УДК 621.396.96

ВЫБОР СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ БАЙЕСОВСКИХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ

А.С. ХРАМЕНКОВ, С.Н. ЯРМОЛИК

Военная академия Республики Беларусь
Независимости, 220, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 25 марта 2015

Для аппроксимации многомерного распределения решающей статистики устройства радиолокационного распознавания в качестве весовой функции предлагается использовать оценки одномерных сечений анализируемой плотности. Приведена методика получения оценок одномерных распределений квадратичной формы, используемых в качестве весовых функций. Описан способ получения системы неклассических ортогональных полиномов по заданной весовой функции. Представлены результаты аналитического расчета условных вероятностей распознавания при использовании предложенных весовых функций для аппроксимации многомерного распределения решающей статистики и результаты, полученные с помощью математического моделирования.

Ключевые слова: многомерная плотность вероятности, весовая функция, полиномиальная аппроксимация, характеристическая функция.

Введение и постановка задачи

Байесовское устройство радиолокационного распознавания объектов M классов включает в себя многоканальное устройство обработки сигналов и устройство принятия решения [1]. В большинстве практических случаев наблюдаемые случайные реализации принятых сигналов характеризуются гауссовской плотностью вероятности [2, 3]. В этом случае на выходе каждого из М каналов обработки формируется значение смещенного квадратичного функционала [2]. При наблюдении объекта g-го класса выходной сигнал k-го канала обработки определяется выражением $z_{k/g} = \xi_{g0}\mathbf{R}^k\xi_{g0}^{*\text{т}} + a_k$, ***где*** $\xi_{g0} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ – дискретная выборка принятого сигнала размером N, состоящая из аддитивной смеси сигнала, отраженного от объекта g-го класса $\xi_g = (\xi_{1g}, \ldots, \xi_{Ng})$ и фона $\xi_0 = (\xi_{10}, \ldots, \xi_{N0})$; ξ_i, $i = \overline{1, N}$ – i-я комплексная амплитуда входной реализации ξ_{g0}, распределенная по нормальному закону, с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_{g+0} = \mathbf{R}_g + \mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_g = \overline{\xi_g^{*\text{T}}\xi_g}$ (индекс * – комплексное сопряжение; Т – операция транспонирования, $g = \overline{1, M}$) – корреляционная матрица сигнала, $\mathbf{R}_0 = \overline{\xi_0^{*\text{T}}\xi_0}$ – корреляционная матрица фона; $\mathbf{R}^k$ – матрица обработки; a_k – смещение ($k = \overline{1, M}$). Правило принятия решения о наблюдении объекта k-го класса имеет вид:
если $z_{k/g} > z_{l/g}$ для всех $l = \overline{1, M}$, $l \neq k$, то верно A_k^*.

Эффективность функционирования устройств радиолокационного распознавания объектов характеризуется значениями условных вероятностей правильного и ложного распознавания [1, 2]**.** Значения рассматриваемых вероятностей принимаемых решений определяются путем интегрирования многомерных плотностей решающей статистики. Для анализа характеристик распознавания решающее правило представляют в следующем виде [2]:

если $z_{kl/g} > 0$ для всех $l = \overline{1, M}$, $l \neq k$, то верно A_k^*,

где $z_{kl/g} = z_{k/g} - z_{l/g} = \xi_{g0}\mathbf{R}^{kl}\xi_{g0}^{*\text{т}} + a_{kl}$ – межканальная разность; $\mathbf{R}^{kl} = \mathbf{R}^k - \mathbf{R}^l$ – межканальная матрица обработки; $a_{kl} = a_k - a_l$ – межканальная разность смещений.

В этом случае вероятности правильного и ложного распознавания объекта k-го класса при наблюдении цели g-го класса определяются выражениями:

$$D_k = \int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} p_{k/k}(z_{k1/g}, \ldots, z_{kl/g}, \ldots, z_{kM/g})dz_{k1/g}\ldots dz_{kl/g}\ldots dz_{kM/g}, \quad k, g = \overline{1, M}, \; l \neq k, \tag{1}$$

$$F_{k/g} = \int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} p_{k/g}(z_{k1/g}, \ldots, z_{kl/g}, \ldots, z_{kM/g})dz_{k1/g}\ldots dz_{kl/g}\ldots dz_{kM/g}, \quad k, g = \overline{1, M}, \; l \neq k, \tag{2}$$

где $p_{k/g}(\mathbf{z}) = p_{k/g}(z_{k1/g}, \ldots, z_{kl/g}, \ldots, z_{kM/g})$ – условная плотность вероятности случайных величин $z_{kl/g}$, формируемых при наблюдении объекта g-го класса.

Отсутствие точного аналитического описания закона распределения $p_{k/g}(\mathbf{z})$ обуславливает необходимость приближенного представления многомерной плотности вероятности случайной величины **z** с помощью усеченного ряда, основанного на семействе ортогональных полиномов и их весовых функциях [3, 4].

На основе известного разложения двумерного распределения в ряды по ортогональным полиномам [3, 4] в [5] приведено выражение для многомерной плотности вероятности $p_{k/g}(\mathbf{z})$:

$$p_{k/g}(\mathbf{z}) = \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{M} \varphi_l(z_{kl/g}) \sum_{t1=0}^{\infty}\ldots\sum_{tM=0}^{\infty} c_{t1\ldots tM} Q_{t1}(z_{k1/g})\ldots Q_{tM}(z_{kM/g}), \tag{3}$$

где $\varphi_l(z_{kl/g})$, $l = \overline{1, M}$, $l \neq k$ – весовые функции используемого полинома; $Q_n(z_{kl/g}) = \sum_{p=0}^{n} q_{n/p}^{kl/g} z_{kl/g}^p$ – n-й ортонормированный полином; $q_{n/p}^{kl/g}$ – коэффициенты n-го ортонормированного полинома, стоящего у переменной $z_{kl/g}$ в степени p; $c_{t1\ldots tM}$ – весовые коэффициенты разложения в ряд.

Методика использования полиномиальных рядов для аппроксимации многомерного распределения (3) характеризуется относительной простотой и доступностью. В связи с этим на первый план выходит выбор наиболее предпочтительной системы базисных функций для обеспечения максимальной скорости сходимости ряда. На сегодняшний момент не существует оптимального правила выбора весовых функций $\varphi_l(z_{kl/g})$, однако известно, что скорость сходимости полиномиального ряда напрямую определяется степенью соответствия выбранной системы весовых функций аппроксимируемому распределению [3, 4]. В статье предлагается способ получения наиболее предпочтительных весовых функций и рассматривается методика синтеза соответствующей системы ортогональных полиномов, обеспечивающих высокое качество аппроксимации многомерных распределений $p_{k/g}(\mathbf{z})$ и быструю сходимость степенного ряда.

Основная часть

Выбор весовой функции. Для качественной аппроксимации многомерного распределения $p_{k/g}(\mathbf{z})$ целесообразно каждой одномерной плотности вероятности $p_l(z_{kl/g})$ максимально точно подобрать подходящую систему ортогональных полиномов со своей весовой функцией $\varphi_l(z_{kl/g})$. Чаще всего, исходя из имеющихся априорных сведений о типе распределения, при аппроксимации ограничиваются рассмотрением разложений, основанных на использовании полиномов с весовой функцией в виде нормального закона распределения (ряд Грама-Шарлье, ряд Эджворта, разложение Мелера в ряд Эрмита, разложение Корниша-Фишера) [3–5]. Исследования показали, что применительно к радиолокационным классификаторам одномерные сечения многомерной плотности $p_{k/g}(\mathbf{z})$ значительно отличаются от нормального закона распределения, что существенно затрудняет практическое использование названных систем полиномов. Для подтверждения сказанного выше на рис. 1 приведены результаты аппроксимации распределения $p_l(z_{kl/g})$ с помощью ряда Эрмита, рассчитанного для следующих условий: отраженный сигнал характеризуется дисперсией $\sigma_c^2 = 25$ и экспоненциальной нормированной корреляционной функцией флуктуаций, межканальная матрица обработки $\mathbf{R}^{kl}$ размером N = 10, 100 формируется с шагом дискретизации $\Delta\tau = 4$ мс; отношение сигнал-шум ρ = 10.

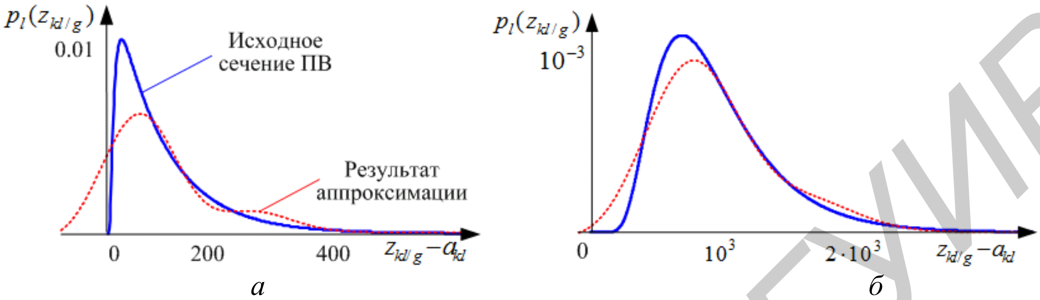


Рис. 1. Аппроксимация $p_l(z_{kl/g})$ с помощью полиномов Эрмита (n = 4) для: *а* – N = 10; *б* – N = 100

При аппроксимации унимодальных распределений, отличных от нормального, возможно использовать ряд, основанный на полиномах Лагерра [3, 5] (рис. 2). Рассматриваемые полиномы характеризуются положительным интервалом ортогональности, что в значительной мере затрудняет их практическое использование. К тому же, для обеспечения качественной аппроксимации усеченным рядом Лагерра требуется большое число членов ряда.

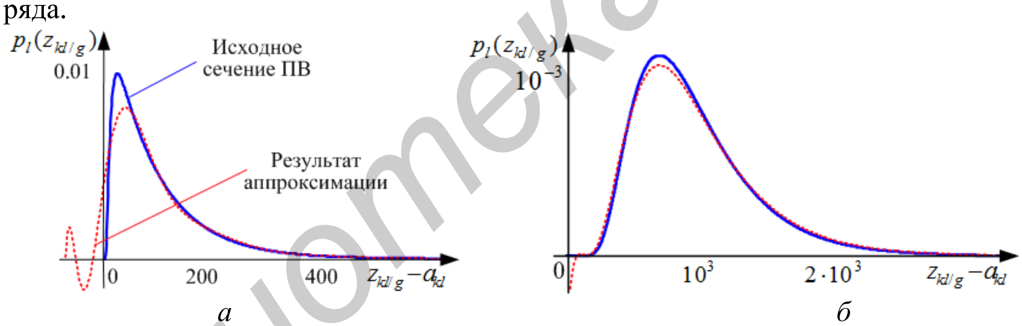


Рис. 2. Аппроксимация $p_l(z_{kl/g})$ с помощью полиномов Лагерра (n = 30) для: *а* – N = 10; *б* – N = 100

В [6] рассматриваются неклассические полиномы Поллачека, использование которых позволяет приемлемо аппроксимировать любой двусторонний закон распределения, значительно отличающийся от нормального (рис. 3). Недостатком предлагаемого подхода является необходимость поиска оптимальных значений двух параметров функции Поллачека [6]. При этом имеющийся диапазон изменения параметров весовой функции в ряде практически важных случаев не позволяет обеспечить требуемое качество аппроксимации.

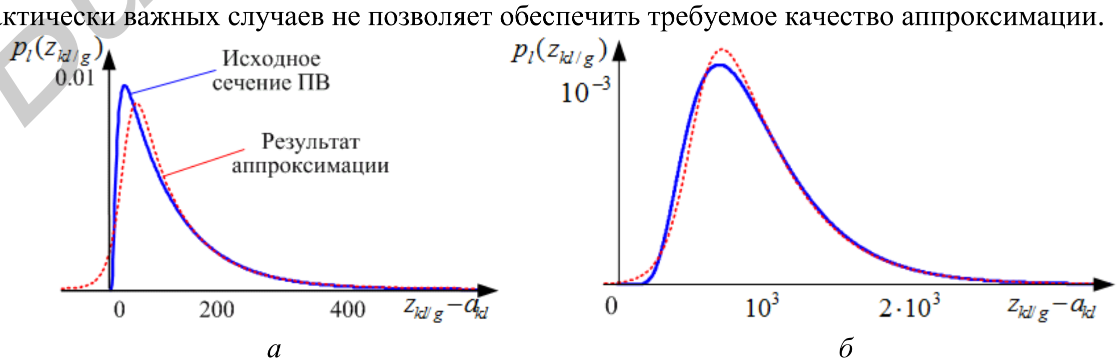


Рис. 3. Аппроксимация $p_l(z_{kl/g})$ с помощью полиномов Поллачека (n = 1) для: *а* – N = 10; *б* – N = 100

Анализ выражений усеченного аппроксимирующего ряда (3) показывает, что весовые функции $\varphi_l(z_{kl/g})$ могут рассматриваться как одномерные сечения многомерной плотности $p_{k/g}(\mathbf{z})$. Поэтому в качестве весовой функции $\varphi_l(z_{kl/g})$ предлагается использовать оценки одномерных сечений многомерной плотности $\hat{p}_l(z_{kl/g})$, формируемые для анализируемых условий наблюдения. Одна из первых попыток получения аналитического выражения для распределения квадратичной формы от стационарного гауссовского процесса $\hat{p}_l(z_{kl/g})$ предпринята в [7] и базируется на вычислении значений характеристической функции $\theta_z(\nu)$ с помощью теории вычетов. Однако полученная методика характеризуется сложностью реализации и не нашла практического применения. В [8] предложен способ получения оценки $\hat{p}_l(z_{kl/g})$, также основанный на преобразовании ее характеристической функции. Описанный подход характеризуется относительной простотой и позволяет получить оценку распределения, наиболее точно соответствующую анализируемой плотности вероятности $p_l(z_{kl/g})$.

Представление одномерных распределений решающей статистики в устройствах радиолокационного распознавания.

В основу получения оценок плотности вероятности одномерной случайной величины $z_{kl/g}$ положим методику, приведенную в [8]. Известно [3, 4], что плотность вероятности выражается через ее характеристическую функцию:

$$\hat{p}_l(z_{kl/g}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_z(\nu)\exp(-j\nu z_{kl/g})d\nu .$$

На основе формулы Эйлера это выражение может быть представлено в виде

$$\hat{p}_l(z_{kl/g}) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}\theta_z(\nu)\big(\cos(\nu z_{kl/g}) - j\sin(\nu z_{kl/g})\big)d\nu + \int_{0}^{+\infty}\theta_z(\nu)\big(\cos(\nu z_{kl/g}) - j\sin(\nu z_{kl/g})\big)d\nu\right).$$

Заменив в первом слагаемом переменную интегрирования ν на $-\nu$ и с учетом того, что $\theta_z^*(\nu) = \theta_z(-\nu)$, получим:

$$\hat{p}_l(z_{kl/g}) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}\big(\theta_z(\nu) + \theta_z^*(\nu)\big)\cos(\nu z_{kl/g})d\nu - j\int_{0}^{+\infty}\big(\theta_z(\nu) - \theta_z^*(\nu)\big)\sin(\nu z_{kl/g})d\nu\right). \qquad (4)$$

Характеристическая функция случайной величины $z_{kl/g}$ на выходе канала обработки при нормальнораспреденном комплексном входном сигнале ξ_{g0} определяется выражением [9]:

$$\theta_z(\nu) = \frac{\exp(j\nu a_{kl})}{\det[\mathbf{I} - j\nu\chi]} = A(\nu) + jB(\nu), \qquad (5)$$

где ν – некоторая вещественная переменная; $\mathbf{I}$ – единичная матрица; $\chi = \mathbf{R}_{g0}\mathbf{R}^{kl}$ – определяющая матрица; $A(\nu)$ – действительная часть характеристической функции; $B(\nu)$ – мнимая часть характеристической функции.

Подставив (5) в (4), получим окончательное выражение для одномерного распределения:

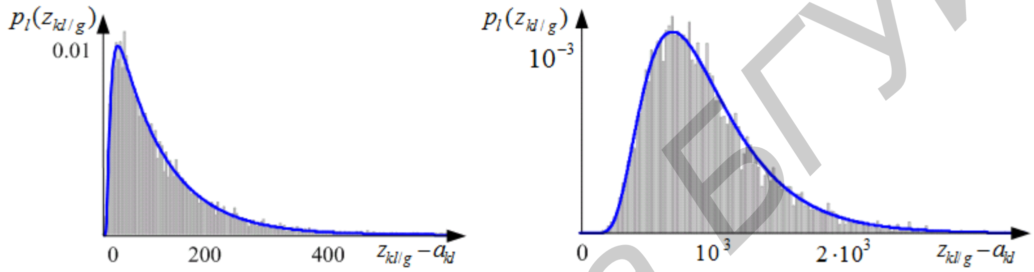
$$\hat{p}_l(z_{kl/g}) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}A(\nu)\cos(\nu z_{kl/g})d\nu + \int_{0}^{+\infty}B(\nu)\sin(\nu z_{kl/g})d\nu\right), \; -\infty \le z_{kl/g} \le +\infty. \qquad (6)$$

Таким образом, оценка $\hat{p}_l(z_{kl/g})$ сводится к поиску реальной и мнимой частей характеристической функции и затрудняется лишь нахождением определителя $\det[\mathbf{I} - j\nu\chi]$. Расчет $\det[\mathbf{I} - j\nu\chi]$ при каждом значении ν может быть организован по-разному [9]. В [8] предлагается представить определяющую матрицу χ в виде диагональной. При этом определитель такой матрицы будет равен произведению ее диагональных элементов (собственных значений c): $\det[\mathbf{I} - j\nu\boldsymbol{\chi}] = \prod_{n=1}^{N}(1 - j\nu c_n)$, где N – размерность определяющей матрицы $\boldsymbol{\chi}$; c – собственные значения определяющей матрицы $\boldsymbol{\chi}$.

С учетом вышеизложенного, выражения для $A(\nu)$ и $B(\nu)$ принимают следующий вид:

$$A(\nu) = \mathrm{Re}\left[\frac{\exp(j\nu a_{kl})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - j\nu c_n)}\right], \quad B(\nu) = \mathrm{Im}\left[\frac{\exp(j\nu a_{kl})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - j\nu c_n)}\right]. \qquad (7)$$

Таким образом, для получения оценки одномерной плотности вероятности $\hat{p}_l(z_{kl/g})$ требуется найти собственные значения c определяющей матрицы $\boldsymbol{\chi}$, получить действительную и мнимую части характеристической функции (7) и подставить их в выражение (6). На рис. 4 приведены оценки распределения $\hat{p}_l(z_{kl/g})$, найденные по указанной методике и гистограммы анализируемой плотности вероятности $p_l(z_{kl/g})$.



а *б*

Рис. 4. Оценка $\hat{p}_l(z_{kl/g})$ и гистограмма $p_l(z_{kl/g})$ для: *а* – N = 10; *б* – N = 100.

Сформированные оценки одномерных распределений предлагается использовать в качестве весовых функций для каждого анализируемого сечения многомерной плотности вероятностей: $\varphi_l(z_{kl/g}) = \hat{p}_l(z_{kl/g})$. Выбранная весовая функция обеспечивает наилучшее качество среди рассмотренных и максимальную скорость сходимости ряда.

Синтез неклассических ортогональных полиномов, соответствующих выбранной весовой функции.

Используемые для аппроксимаций вероятностных распределений семейства полиномов (3) неразрывно связаны с соответствующими весовыми функциями [3, 4, 10]. Выбранная весовая функция $\varphi_l(z_{kl/g})$, в свою очередь, полностью определяет соответствующую систему ортогональных многочленов. Для их определения предлагается использовать возможность представления многочлена на основе определителей Грама n-го порядка ($n \ge 1$) и степенных моментов весовой функции [10]. В этом случае искомый n-й ортогональный полином, соответствующий оцененной одномерной плотности вероятности $\hat{p}_l(z_{kl/g})$, выступающей в роли весовой функция $\varphi_l(z_{kl/g})$, определяется выражением:

$$Q_n(z_{kl/g}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n}} \cdot \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & z_{kl/g} & \dots & z_{kl/g}^{\,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n}}(r_{n/n}^{kl/g} z_{kl/g}^{n} + \dots + r_{n/1}^{kl/g} z_{kl/g} + r_{n/0}^{kl/g}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\cdot\Delta_n}} \cdot R_n(z_{kl/g}), \qquad (8)$$

где $\Delta_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix}$ – определитель Грама n-го порядка ($\Delta_n \neq 0$);

$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_l(z_{kl/g}) z_{kl/g}{}^i dz_{kl/g}$, $(i = 0, \ldots, 2n)$ – i-й момент используемого одномерного распределения.

Для нахождения коэффициентов $r_{n/p}^{kl/g}$ полинома $R_n(z_{kl/g})$ (8) можно воспользоваться алгебраическим свойством ортогональных многочленов [10]. Для этого необходимо провести нормировку полинома $R_n(z_{kl/g})$ так, чтобы коэффициент при главном члене $r_{n/n}^{kl/g} = 1$, тогда полиномы вычисляются по трехчленной рекуррентной формуле:

$$R_{n+1}(z_{kl/g}) = (z_{kl/g} - \alpha_n) R_n(z_{kl/g}) - \gamma_n R_{n-1}(z_{kl/g}),$$

где $\alpha_n = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} z_{kl/g} p_l(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) dz_{kl/g}}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_l(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) dz_{kl/g}}$, $\gamma_n = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} p_l(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) R_n(z_{kl/g}) dz_{kl/g}}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_l(z_{kl/g}) R_{n-1}(z_{kl/g}) R_{n-1}(z_{kl/g}) dz_{kl/g}}$ – коэффициенты нормировки. При этом для $n = 0$ $R_{-1}(z_{kl/g}) = 0$.

Приведенные выражения (6) и (8) позволяют синтезировать требуемое семейство неклассических ортонормированных полиномов, соответствующее текущим условиям наблюдения.

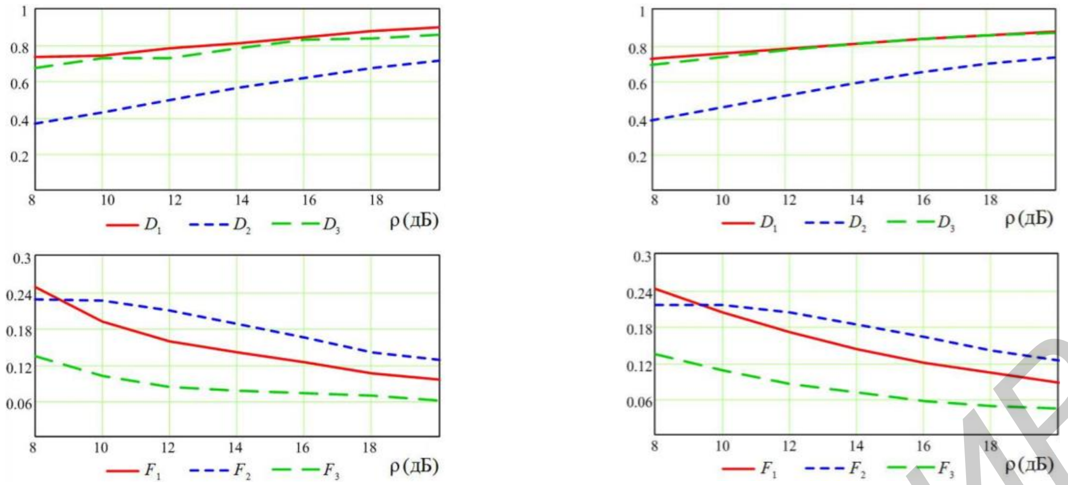
Результаты расчета показателей качества распознавания объектов.

Для проверки качества аппроксимации многомерного распределения $p_{k/g}(\mathbf{z})$ с помощью предложенной системы весовых функций был произведен расчет вероятностей распознавания объектов 3-х классов. При этом наблюдались зашумленные 10-элементные коррелированные радиолокационные портреты объектов, характеризующиеся экспоненциальной формой корреляционной функции. Полуширина главного лепестка корреляционной функции каждого из классов соответственно равнялась $\tau_{c1} = 200$ мс, $\tau_{c2} = 80$ мс и $\tau_{c3} = 30$ мс. Для анализируемого диапазона отношений сигнал-шум при расчетах условных вероятностей правильного D_k (1) и ложного распознавания $F_{k/g}$ (2) использована методика, основанная на оценивании распределений одномерных сечений и синтезе системы ортогональных полиномов. Результирующие показатели качества распознавания определялись известными [2] выражениями:

$$D_k = F_{k/k},\ F_k = \frac{1}{2} \sum_{g=1, g \neq k}^{3} F_{k/g},\ k = 1 \ldots 3.$$

Результаты аналитических расчетов в виде зависимости вероятностей распознавания от значения отношения сигнал-шум, приведены на рис. 5, *а*.

Полученные результаты были подтверждены методом статистического моделирования процесса принятия решения системой распознавания, работающей по реализациям входных портретов с аналогичными параметрами наблюдаемых объектов. Результаты численного математического моделирования приведены на рис. 5, *б*. Высокая степень схожести результатов аналитического расчета и статистического моделирования подтверждают высокое качество аппроксимации результирующего закона распределения при использовании весовых функций в форме оценок одномерных распределений решающей статистики.



а *б*

Рис. 5. Условные вероятности принятия решений при радиолокационном распознавании объектов: *а* – результаты аналитического расчета; *б* – результаты статистического моделирования

Заключение

Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная методика получения весовой функции и синтеза соответствующей системы ортогональных полиномов существенно расширяет возможности известных полиномиальных разложений многомерных распределений, обеспечивает высокое качество аппроксимации за счет оптимизации базисных весовых функций, является практически реализуемой и позволяет определять вероятностные показатели качества устройств радиолокационного распознавания.

ORTHOGONAL POLYNOMS CHOICE FOR REPRESENTATION OF A SOLVING STATISTICS MULTIDIMENSIONAL DISTRIBUTION OF BAYESIAN RADAR RECOGNITION DEVICES

A.S. KHRAMIANKOU, S.N. YARMOLIK

Abstract

For approximation of a solving statistics multivariant distribution in the radar-tracking recognition device as a weight function is used evaluations of one-dimensional cuts analyzed denseness. The deriving technique of weight function estimation is reduced. The getting method of nonclassical orthogonal polynomials system on the set weight function is described. Analytical calculation results of recognition conditional probabilities are presented at use of the offered weight function for approximation of solving statistics multivariant distribution and results getting by means of statistical modelling.

Список литературы

1. *Горелик А.Л., Барабаш Ю.Л., Кривошеев О.В.* Селекция и распознавание на основе локационной информации. М., 1990.
2. *Охрименко А.* Основы радиолокации и радиоэлектронная борьба. Ч.1. Основы радиолокации. М., 1983.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1989.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М., 1982.
5. *Шаляпин С.В.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2000. Т. 1. № 1. С. 12–21.
6. *Ярмолик С.Н., Шаляпин С.В.* // Докл. БГУИР. 2003. Т. 1. № 3. С. 28–32.
7. *Проскурин В.И.* // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 7. С. 1335–1340.
8. *Леховицкий Д.И., Флексер П.М., Полишко С.В.* // Прикладная радиоэлектроника. 2011. Т. 10. № 4. С. 456–461.
9. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. М., 1962.
10. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1976.