)}(f)}{\sum_{k=0}^{K-1} \lambda_k(N, \Delta f)}, \quad (5.16)$$

где  $k$ -я компонента  $\hat{S}_{xx\Sigma}^{(k)}(f)$  оценки спектра вычисляется с использованием в качестве весового окна соответствующей сфероидальной функции:

$$\hat{S}_{xx\Sigma}^{(k)}(f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(N, \Delta f; n) x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 .$$

Классические оценки спектра используют одиночное окно и уменьшают дисперсию оценки, проводя усреднение по методам Барлетта или Уэлча, или сглаживают спектр по алгоритму Блэкмана – Тьюки. Это размывает границы и снижает разрешающую способность спектрального анализа.

Вычисление спектра с использованием сфероидальной системы функций и значений формирует независимые спектральные оценки (весовые функции ортогональны), которые затем усредняются без потери разрешающей способности.

Выбор полосы  $\Delta f$  и числа окон  $K$  определяет разрешающую способность, дисперсию оценки и степень просачивания спектральных компонент:

- большая величина  $K$  дает низкую дисперсию, но высокий уровень просачивания;
- большая полоса  $\Delta f$  дает низкое разрешение, но большее количество свободных от эффекта просачивания весовых функций, повышает эффективность сглаживания.

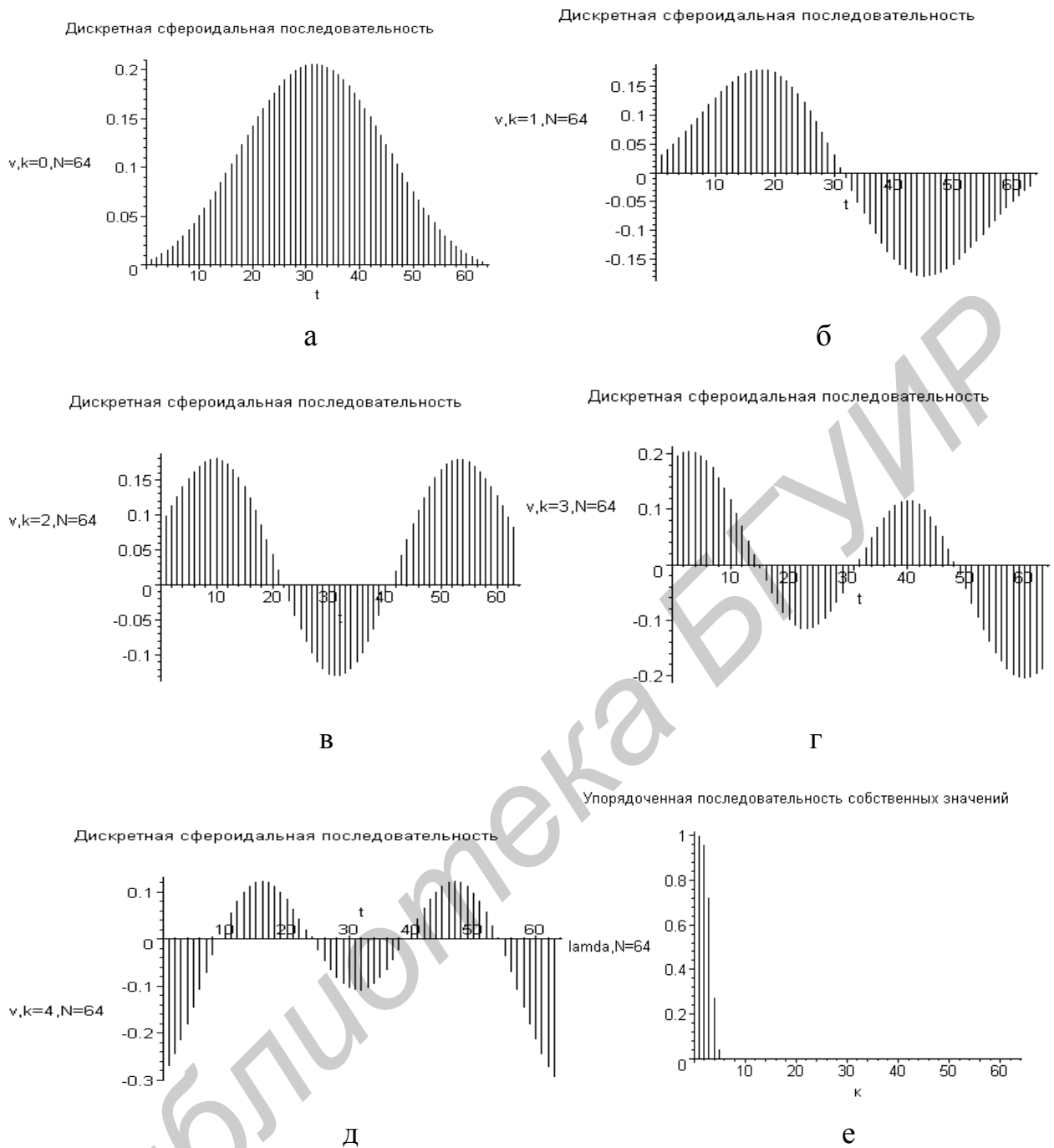


Рис. 5.4. Собственные векторы и значения матрицы  $\mathbf{D}$ ,  $N = 64$  :  
 а, б, в, г, д – дискретные вытянутые сфероидальные векторы,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  
 е – упорядоченная последовательность собственных значений

*Пример.* Обрабатываемый сигнал  $x[n]$  представляет собой аддитивную смесь гармонического сигнала  $s[n]$  и шума  $\xi[n]$  (рис. 5.5, а):

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{256}43n\right) + \xi[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad N = 64,$$

где  $\xi[n]$  – нормальный шум, амплитуда которого в 8 раз меньше амплитуды гармонического сигнала.

Требуется провести спектральный анализ сигнала с использованием ортогонального сфероидального окна.

*Решение.* Спектр дискретного преобразования Фурье показан на рис. 5.5, б. Как видно из рисунка спектр сигнала имеет большие боковые лепестки.

Применим метод ортогонального сфероидального окна и вычислим оценку спектральной плотности мощности по формуле 5.16. Результат вычислений показан на рис. 5.5, в. Как видно из рисунка, полученная функция оценки имеет подавленные боковые лепестки и расширенный главный лепесток спектра.

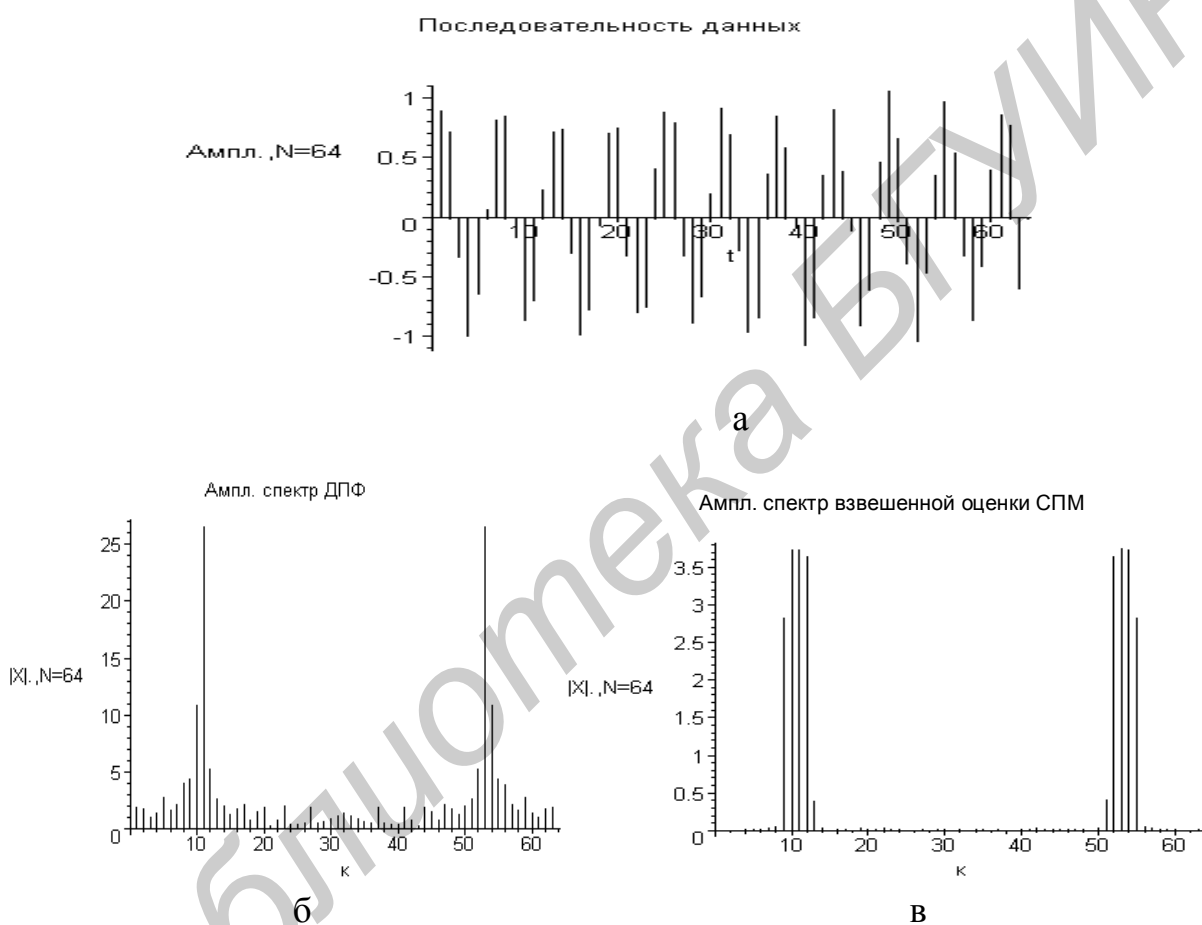


Рис. 5.5. Оценка спектральной плотности мощности по методу ортогонального окна сфероидальных функций:  
 а – реализация обрабатываемого сигнала; б – спектр ДПФ-реализации;  
 в – взвешенная оценка СПМ ортогонального окна сфероидальных функций

### 5.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Функция окна имеет вид  $w[n] = 0,5[1 + \cos(2\pi n/(N - 1))]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Покажите, что умножение на эту функцию соответствует интерполяции спектральных составляющих по формуле

$$X_1(k) = -0,35X(k-1) + 0,5X(k) - 0,25X(k+1),$$

где  $X(k)$  – спектр последовательности  $x[n]$ ;  $X_1(k)$  – спектр последовательности  $x[n]w[n]$ ;  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

2. Напишите программу для вычисления энергетического спектра и автокорреляционной функции действительных временных рядов.

3. Синтезируйте оператор локализации энергии в частотно-временной области на основе системы ДВСВ – ДВСВФ для анализа сигнала

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}k_1n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}k_2n\right) + \xi[n],$$

где  $k_1 = 53$ ;  $k_2 = 15$ ;  $N = 128$ ;  $\xi[n]$  – нормальный шум, амплитуда которого в 10 раз меньше амплитуд гармонических сигналов.

4. Поясните свойство двойной ортогональности системы ДВСВ – ДВСВФ.

5. Периодограмма дискретного сигнала определяется как

$$\hat{S}_{gg}^{\text{PER}}(f) = \frac{1}{LU} |G(f)|^2,$$

где  $G(f)$  – ДВПФ конечной последовательности  $g[n] = w[n]x[n]$ ;  $w[n]$  – конечное окно длины  $L$ ;  $U$  – нормирующий множитель.

Покажите, что периодограмму можно вычислить как Фурье-образ апериодической автокорреляционной последовательности

$$\hat{S}_{gg}^{\text{PER}}(f) = \frac{1}{LU} |G(f)|^2 = \frac{1}{LU} \sum_{n=-(L-1)}^{L-1} r_{gg}[n] e^{-j\omega_n n},$$

где  $r_{gg}[m] = \sum_{l=0}^{L-1} g[l]g^*[l+m]$ .

6. Симметричное окно Барлетта определяется как

$$w_B[n] = \begin{cases} 1 - |n|/M, & |n| \leq M-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Окно Барлетта удобно для оценки спектра мощности через обработку окном оценки автокорреляции.

Покажите, что окно Барлетта с точностью до множителя  $\frac{1}{M}$  совпадает с апериодической автокорреляцией последовательности

$$u[n] - u[n-M].$$

7. Покажите, что Фурье-образ окна Барлетта имеет вид

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left( \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2.$$

8. Поясните преимущества спектральной оценки с использованием системы разных окон.

## 6. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

### 6.1. Основы теории вейвлет-преобразований и вейвлет-анализа

Рассмотрим два вида преобразований, которые являются фундаментом теории вейвлет-анализа.

1. *Непрерывное вейвлет-преобразование.* Непрерывным вейвлет-преобразованием функции  $f(v) \in L^2(\mathbf{R})$  называют функцию двух переменных, полученную в результате скалярного произведения:

$$W(a, b) \equiv W_f(a, b) = \langle f(v), \psi(a, b, v) \rangle, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, \quad (6.1)$$

где вейвлеты  $\psi_{a,b}(v) \equiv \psi(a, b, v)$  являются масштабированными и сдвинутыми копиями порождающего (материнского) вейвлета  $\psi(v) \in L^2(\mathbf{R})$ :

$$\psi_{a,b}(v) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{v-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0. \quad (6.2)$$

Если для порождающего вейвлета выполняется условие

$$C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty, \quad (6.3)$$

где  $F_\psi(\omega)$  – образ Фурье вейвлета  $\psi(v)$ , то преобразование (6.1) обратимо, т. е. существует обратное непрерывное вейвлет-преобразование:

$$f(v) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a, b) \psi(a, b, v) \frac{dad b}{a^2}. \quad (6.4)$$

Непрерывное вейвлет-преобразование – это разложение сигнала по всем возможным сдвигам и сжатиям (растяжениям) некоторой функции.

Иногда вейвлет-анализ сравнивают с анализом Фурье. Преобразование Фурье – это разложение сигнала по сдвигам и сжатиям (растяжениям) гармонической функции. Сигналу  $f(v)$  ставится в соответствие комплексно значная функция  $F(\omega)$ . Для каждой частоты  $\omega$  аргумент этой функции определяет фазовый сдвиг, а модуль – амплитуду соответствующей гармонической составляющей.

Переменная  $a$  в выражениях (6.1), (6.2), (6.4) определяет масштаб вейвлета и является аналогом частоты в анализе Фурье. Переменная  $b$  определяет величину сдвига вейвлета. Таким образом, для каждой пары  $a$  и  $b$  функция  $W(a, b)$  определяет амплитуду соответствующего вейвлета.

В отличие от анализа Фурье конкретный вид вейвлета не оговаривается. Однако в качестве вейвлета можно взять непериодические, локализованные в



пространстве функции, например, функции, имеющие один или два близко расположенных глобальных экстремума и быстро затухающие или обращающиеся в ноль на бесконечности.

Минимальным требованием к таким функциям обычно является наличие одного нулевого момента, т. е. равенство нулю интеграла от этой функции по всей области ее определения.

Распространенный пример вейвлета – вторая производная гауссиана (функции плотности нормального распределения), которая получила название «мексиканская шляпа»:

$$\psi_{mh}(v) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}}(1-v^2)\exp\frac{-v^2}{2}. \quad (6.5)$$

В случае анализа Фурье каждой частоте соответствует всего одна гармоническая составляющая. В случае вейвлет-анализа каждой частоте соответствует множество сдвинутых друг относительно друга функций. Если сигнал имеет особенность, например разрыв, то на наличие этого разрыва укажут относительно высокие значения амплитуд при высоких частотах образа Фурье этого сигнала. В то же время у вейвлет-анализа высокие амплитуды будут только у тех вейвлетов, экстремумы которых окажутся вблизи точки разрыва. Следовательно, можно не только определить наличие особенности, но и ту точку, в которой она имеется.

Таким образом, анализ Фурье является частотным, а вейвлет-анализ – частотно-пространственным анализом сигнала.

## 2. Ортогональное диадное (дискретное) вейвлет-преобразование

Количество копий порождающего вейвлета, необходимое для обратимого разложения, можно существенно сократить. При этом, однако, требуется накладывать дополнительные условия на порождающий вейвлет.

Распространенный случай – вычисление значений  $W(a,b)$  только для  $a$  и  $b$  вида

$$a = 2^{-i}, \quad \frac{b}{a} = l, \quad i, l \in \mathbf{Z}.$$

Вместо функции (6.1) получается счетное множество значений:

$$w_{d,l}^{(i)} = \langle f(v), \psi_l^{(i)}(v) \rangle, \quad (6.6)$$

где

$$\psi_l^{(i)}(v) = \sqrt{2^i} \psi(2^i v - l), \quad i, l \in \mathbf{Z}. \quad (6.7)$$

Обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$f(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{d,l}^{(i)} \psi_l^{(i)}(v). \quad (6.8)$$

Значения, вычисляемые по формуле (6.6), являются обобщенными коэффициентами Фурье разложения сигнала  $f(v)$  по системе функций (6.7), а выражение (6.8) есть обобщенный ряд Фурье  $f(v)$  относительно системы (6.7).

Следовательно, чтобы представление (6.8) имело смысл, вейвлет  $\psi(v)$  должен быть таким, чтобы порожденная им система являлась ортонормированным базисом в  $L^2(\mathbf{R})$ .

Формулы (6.6), (6.7) и (6.8) определяют известное диадное (dyadic) ортогональное вейвлет-преобразование.

С одной стороны, диадное преобразование является частным случаем непрерывного преобразования. С другой стороны, это совершенно иной объект с особой структурой и свойствами. Диадное преобразование является аналогом скорее ряда Фурье, а не дискретного преобразования Фурье.

Выражение (6.8) имеет четко выраженную многоуровневую иерархическую структуру. При фиксированном индексе  $i$  (который называют уровнем разрешения, или разрешением) масштаб вейвлетов не меняется (т. е. все вейвлеты для каждого разрешения являются сдвинутыми копиями друг друга). При увеличении разрешения на 1 величина сдвига уменьшается вдвое и вдвое сжимаются вейвлеты (именно поэтому преобразование называется диадным – диадическим растяжением временного интервала). Похожую структуру имеет ряд Фурье, но у ряда Фурье каждому уровню разрешения соответствует лишь пара гармонических функций, сдвинутых относительно друг друга на половину периода.

Любую частичную сумму ряда Фурье можно считать огрубленным (низкочастотным) приближением исходного сигнала. Самым грубым начальным приближением является первый член – константная функция.

У выражения (6.8) нет начального приближения. Но в качестве такового можно взять любую частичную сумму, например сумму по  $i$  от  $-\infty$  до  $-1$ :

$$f^{(0)}(v) = \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{d,l}^{(i)} \psi_l^{(i)}(v).$$

Существует функция  $\varphi(v)$ , в которой множество ее сдвигов образует ортонормированную систему, и сигнал  $f^{(0)}(v)$  можно точно представить в виде разложения по этой системе, т. е.

$$f^{(0)}(v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l \varphi_l(v),$$

где  $\varphi_l(v) = \varphi(v-l)$ ,  $l \in Z$ , и

$$v_l = \langle f(v), \varphi_l(v) \rangle, l \in Z.$$

Кроме того, эта система ортогональна системе вейвлетов, соответствующих уровням разрешений от 0 и выше, и образует с ней ортонормированный базис в  $L^2(\mathbf{R})$ . Если функции  $\varphi_l(v)$  удовлетворяет всем этим условиям, то они называются скейлинг-функциями (scaling function), или масштабными функциями, а  $\varphi(v)$  – порождающей скейлинг-функцией.

С помощью скейлинг-функции вместо формулы (6.8) получается эквивалентное ему выражение:

$$f(v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l \varphi_l(v) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{d,l}^{(i)} v_l^{(i)}(v). \quad (6.9)$$

По структуре это представление существенно отличается от структуры непрерывного вейвлет-преобразования, так как содержит уже два вида функций.

Простейшим примером ортогональной системы вейвлетов является система Хаара, порождающие функции (скейлинг и вейвлет) которой задаются следующими формулами:

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & v \in [0 \dots 1) \\ 0, & v \notin [0 \dots 1) \end{cases}, \quad \psi(v) = \begin{cases} 1, & v \in [0 \dots 0,5) \\ -1, & v \in [0,5 \dots 1) \\ 0, & v \notin [0 \dots 1) \end{cases}. \quad (6.10)$$

Диадное вейвлет-преобразование на основе системы Хаара называется преобразованием Хаара.

3. *Ортогональный многомасштабный анализ.* Диадное вейвлет-преобразование можно вывести не только как частный случай непрерывного преобразования, но и с помощью конструкции, называемой *многомасштабным анализом* (multiresolution analysis) или *кратномасштабным анализом*.

Ортогональным многомасштабным анализом в  $L^2(\mathbf{R})$  называется последовательность замкнутых подпространств  $V^{(i)} \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , в которых

- 1)  $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ ;
- 2)  $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} V^{(i)}$  плотно упаковано в  $L^2(\mathbf{R})$ ;
- 3)  $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} V^{(i)} = \emptyset$ ;
- 4)  $v(v) \in V^{(i)} \Leftrightarrow v(2v) \in V^{(i+1)}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ ;
- 5)  $v(v) \in V^{(0)} \Leftrightarrow v(v-l) \in V^{(0)}$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;

6) существует элемент  $\varphi(v) \in V^{(0)}$ , интеграл которого не равен нулю и последовательность сдвигов  $\{\varphi(v-l); l \in \mathbf{Z}\}$  является ортонормированным базисом в  $V^{(0)}$ ; элемент  $\varphi(v)$  называется порождающей скейлинг-функцией.

Рассмотрим некоторые свойства многомасштабного анализа, вытекающие из данного определения.

Можно сказать, что найдутся такие числа  $h_k \in \mathbf{R}$ ,  $k \in K$ ,  $K \subset \mathbf{Z}$ , что

$$\varphi(v) = \sqrt{2} \sum_{k \in K} h_k \varphi(2v - k). \quad (6.11)$$

Это выражение называется масштабным соотношением для скейлинг-функций.

Для любого  $i \in \mathbf{Z}$  последовательность  $\{\varphi_l^{(i)}; l \in \mathbf{Z}\}$ , где  $\varphi_l^{(i)}(v) = \sqrt{2} \varphi(2^i v - l)$ , является ортонормированным базисом в пространстве  $V^{(i)}$ . Функции  $\varphi_l^{(i)}(v)$  называются скейлинг-функциями.

Если порождающая скейлинг-функция  $\varphi(v)$  принадлежит множеству  $L(\mathbf{R})$  и нормализована, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) dv = 1,$$

то с точностью до значений на множестве меры нуль это функция, единственным образом определяемая уравнением измельчения (6.11), т. е. набором значений  $\{h_k; k \in K\}$ .

Для каждой пары подпространств  $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , многомасштабного анализа должно существовать подпространство  $W^{(i)}$  такое, что

$$V^{(i)} \perp W^{(i)}, V^{(i+1)} = V^{(i)} \oplus W^{(i)}.$$

Такие подпространства можно назвать уточняющими или детализирующими в том смысле, что они содержат уточняющую информацию, необходимую для перехода от уровня разрешения  $i$  к уровню разрешения  $i+1$ . Справедливо следующее:

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} W^{(i)} = L^2(\mathbf{R}).$$

Если существует элемент  $\psi(v) \in W^{(0)}$ , такой, что последовательность  $\{\psi(v-l); l \in \mathbf{Z}\}$  является ортонормированным базисом в  $W^{(0)}$ , то этот элемент называется порождающим вейвлетом.

Если  $\psi(v) \in W^{(0)}$  – порождающий вейвлет, то набор  $\{\psi_l^{(i)}(v); l \in \mathbf{Z}\}$  образует ортонормированный базис в  $L^2(\mathbf{R})$ . Здесь  $\psi_l^{(i)}(v) = \sqrt{2^i} \psi(2^i v - l)$ . Функции из этого набора называются вейвлетами. Детализирующие подпространства  $W^{(i)}$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ , принято называть вейвлет-пространствами.

Порождающий вейвлет  $\psi(v)$  является элементом пространства  $V^{(1)}$ . Следовательно, найдутся такие числа  $g_l \in \mathbf{R}$ ,  $l \in L$ ,  $L \subset \mathbf{Z}$ , что

$$\psi(v) = \sqrt{2} \sum_{l \in L} g_l \varphi(2v - l). \quad (6.12)$$

Это соотношение является масштабным соотношением для вейвлетов. Оно похоже на масштабное соотношение для скейлинг-функций (6.11), но имеет важное отличие: первое является уравнением (в левой и правой частях находится одна и та же функция), второе – выражение одной функции через другую. Таким образом, порождающий вейвлет  $\psi(v)$  с точностью до значений на множестве меры нуль определяется коэффициентами  $\{g_l, l \in L\}$ , если определена скейлинг-функция  $\varphi(v)$ , а она в свою очередь определяется коэффициентами  $\{h_k, k \in K\}$  соотношения (6.11). Следовательно, система скейлинг-функций и вейвлетов может быть полностью определена двумя наборами коэффициентов  $\{h_k, k \in K\}$  и  $\{g_l, l \in L\}$ .

*Пример.* Построить систему Хаара, соответствующую уравнению (6.10).

*Решение.* Системе Хаара (6.10) соответствуют следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2^{-\frac{1}{2}}, & h_1 &= 2^{-\frac{1}{2}}, \\ g_0 &= -2^{-\frac{1}{2}}, & g_1 &= 2^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Так как набор функций  $\{\nu_l^{(i)}(v); l \in \mathbf{Z}\}$  является ортонормированным базисом в  $L^2(\mathbf{R})$ , то любую функцию  $f(v) \in L^2(\mathbf{R})$  можно единственным образом представить в виде разложения

$$f(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{d,l}^{(i)} \nu_l^{(i)}(v),$$

где  $w_{d,l}^{(i)} = \langle f(v), \nu_l^{(i)} \rangle$ ,  $\psi_{l(v)}^{(i)} = \sqrt{2^i} \psi(2^i v - l)$ ,  $i, l \in \mathbf{Z}$ , что в точности соответствует формулам (6.8), (6.6) и (6.7).

Значения  $w_{d,l}^{(i)}$ ,  $i, l \in \mathbf{Z}$ , называются детализирующими коэффициентами или вейвлет-коэффициентами.

Для любого  $i_0 \in \mathbf{Z}$

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} W^{(i)} = V^{(i_0)},$$

следовательно,

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} W^{(i)} = V^{(i_0)} \oplus \bigoplus_{i=i_0}^{\infty} W^{(i)}.$$

В пространстве  $V^{(i_0)}$  существует базис скейлинг-функций, следовательно, набор функций  $\{\varphi_l^{(i_0)}(v), \psi_l^{(i)}(v)\}; l \in \mathbf{Z}, i \geq i_0\}$  также является ортонормированным базисом в  $L^2(\mathbf{R})$  (такой базис называют комбинированным). Тогда справедливо следующее выражение:

$$f(v) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \nu_l^{(i_0)} \varphi_l^{(i_0)}(v) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{d,l}^{(i)} \psi_l^{(i)}(v), \quad i_0 \in \mathbf{Z}, \quad (6.14)$$

где

$$\nu_l^{(i_0)} = \langle f(v), \varphi_l^{(i_0)} \rangle, \quad \varphi_l^{(i_0)}(v) = \sqrt{2^{i_0}} \varphi(2^{i_0} v - l), \quad i_0, l \in \mathbf{Z}.$$

Полагая  $i_0 = 0$  и обозначая  $\nu_l \equiv \nu_l^{(0)}$ ,  $\varphi_l(v) \equiv \varphi_l^{(0)}(v)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ , получаем в точности формулу (6.9).

Выражение (6.14) можно рассматривать как разложение сигнала  $f(v)$  на две проекции – проекцию на пространство  $V^{(i_0)}$  (первое слагаемое формулы) и проекцию на ортогональное дополнение  $V^{(i_0)}$  до  $L^2(\mathbf{R})$  (второе слагаемое). Структура пространств такова, что проекция сигнала на первое пространство является огрублением или, пользуясь терминологией анализа Фурье,

низкочастотным представлением этого сигнала, а на второе пространство – высокочастотным, т. е. содержащим уточняющую (детализирующую) информацию о сигнале, потерянную при проектировании на пространство  $V^{(i_0)}$ . Очевидно, что чем больше значение  $i_0$ , тем больше информации, содержащейся во втором слагаемом формулы (6.14), перетекает в первое слагаемое. Проекцию на пространство  $V^{(i_0)}$  будем называть представлением (или приближением) сигнала с разрешением  $i_0$ .

4. *Аналог непрерывного преобразования для дискретных сигналов.* Любой дискретный сигнал  $\mathbf{s} = \{s[n]\}$  можно представить в виде кусочно-постоянной функции

$$s(v) = s[n], v \in [n, n + 1), n \in \mathbf{Z}.$$

Применим к такому сигналу непрерывное вейвлет-преобразование (6.1) – (6.2). Распишем скалярное произведение из (6.1), подставив в него (6.2):

$$W_s(a, b) = \left\langle s(v), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{v-b}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(v) \psi\left(\frac{v-b}{a}\right) dv.$$

Подставляя выражение для  $s(v)$ , получаем

$$W_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \int_n^{n+1} \psi\left(\frac{v-b}{a}\right) dv. \quad (6.15)$$

Формально можно вычислить значение  $W_s(a, b)$  для любых вещественных  $a$  (кроме 0) и  $b$ . На самом деле интерес представляют целочисленные сдвиги  $b$  и рациональные положительные масштабируемые коэффициенты  $a$ .

Если же  $\mathbf{s}$  – конечный сигнал длиной  $N$ , то выражение (6.15) превращается в конечную сумму. Рассматриваются только целочисленные сдвиги от 0 до  $N - 1$ . Масштабный коэффициент может быть любым отличным от 0, однако интерес представляет диапазон от 1 до  $N$ , причем для приложений достаточно рассматривать только целые коэффициенты. Получаем

$$W_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \int_n^{n+1} \psi\left(\frac{v-b}{a}\right) dv, a = 1, 2, \dots, N, b = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (6.16)$$

Таким образом, сигналу длиной  $N$  поставлена в соответствие матрица размерности  $N \times N$ .

5. *Диадное преобразование дискретных сигналов.* Из масштабного соотношения (6.11) следует, что любая скейлинг-функция уровня разрешения  $i$  представима в виде линейной комбинации скейлинг-функций уровня  $i + 1$ :

$$\varphi_l^{(i)}(v) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi_l^{(i+1)}(2v - k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi_{2l+k}^{(i+1)}(v), i, l \in \mathbf{Z}. \quad (6.17)$$

Тогда

$$v_l^{(i)} = \left\langle f(v), \varphi_l^{(i)}(v) \right\rangle = \left\langle f(v), \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \varphi_{2l+k}^{(i+1)}(v) \right\rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k v_{2l+k}^{(i+1)}.$$

Аналогично из масштабного соотношения для вейвлетов получаем выражение

$$\psi_l^{(i)} = \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \varphi_l^{(i)}(2v - m) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \varphi_{2l+m}^{(i+1)}, \quad i, l \in \mathbf{Z}, \quad (6.18)$$

и, следовательно,

$$w_{d,l}^{(i)} = \langle f(v), \psi_l^{(i)}(v) \rangle = \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \langle f(v), \varphi_{2l+m}^{(i+1)}(v) \rangle = \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m v_{2l+m}^{(i+1)}.$$

Таким образом, коэффициенты при масштабных функциях и вейвлет-коэффициенты любого уровня разрешения  $i$  выражаются через коэффициенты при скейлинг-функциях уровня разрешения  $i+1$ .

Если коэффициенты при скейлинг-функциях разрешения  $i_1$  определены, то по формулам (6.19) можно вычислить коэффициенты разложения для любого разрешения, меньшего  $i_1$ . Очевидно, что на практике выполняется конечное число шагов. Если прервать вычисления на некотором уровне  $i_0 < i_1$ , то в результате будет получено представление сигнала с разрешением  $i_0$  (т. е. коэффициенты при скейлинг-функциях  $\{v_l^{(i_0)}\}$ ), а также детализирующие коэффициенты  $\{w_{d,l}^{(i)}; i_0 \leq i < i_1\}$ . Получим следующие формулы:

$$v_l^{(i)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} v_{2l+k}^{(i+1)} h_k, \quad w_{d,l}^{(i)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} v_{2l+m}^{(i+1)} g_m, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad i = i_1 - 1, \dots, i_0; \quad v_l^{(i_1)} = s[l]. \quad (6.19)$$

Формулы (6.18) и (6.19) определяют *прямое дискретное диадное вейвлет-преобразование*.

Используя формулы (6.17) и (6.18), можно после ряда преобразований получить выражение для коэффициентов при скейлинг-функциях уровня разрешения  $i+1$  через коэффициенты при скейлинг-функциях и вейвлет-коэффициенты уровня разрешения  $i$ :

$$v_l^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (v_k^{(i)} h_{l-2k} + w_{d,k}^{(i)} g_{l-2k}). \quad (6.20)$$

Имея представление сигнала с разрешением  $i_0$  и набор вейвлет-коэффициентов, полученных по формулам (6.19), можно с помощью рекурсивной формулы (6.20) восстановить сигнал с любым разрешением от  $i_0 + 1$  до  $i_1$ :

$$v_l^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (v_k^{(i)} h_{l-2k} + w_{d,k}^{(i)} g_{l-2k}), \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1. \quad (6.21)$$

Формулы (6.20) и (6.21) определяют *обратное дискретное диадное вейвлет-преобразование*.

Введем несколько иную форму записи для прямого и обратного дискретных диадных преобразований. Примем следующие обозначения:

$$\mathbf{v}_i \equiv \{v_l^{(i)}\}, \quad \mathbf{w}_i \equiv \{w_{d,l}^{(i)}\}, \quad l, i \in \mathbf{Z}.$$

Введем операторы интерполяции  $\uparrow_n[s]$  и децимации  $\downarrow_n[s]$ . Первый оператор из входного сигнала  $s$  оставляет только элементы с индексами  $mn$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ . Второй оператор добавляет после каждого элемента входного сигнала

$n-1$  нулевых элементов. Примем, что при  $n = 0$  и  $n = 1$  оба оператора не изменяют сигнал. Введем также операцию  $\text{rev}\{\mathbf{s}\}$  перенумерации элементов сигнала  $\mathbf{s}$  в обратном порядке (если сигнал бесконечный и определен на всем множестве индексов  $\mathbf{Z}$ , то операция эквивалентна изменению знака индекса каждого элемента сигнала на противоположный).

Формулы (6.19) и (6.22) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = \downarrow_2 [\mathbf{v}_{i+1} * \text{rev}\{\mathbf{h}\}], \quad \mathbf{w}_i = \downarrow_2 [\mathbf{v}_{i+1} * \text{rev}\{\mathbf{g}\}], \quad i \in \mathbf{Z}, \quad (6.22)$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \uparrow_2 [\mathbf{v}_i] * \mathbf{h} + \uparrow_2 [\mathbf{w}_i] * \mathbf{g}, \quad (6.23)$$

где символ  $*$  обозначает операцию свертки.

Наборы коэффициентов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{g}$  называются фильтрами. Фильтр  $\mathbf{h}$  используется для выделения огрубленной (низкочастотной) части сигнала, а фильтр  $\mathbf{g}$  – для выделения детализирующей (высокочастотной) части сигнала. Первый фильтр называют низкочастотным, а второй – высокочастотным.

В терминах  $Z$ -преобразования формулы (6.22) и (6.23) выглядят как

$$v_i(z) = \downarrow_2 [h(z^{-1})v_{i+1}(z)], \quad w_i(z) = \downarrow_2 [g(z^{-1})v_{i+1}(z)], \quad (6.24)$$

$$v_{i+1}(z) = h(z) \uparrow_2 [v_i(z)] + g(z) \uparrow_2 [w_i(z)], \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (6.25)$$

Отметим, что в полученных формулах нигде в явном виде не фигурируют ни скейлинг-функции, ни вейвлеты. Вместо них используются фильтры  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{g}$  (или  $h(z)$  и  $g(z)$ ), импульсными характеристиками которых являются коэффициенты соответствующих масштабных соотношений.

Существует семейство ортогональных вейвлетов Добеши, которое полностью определяется фильтрами. Скейлинг-функции и вейвлеты Добеши – это непрерывные функции, не тождественные нулю на конечном отрезке и нигде на этом отрезке не дифференцируемые.

*Пример.* Найти коэффициенты фильтров Добеши D4.

*Решение.* Коэффициенты фильтров скейлинг-функций и вейвлетов Добеши D4 имеют вид

$$\begin{aligned} h(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3}, \\ g(z) &= g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + g_3 z^{-3} = h_3 - h_2 z^{-1} + h_1 z^{-2} - h_0 z^{-3}, \\ h_0 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Выразим условие обратимости преобразования в терминах фильтровой обработки. Условием обратимости в терминах функций является требование ортонормированности базиса. Преобразование будет обратимо тогда и только тогда, когда при подстановке выражений (6.24) в формулу (6.25) последняя превратится в тождество для любого  $v_{i+1}(z)$ . Можно показать, что для этого достаточно выполнения следующих условий:

$$h(z)h(z^{-1}) + g(z)g(z^{-1}) = 2, \quad h(z)h(-z^{-1}) + g(z)g(-z^{-1}) = 0. \quad (6.26)$$

Вычисление преобразования по формулам (6.19) – (6.21) называется быстрым вейвлет-преобразованием.



Преобразования с помощью формул (6.22) – (6.23) или (6.24) – (6.25) называют *субполосным преобразованием*.

6. *Вейвлет-фреймы*. Диадное вейвлет-преобразование есть разложение по системе вейвлетов, которая является базисом в некотором функциональном пространстве и минимально порождающей это пространство системой. Такое преобразование называют преобразованием, не содержащим избыточной информации. В таком преобразовании содержится ровно столько информации, чтобы преобразование было обратимым. Однако этой информации может оказаться недостаточно для решения задач, где обратное преобразование может и не потребоваться, зато необходим детальный анализ сигнала по его образцу. Например, диадное ортогональное преобразование не инвариантно сдвигу сигнала. Так, преобразования Хаара двух дискретных сигналов  $s_1(z) = z + z^{-1}$  и  $s_2(z) = z^{-1} + z^{-2}$  существенно отличаются друг от друга, хотя  $s_2$  лишь сдвинутая на 1 копия  $s_1$ .

При соблюдении ряда условий диадное преобразование дискретного сигнала конечной длиной  $N$  содержит ровно  $N$  элементов. Такое преобразование не увеличивает объем данных для представления сигнала.

Для непрерывного преобразования справедливо следующее свойство:

$$W_{f(v+\beta)}(a, b) = W_{f(v)}(a, b + \beta), \beta \in \mathbf{R}, \quad (6.27)$$

т. е. образ сдвинутого на любое действительное число сигнала совпадает со сдвигом на то же число образа несдвинутого сигнала.

Тем же свойством для целочисленных сдвигов обладают и преобразования для дискретного сигнала.

Примером преобразования, обладающего избыточной информацией, являются вейвлет-фреймы.

Вейвлет-фреймы – это преобразование, вычисляемое по формулам (6.1) – (6.2) для  $a$  и  $b$  вида

$$a = 2^{-i}, i \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{R}.$$

Уровни разрешения преобразования выбираются так же, как и для диадного преобразования – вейвлеты соседних уровней являются сжатыми (растянутыми) в два раза копиями друг друга, но на каждом уровне разрешения разложение сигнала ведется по всем сдвигам вейвлета, как в случае непрерывного преобразования. Для дискретных сигналов разложение на каждом уровне ведется по всем целочисленным сдвигам.

Формулы, реализующие вейвлет-фреймы, имеют вид

$$\begin{aligned} w_{i-m}(z) &= g(z^{-1})v_{i-m+1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \\ v_{i-m+1}(z) &= \begin{cases} \uparrow_{2(m-2)} [h(z^{-1})]v_i(z), & m = 2, 3, \dots, \\ \mathbf{s}, & m = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Если необходимо реализовать обратное преобразование, достаточно отметить, что вейвлет-фреймы – это диадное преобразование, к которому добавлена дополнительная информация. Следовательно, из представления требуется лишь выделить те коэффициенты, которые соответствуют диадному

преобразованию, и выполнить восстановление сигнала по формулам обратного диадного преобразования.

*Пример.* Построить масштабную  $\varphi(t)$  и вейвлет  $\psi(t)$  функции Добеши D4.

*Решение.* Для вычисления воспользуемся итерационными формулами

$$\varphi^{(i+1)}(v) = h_0\varphi^{(i)}(2v) + h_1\varphi^{(i)}(2v-1) + h_2\varphi^{(i)}(2v-2) + h_3\varphi^{(i)}(2v-3)$$

и

$$\psi^{(i+1)}(v) = g_0\varphi^{(i)}(2v) + g_1\varphi^{(i)}(2v-1) + g_2\varphi^{(i)}(2v-2) + g_3\varphi^{(i)}(2v-3).$$

В качестве начального приближения  $\varphi^{(0)}(v)$  выберем масштабную функцию Хаара. На рис. 6.1, 6.2 показаны последовательные приближения функций Добеши.

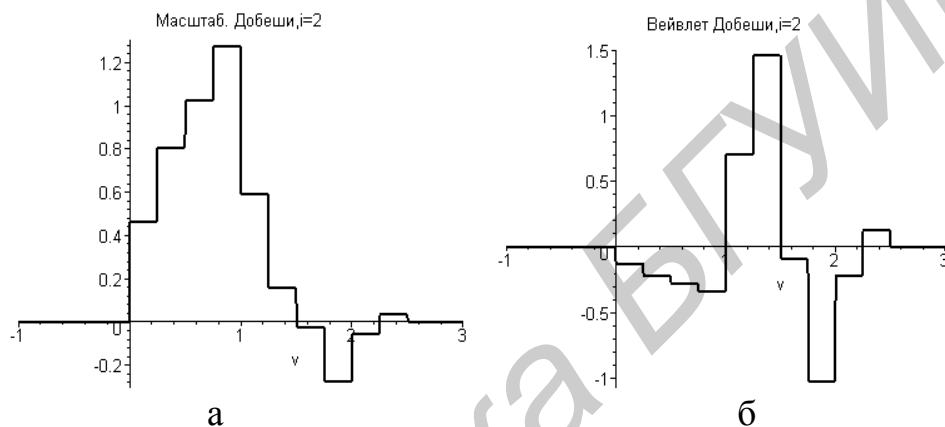


Рис. 6.1. Масштабная и вейвлет-функции Добеши, приближение  $i = 2$

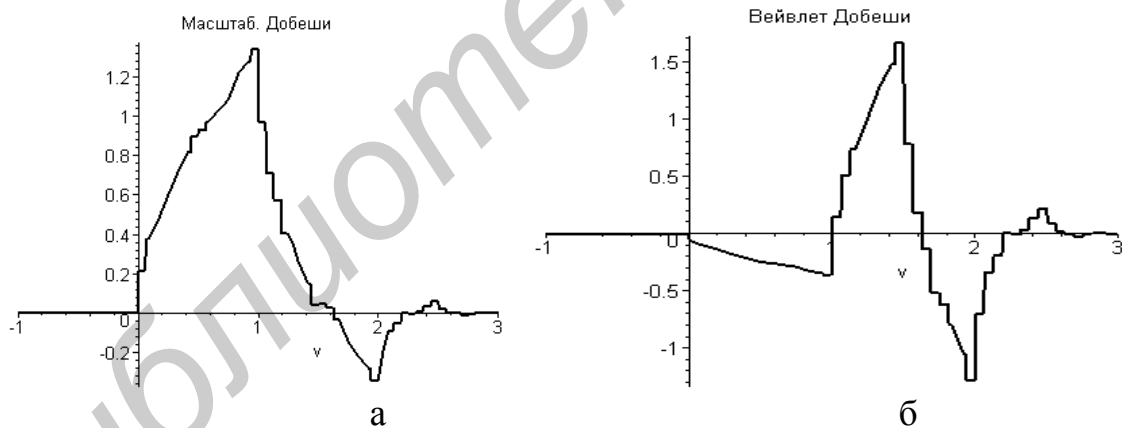


Рис. 6.2. Масштабная и вейвлет-функции Добеши, приближение  $i = 4$

*Пример.* Вектор данных имеет вид  $\mathbf{s} = [1,3; 1; -1; -1,3]$ . Используя алгоритм быстрого вейвлет-преобразования, провести вейвлет-анализ в базисе функций Хаара.

*Решение.* Напомним, что для алгоритма вейвлет-анализа справедливы соотношения

$$V^{(i)} = V^{(i-1)} \oplus W^{(i-1)} \text{ и } V^{(i)} = V^{(0)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(i-1)}.$$

Для системы функций Хаара алгоритм вычислений коэффициентов преобразования имеет вид

$$v_l^{(j-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{2l}^{(j)} + v_{2l+1}^{(j)}) \text{ и } w_l^{(j-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{2l}^{(j)} - v_{2l+1}^{(j)}).$$

Используя рекуррентные соотношения, можно построить следующую схему вычислений:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{s} = [1, 3; 1; -1; -1, 3] = \mathbf{v}^{(2)} & \longrightarrow & \mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[2, 3; -2, 3] = & \longrightarrow & \mathbf{x}^{(0)} = [0] \\
 & & [1, 62363; -1, 62363] & & \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & \mathbf{w}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 3; -0, 3] = & & \mathbf{w}^{(0)} = [2, 3] \\
 & & [0, 2121; -0, 2121] & & 
 \end{array}$$

Быстрое вейвлет-преобразование (БВП) дает результат

$$[1, 3; 1; -1; -1, 3] \rightarrow \text{БВП} \rightarrow [v^{(0)}, w^{(0)}, w^{(1)}] = [0; 2, 3; 0, 2121; -0, 2121].$$

*Пример.* Используя результаты предыдущего примера, рассмотреть возможность сжатия информации.

*Решение.* В предыдущем примере используем только существенные коэффициенты. Коэффициенты с малым значением приравниваем к нулю, т. е. используем ряд

$$[0; 2, 3; 0; 0].$$

Используя обратное быстрое вейвлет-преобразование, получаем: восстановленный ряд

$$[1, 15; 1, 15; -1, 15; -1, 15].$$

## 6.2. Вейвлет-анализ временных рядов

*Практические аспекты вейвлет-анализа.* Введенные выше определения интегрального вейвлет-преобразования трудно использовать на практике, поскольку при обработке результатов измерений основными объектами преобразования являются не функции, заданные на всей оси времени, а временные ряды, длина которых всегда конечна. По этой причине вместо указанных теоретических понятий следует ввести их практические аналоги-оценки.

Будем считать, что временной ряд задан значениями функции, следующими друг за другом с постоянным шагом:

$$x_n = x[n] = x(t_n), \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Для оценки вейвлет-преобразования этой последовательности воспользуемся выражением

$$W_A(a, b) = \frac{1}{q(a, b)} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^* \left( \frac{t_n - b}{a} \right),$$

где

$$q(a, b) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{B} \left( \frac{t_n - b}{a} \right)^2}.$$

Здесь  $B$  – коэффициент, характерный для заданного вейвлета.

Функция  $W_A(a, b)$  вычисляется на дискретном множестве значений аргументов  $a_i$  и  $b_j$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_a - 1$ ;  $j = 0, 1, \dots, N_b - 1$ . Введем оценку локального спектра энергии:

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2. \quad (6.29)$$

Эту функцию обычно называют *скалограммой* (*scalogram*), подчеркивая тем самым её способность описывать распределение энергии по масштабам. Поскольку это распределение локализовано во времени с помощью параметра сдвига  $b$ , иногда используют название локальной скалограммы.

На основе скалограммы можно вести также и оценку глобального спектра энергии:

$$G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j), \quad (6.30)$$

где  $N^*$  – число точек, по которому осуществляется осреднение.

Такую функцию называют *скейлограммой* (*scalegram*). Скейлограмма в вейвлет-анализе является прямым аналогом сглаженной периодограммы в Фурье-анализе.

*Вейвлет-преобразование шума.* В спектральном анализе временных рядов выделение сигнала из шума производится с заданной вероятностью на основе некоторых статистических критериев.

Будем считать, что временной ряд

$$x_n = x(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

представляет собой выборку некоррелированных значений случайной величины, распределенной по нормальному закону, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_0^2$  (дискретный белый шум):

$$\langle x_p, x_q \rangle = \begin{cases} \sigma_0^2, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Получим закон распределения отсчетов скалограммы по масштабам вейвлетов Морле. Введя обозначение  $\tau_n = \frac{t_n - b}{a}$ , представим скалограмму следующим образом:

$$S(a, b) = P^2(a, b) + Q^2(a, b),$$

где

$$P(a, b) = \frac{1}{q(a, b)} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{\tau_n}{\alpha^2}} \cos 2\pi\tau_n,$$

$$Q(a, b) = \frac{1}{q(a, b)} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{\tau_n}{\alpha^2}} \sin 2\pi\tau_n.$$

Нетрудно показать, что при фиксированном  $b$  функции  $P(a, b)$  и  $Q(a, b)$  представляют собой нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} Z(a, b),$$

где

$$Z(a, b) = \frac{1}{q^2(a, b)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\tau_n}{\alpha^2}}.$$

Введем в рассмотрение нормированную величину

$$s(a, b) = \frac{S(a, b)}{\sigma_0^2 Z(a, b)}.$$

Величина  $2s(a, b)$  имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы, откуда следует, что нормированная скалограмма  $s(a, b)$  представляет собой случайную величину по переменной  $a$ , закон распределения которой имеет вид

$$p(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty.$$

Знание закона распределения нормированной скалограммы позволяет получить критерий выделения сигнала из шума. Вероятность того, что отсчеты нормированной скалограммы превзойдут заданную величину  $\Pi$ , определяется формулой

$$\Pr \{s(a, b) > \Pi\} = \int_{\Pi}^{\infty} p(x) dx = e^{-\Pi}.$$

Задавая уровень значимости  $q \ll 1$ , определяющий вероятность редкого события (превышения отсчета нормированной скалограммы заданной величины), для порога обнаружения сигнала имеем

$$\Pi_q = -\ln q.$$

Другими словами, с вероятностью  $p = 1 - q$  можно констатировать, что те значения скалограммы  $S(a, b)$ , которые удовлетворяют неравенству

$$S(a, b) > \sigma_0^2 Z(a, b) \Pi_q,$$

генерируются не шумом, а сигналом.

### 6.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Постройте вейвлеты Добеши D6.
2. Покажите, как связаны кратко-масштабный анализ и вейвлет-системы.
3. Основная идея вейвлет-преобразования сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами локализованной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Приведите примеры таких функций.

4. Функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{при остальных } t \end{cases}$$

имеет компактный носитель  $[-1, 1]$  и удовлетворяет масштабному уравнению

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t+1) + \varphi(2t) + \frac{1}{2}\varphi(2t-1).$$

Определите коэффициенты вейвлет-фильтра и его частотную характеристику.

5. Масштабирующая функция равна  $\varphi(t) = \sqrt{3} \sum_n h_n \varphi(3t - n)$ . Покажите, что целочисленные сдвиги  $\{\varphi(t - n)\}$  порождают ортонормированный базис пространства  $V_0$ .

6. Расщепите функцию

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < t < 1, \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

в сумму масштабирующей функции и вейвлета, т. е. представьте в виде разложения по базису пространства  $V_0 \oplus W_0$ .

7. Напишите программу алгоритма быстрого вейвлет-преобразования в базисе функций Хаара.

8. Поясните назначения скалограммных и скейлограммных функций в вейвлет-анализе.

9. Проведите сравнительный анализ вейвлет-функций Хаара и Добеши.

## 7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ВИЛЕНКИНА – КРЕСТЕНСОНА

### 7.1. Преобразование Виленкина – Крестенсона

Зададим длину функции  $N = n^s$ ,  $n, s \geq 2$ . Используя систему счисления по смешанному основанию, число  $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  можно записать как

$$m = m_{s-1}n^{s-1} + m_{s-2}n^{s-2} + \dots + m_0, \quad m_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad i = \{0, \dots, s-1\}.$$

Числу  $m$  сопоставим  $n$ -код  $(m)_n = (m_{s-1}, m_{s-2}, \dots, m_0)_n$ . Аналогичным образом зададим для числа  $j$  его  $n$ -код  $(j)_n = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_n$ . Определим операцию скалярного произведения векторов  $(m)_n$  и  $(j)_n$  как

$$\langle (m)_n, (j)_n \rangle = \sum_{i=0}^{s-1} m_i j_i.$$

Сигналы

$$vkf_k(j) = W_n^{\langle (k)_n, (j)_n \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $W_n$  – первообразный корень из единицы, называются дискретными функциями Виленкина – Крестенсона (ВК). Функции ВК определяются на периоде  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Далее они продолжаются периодически на все целые  $j \in \mathbb{Z}$ . Сигналы  $vkf_0, vkf_1, vkf_{N-1}$  образуют ортогональный базис в  $C_N$ . При этом  $\|vkf_k\|^2 = N$  при всех  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Частным случаем функций ВК при  $n = 2$  являются функции Уолша – Адамара:

$$\text{had}(k, j) = (-1)^{\langle (k)_2, (j)_2 \rangle}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

*Связь с ДПФ.* Введем квадратную матрицу  $V_N$  с элементами

$$V_N[k, j] = vkf_k(j), \quad k, j = 0, 1, \dots, N-1$$

В матричной форме ДПФ имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}_{vkf} = \mathbf{V}_N \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{V}_N^{-1} \mathbf{X}_{vkf}.$$

Пусть  $\mathbf{F}_n$  – матрица ДПФ  $n$ -го порядка с элементами  $F_n[k, j] = W_n^{kj} = e^{-j \frac{2\pi}{n} kj}$ ,  $k, j = 0, 1, \dots, n-1$  и  $\mathbf{F}_n^{(s)}$  – ее  $s$ -я кронекеровская степень. Нетрудно показать, что  $\mathbf{V}_N = \mathbf{F}_n^{(s)}$ .

Дискретное преобразование ВК определяется как

$$X_{vkf}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] vkf_k(m) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_n^{\langle (k)_n, (m)_n \rangle}.$$

Возьмем  $(k)_n = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_n$  и  $(j)_n = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_n$ . Определим операции поразрядного сложения и вычитания по модулю  $n$ :  $p_i = k_i + j_i \bmod n = k_i \oplus_n j_i$ ,  $m_i = k_i - j_i \bmod n = k_i -_n j_i$ . Операции поразрядной арифметики обладают теми же групповыми свойствами, что и обычные операции сложения и вычитания.

Характерной особенностью функций ВК является присущее им специфическое понятие сдвига. Для сигналов, представленных в базисе ВК, сдвиг как во временной, так и в спектральной области может рассматриваться как  $n$ -сдвиг  $x[m \oplus_n j]$ .

Важным свойством энергетического спектра в базисе функций ВК является то, что он не изменяется при  $n$ -сдвиге.

В соответствии с понятием сдвига определяют свертку и корреляцию. Сигналам  $x, y \in C_N$  сопоставим функцию взаимной  $n$ -корреляции:

$$r_{xy}^{(n)}(j) = \sum_{m=0}^{N-1} x[j \oplus_n m] y^*[m], \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

а также  $n$ -свертку:

$$x(m) \underset{n}{*} y(m) = \sum_{j=0}^{N-1} x \underset{n}{*} [m-j] y[j].$$

Определенным  $n$ -корреляции и  $n$ -свертке присущи те же свойства, что и обычным функциям корреляции и свертки.

В разных базисах автокорреляционная функция одного и того же сигнала имеет различный вид. Это позволяет выбирать оптимальный базис для решения задач такого типа, как обнаружение и различение сигнала в шумах.

Сигнал  $x$  назовем дельта- $n$ -коррелированным, если  $r_{xx}^{(n)}(j) = \|x\|^2 \delta_N(j)$ .

Сигналы  $x$  и  $y$  назовем  $n$ -некоррелированными, если  $r_{xy}^{(n)}(j) \equiv 0$ .

Регулярный класс дельта- $n$ -коррелированных сигналов образует обобщенные сигналы Франка – Крестенсона. Они строятся следующим образом. Рассмотрим матрицу Виленкина – Крестенсона:

$$A_N[i_1, i_0] = v k f_{i_1}(i_0), \quad i_1, i_0 \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

и построим на ее основе матрицу  $\Phi_N$  с элементами

$$\Phi_N[i_1, i_0] = a(i_1) A_N[\pi(i_1), i_0 \oplus_n p(i_1)],$$

где  $a(i_1)$  – комплексные коэффициенты;  $\pi$  – перестановка чисел  $0, 1, \dots, N-1$ ;  $p(i_1)$  – некоторые числа из множества  $0, 1, \dots, N-1$ .

Сигнал Франка – Крестенсона  $\varphi(j)$  принадлежит пространству  $C_{N^2}$  и на основном периоде  $\{0, 1, \dots, n^{2s} - 1\}$  определяется как

$$\varphi(i_1 N + i_0) = \Phi_N[i_1, i_0], \quad i_1, i_0 \in \{0, \dots, N-1\}$$

или

$$\varphi(i_1 N + i_0) = a(i_1) W_n^{<(\pi(i_1))_s, (i_0)_s>} W_n^{<(\pi(i_1))_s, (p(i_1))_s>}.$$

Варьируя параметры  $a, \pi, p$  при ограничениях  $|a(i_1)| \equiv 1$ , можно строить ансамбли, состоящие из заведомо дельта- $n$ -коррелированных сигналов.



## 7.2. Спектральная обработка псевдослучайных сигналов

Связь матриц Адамара с конечными полями Галуа  $GF(q)$ . Усеченная матрица Адамара изоморфна с точностью до перестановки матрице циклических сдвигов псевдослучайной последовательности.

Определим усеченную матрицу Адамара  $H'_N$  размером  $(N-1) \times (N-1)$ , полученную из исходной матрицы путем усечения на первый столбец:

$$H_N = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & H'_N \end{bmatrix}.$$

Определим псевдослучайную линейную рекуррентную последовательность  $\{s[n]; n = 0, 1, \dots, N-2\}$ , полученную из элементов конечного поля Галуа  $GF(q^m)$   $\{\alpha^i; i = 0, 1, \dots, N-2\}$  по правилу

$$s[n] = (-1)^{\text{tr}(\alpha^n)},$$

где  $\text{tr}\beta = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^{q^i}$  – след элемента  $\beta \in GF(q^m)$  в поле  $GF(q)$ ;  $\alpha$  – примитивный

элемент поля  $GF(q^m)$ .

Например, для поля  $GF(2^3)$ , построенного по полиному  $f(x) = x^3 + x + 1$ ,

$n$	$\rightarrow$	$\alpha^n$	$=$	дв. код	$\rightarrow$	дес. число
0	$\rightarrow$	$\alpha^0$	$=$	100	$\rightarrow$	4
1	$\rightarrow$	$\alpha^1$	$=$	010	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	$\alpha^2$	$=$	001	$\rightarrow$	1
3	$\rightarrow$	$\alpha^3$	$=$	110	$\rightarrow$	6
4	$\rightarrow$	$\alpha^4$	$=$	011	$\rightarrow$	3
5	$\rightarrow$	$\alpha^5$	$=$	111	$\rightarrow$	7
6	$\rightarrow$	$\alpha^6$	$=$	101	$\rightarrow$	5

получаем следующую последовательность:

$$\begin{array}{cccccccc} n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ s[n] & = & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1. \end{array}$$

Матрица циклических сдвигов последовательности имеет вид

$$[s[i+j]_{\text{mod } N-1}] = \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

знак «точка» соответствует начальной фазе (задержке) сигнала.

Определим перестановку символов псевдослучайной последовательности как

$$\pi_M : n \rightarrow (\alpha^n - 1)_{\text{дес.}}$$

Для рассматриваемого примера перестановка имеет вид

$$\pi_M = \begin{pmatrix} n & \Rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \alpha^n & \Rightarrow & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перестановка строк отображает матрицу-циркулянт псевдослучайной последовательности в усеченную матрицу Адамара.

Для рассматриваемого примера имеем

$$P_M : \{[s[i+j]_{\text{mod } N-1}]\} = P_M : \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & \cdot -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Многоканальная обработка на основе спектральных преобразований.* В задачах радиолокации и систем передачи информации часто возникает необходимость оценить задержку (фазу) периодически повторяющейся псевдослучайной последовательности, принимаемой на фоне аддитивного шума. Цифровая система обработки в этом случае должна вычислять все значения взаимно корреляционной функции сигнала и его опорной копии, т. е. поддерживать многоканальный корреляционный прием сигнала. При больших длинах сигнала число каналов становится значительным и прямые методы вычисления корреляционной функции потребуют больших вычислительных затрат ( $\sim N$ ). Покажем, что, используя связь структуры псевдослучайного кода с матрицами Уолша – Адамара, вычислительную сложность можно значительно понизить.

Действительно, если отсчеты псевдослучайной последовательности длиной  $N = 2^m - 1$  переставить с помощью оператора  $P_M$ , то любой циклический сдвиг сигнала отобразится в усеченную на первый символ функцию Уолша. Если на месте усеченного символа искусственно разместить ноль, то получим последовательность из  $N = 2^m$  отсчетов, размерность которой совпадает с размерности быстрого преобразования Уолша. Значения спектра Уолша – Адамара такой последовательности будут полностью эквивалентны значениям корреляционной функции обрабатываемого сигнала.

*Пример.* Пусть принимается кодовая последовательность вида

$$\{s[n]\} = 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1.$$

Вычислить значения периодической автокорреляционной функции последовательности с помощью преобразования Уолша – Адамара.

*Решение.* Автокорреляционная функция сигнала вычисляется по формуле

$$R(l) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]s[n+l]$$

и принимает значения  $R(0) = N, R(l \neq 0) = -1$ .

Перестановка последовательности по ранее рассмотренному правилу дает

$$P_M: \{s[n]\} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1.$$

Искусственное размещение нуля приводит размер обрабатываемого сигнала к восьми отсчетам:  $\{x[n]\} = 0, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$ .

Спектр Уолша – Адамара такой последовательности равен

$$[X_H(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Координаты максимального спектрального коэффициента преобразования Уолша – Адмара несут информацию о величине задержки (циклического сдвига) начальной фазы кодовой последовательности.

Если имеют дело с многоуровневыми сигналами (кодами), тогда подобная перестановка справедлива и для функций Виленкина – Крестенсона.

Рассмотрим возможность обработки сложных сигналов в базисе Виленкина – Крестенсона на следующем примере.

Псевдослучайная четверичная последовательность, построенная над полем  $GF(4^2)/p(v) = v^2 + v + \omega$ , имеет вид

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{N-1}) = (0, 1, 1, \omega^2, 1, 0, \omega, \omega, 1, \omega, 0, \omega^2, \omega^2, \omega, \omega^2),$$

где  $N = 4^2 = 16$ , символы  $\{\omega^i\}$  принадлежат полю  $GF(2^2)/p(v) = v^2 + v + 1$  и имеют следующие эквиваленты в кодах десятичной системы счисления:

$$(\omega^0)_{\text{дес}} = 1; (\omega^1)_{\text{дес}} = 2; (\omega^2)_{\text{дес}} = 3.$$

Образуем новый комплексный сигнал  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{N-1})$  следующим образом. Возьмем комплексное число  $W_4 = \exp(-j2\pi/4)$ . Будем возводить число  $W_4$  в степени, определяемые кодами десятичного представления символов  $\omega^i$

кодовой последовательности  $\mathbf{c}$ :  $s_i = W_4^{(\omega^i)_{\text{дес}}}$ . Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (s_1, \dots, s_{N-1}) = (W_4^{(\omega^i)_{\text{дес}}}; i = 1, \dots, N-1) = \\ &= (W_4^0, W_4^1, W_4^1, W_4^3, W_4^1, W_4^0, W_4^2, W_4^2, W_4^1, W_4^2, W_4^0, W_4^3, W_4^3, W_4^2, W_4^3). \end{aligned}$$

На рис. 7.1 показаны автокорреляционная функция, вычисленная по формуле  $r_{ss}(m) = \sum_{i=0}^{N-2} s_{i+1} s_{(i+m) \bmod (N-1)+1}^*$ , и спектр ДПФ сигнала  $\mathbf{s}$ .

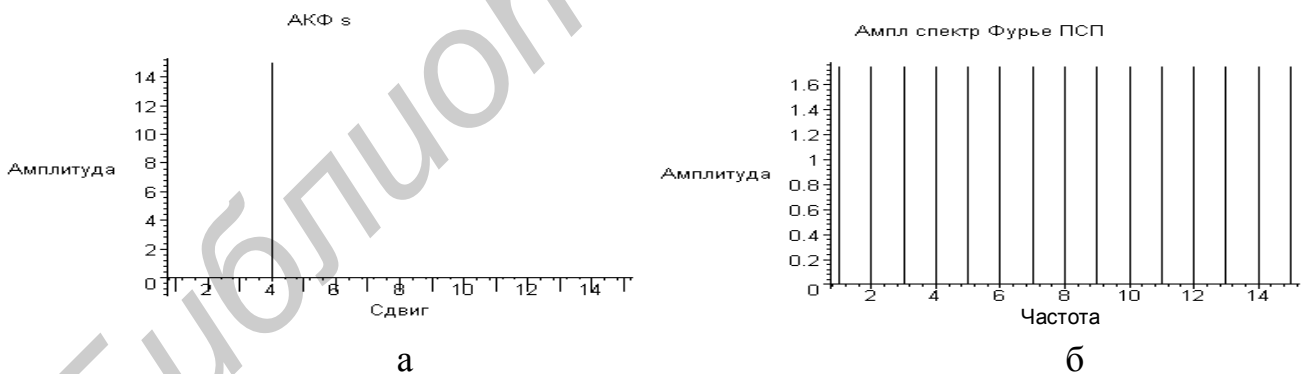


Рис. 7.1. Автокорреляционная функция и спектр ДПФ<sub>16</sub> последовательности  $\mathbf{s}$

Как видно из рисунка, последовательность  $\mathbf{s}$  относится к классу псевдослучайных комплексных сигналов с двухуровневой автокорреляционной функцией.

Представим структуру элементов поля  $\{\alpha^n\}$  в кодах четверичной и десятичной систем счисления:

четверичный

$n$	$\rightarrow$	$\alpha^n$	$=$	код	$\rightarrow$	дес. число
				$4^0$ $4^1$		
0	$\rightarrow$	$\alpha^0$	$=$	1 0	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	$\alpha^1$	$=$	0 1	$\rightarrow$	4
2	$\rightarrow$	$\alpha^2$	$=$	2 1	$\rightarrow$	6
3	$\rightarrow$	$\alpha^3$	$=$	2 3	$\rightarrow$	14
4	$\rightarrow$	$\alpha^4$	$=$	1 1	$\rightarrow$	5
5	$\rightarrow$	$\alpha^5$	$=$	2 0	$\rightarrow$	2
6	$\rightarrow$	$\alpha^6$	$=$	0 2	$\rightarrow$	8
7	$\rightarrow$	$\alpha^7$	$=$	3 2	$\rightarrow$	11
8	$\rightarrow$	$\alpha^8$	$=$	3 1	$\rightarrow$	7
9	$\rightarrow$	$\alpha^9$	$=$	2 2	$\rightarrow$	10
10	$\rightarrow$	$\alpha^{10}$	$=$	3 0	$\rightarrow$	3
11	$\rightarrow$	$\alpha^{11}$	$=$	0 3	$\rightarrow$	12
12	$\rightarrow$	$\alpha^{12}$	$=$	1 3	$\rightarrow$	13
13	$\rightarrow$	$\alpha^{13}$	$=$	1 2	$\rightarrow$	9
14	$\rightarrow$	$\alpha^{14}$	$=$	3 3	$\rightarrow$	15
15	$\rightarrow$	$\alpha^{15}$	$=$	1 0	$\rightarrow$	1

Используя коды десятичного представления, определим перестановку  $\pi_{vkf} : n \rightarrow (\alpha^{n-1})_{\text{дес}}$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$ , и для  $n = 0$  перестановку  $(0 \rightarrow 0)$ :

$$\pi_{vkf} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 14 & 5 & 2 & 8 & 11 & 7 & 10 & 3 & 12 & 13 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Применим перестановку  $\pi_{vkf}$  к коду  $\mathbf{s}$  для  $n = 1, \dots, N - 1$ , запишем 0 на нулевой позиции. Тогда получим последовательность

$$P_{vkf} : \mathbf{s} \rightarrow$$

$$(0, W_4^0, W_4^0, W_4^0, W_4^1, W_4^1, W_4^1, W_4^1, W_4^2, W_4^2, W_4^2, W_4^2, W_4^3, W_4^3, W_4^3, W_4^3) = \mathbf{s}_{vkf}.$$

Образует матрицу функций Виленкина – Крестенсона размером  $16 \times 16$  по правилу

$$[vkf] = [W_4^{nk}] \otimes [W_4^{nk}]; n, k = 0, 1, \dots, 15.$$

Сравнивая полученную последовательность с функциями Виленкина – Крестенсона матрицы  $[vkf]$ , замечаем, что последовательность  $s_{vkf}$  совпадает по форме (кроме первого символа) с одной из функций Виленкина – Крестенсона.

Циклические сдвиги последовательности  $s$  после перестановки будут давать такой же результат совпадения с другими функциями ВК. На рис. 7.2 показаны спектры сигнала  $s$  в базисе функций ВК до и после перестановки.

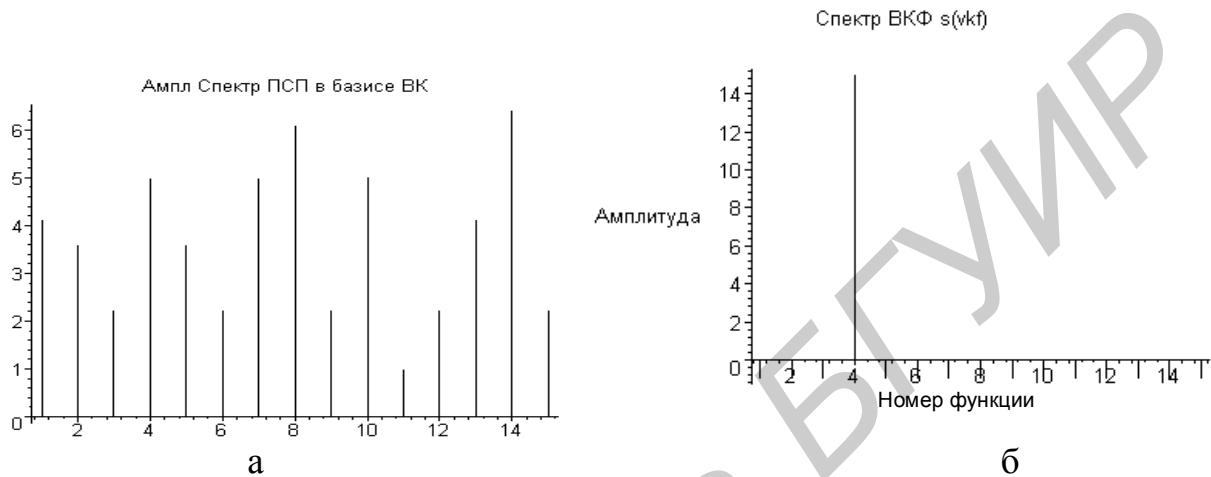


Рис. 7.2. Спектра сигнала  $s$  в базисе ВКФ:  
 а – до перестановки; б – после перестановки

Как видно из рисунка спектр переставленного сигнала имеет точно такую же форму, как и автокорреляционная функция. Это обстоятельство позволяет рекомендовать спектральную обработку в базисе функций ВК для вычисления корреляционных значений псевдослучайных сигналов.

### 7.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Вычислите спектры последовательности вида  $x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$  в базисах Фурье, Виленкина – Крестенсона, Уолша – Адамара. Проведите сравнительный анализ спектров.

2. Вычислите автокорреляционные функции последовательности  $x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$  в различных спектральных базисах. Как можно использовать различный вид корреляционных функций при решении задач обработки сигнала?

3. Кодовая последовательность, построенная над полем  $GF(3^3)/v^3 + 2v + 1$ , имеет вид  $c = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 2, 1, 2, 2, 1, 0, 2, 2, 2)$ . Постройте алгоритм спектрально-корреляционной обработки такого сигнала в базисе Виленкина – Крестенсона.

4. Поясните свойства сигнала Франка – Крестенсона. Изменяются ли эти свойства, если обработку сигнала вести в базисе Фурье (Уолша)?

5. Напишите программы обработки псевдослучайных сигналов с помощью алгоритмов быстрого преобразования Уолша – Адамара и Виленкина – Крестенсона.

Библиотека БГУИР

## ЛИТЕРАТУРА

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М. : Техносфера, 2006.
2. Рабинер, Л. Теория и применения цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978.
3. Лосев, В. В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки : учеб. пособие для вузов / В. В. Лосев. – Минск : Выш. шк., 1990.
4. Гольденберг, Л. М. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Высш. шк., 1990.
5. Глинченко, А. С. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие. В 2 ч. / А. С. Глинченко. – Красноярск : Изд-во КГТУ, 2001.
6. Основы цифровой обработки сигналов : курс лекций / А. И. Солонина, [и др]. – СПб. : БХВ – Петербург, 2003.
7. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989.
8. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989.
9. Блейхут, Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989.
10. Трахтман, А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М. : Сов. радио, 1975.
11. Петько, В. И. Цифровая фильтрация и обработка сигналов : учеб. пособие / В. И. Петько, В. Е. Куконин, Н. Б. Шихов. – Минск : Універсітэцкае, 1995.
12. Вариченко, Л. В. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов / Л. В. Вариченко, В. Г. Лабунец, М. А. Раков. – Киев : Наук. думка, 1986.
13. Перов, В. П. Прикладная спектральная теория оценивания / В. П. Перов. – М. : Наука, 1982.
14. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао ; пер. с англ. – М. : Связь, 1980.
15. Коэн Л. Время-частотные распределения. Обзор / Л. Коэн. // ТИИЭР, 1989. – Т. 77, №10. – С. 72–121.
16. Чуи, Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи ; пер. с англ. – М. : Мир, 2001.
17. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер ; пер. с англ. – М. : БИНОМ, 2008.



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ</b> .....	4
1.1. Дискретные сигналы .....	4
1.2. Связь алгебры дискретных последовательностей и алгебры полиномов Лорана .....	5
1.3. Контрольные вопросы и задачи .....	10
<b>2. ДИСКРЕТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ</b> .....	11
2.1. Дискретное преобразование Фурье .....	11
2.2. Дискретные экспоненциальные функции .....	13
2.3. Свойства дискретного преобразования Фурье .....	15
2.4. Разновидности дискретного преобразования Фурье .....	19
2.5. Теоретико-полиномиальные преобразования .....	20
2.6. Дискретные ортогональные преобразования на конечных абелевых группах .....	24
2.7. Контрольные вопросы и задачи .....	29
<b>3. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ</b> .....	30
3.1. Быстрое преобразование Фурье по смешанному основанию .....	30
3.2. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье по основанию два .....	32
3.3. Дискретное преобразование Фурье на основе алгоритмов свертки и корреляции .....	36
3.4. Быстрое преобразование Фурье, полиномиальное представление .....	42
3.5. Алгоритмы Горнера и Герцеля .....	44
3.6. Контрольные вопросы и задачи .....	47
<b>4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ</b> .....	48
4.1. Спектральный анализ в одной точке .....	48
Спектральный анализ с применением дискретного преобразования Фурье .....	48
Использование весовых окон при спектральном анализе .....	51
4.4. Спектральный анализ стационарных гармонических сигналов .....	52
4.5. Спектральный анализ на основе дискретного преобразования Фурье с дробными величинами .....	56
4.6. Анализ сигналов в частотно-временной области .....	60
4.7. Контрольные вопросы и задачи .....	64
<b>5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ</b> .....	65
5.1. Коррелограммный и периодограммный методы оценки спектральной плотности мощности .....	66
5.2. Оценка спектра на основе окон сфероидальных функций .....	69
5.3. Контрольные вопросы и задачи .....	74

<b>6. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СИГНАЛОВ</b> .....	76
6.1. Основы теории вейвлет-преобразований и вейвлет-анализа.....	76
6.2. Вейвлет-анализ временных рядов.....	87
6.3. Контрольные вопросы и задачи .....	90
<b>7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ВИЛЕНКИНА – КРЕСТЕНСОНА</b> .....	91
7.1. Преобразование Виленкина – Крестенсона .....	91
7.2. Спектральная обработка псевдослучайных сигналов.....	93
7.3. Контрольные вопросы и задачи .....	98
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	99

Библиотека БГУИР

*Учебное издание*

**Саломатин Сергей Борисович**

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ,  
ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА СИГНАЛОВ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Н. В. Гриневич*  
Корректор *Л. А. Шичко*  
Компьютерная верстка *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 01.03.2010. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 5,6. Тираж 150 экз. Заказ 335.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.  
220013, Минск, П. Бровки, 6.