

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических систем

Д. Л. Ходыко, С. Б. Саломатин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Методическое пособие по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«Цифровая обработка сигналов»
для студентов радиотехнических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Минск 2008

УДК 621.391.23(075.8)
ББК 32.811.3 я 73
Х 69

Рецензент
доц. кафедры защиты информации,
канд. техн. наук Н. В. Колбун

Ходыко, Д. Л.

Х 69 Моделирование линейных дискретных систем : метод. пособие по выполнению лаб. работ по дисц. «Цифровая обработка сигналов» для студ. радиотех. спец. днев. и заоч. форм обуч. / Д. Л. Ходыко, С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 2008. – 28 с. : ил.
ISBN 978-985-488-262-8

Рассматриваются линейные дискретные системы на примере фильтров с конечной и бесконечной импульсными характеристиками. Приводятся примеры описания линейных дискретных систем через разностные уравнения и передаточные характеристики. Показаны примеры моделирования дискретных систем в среде Matlab.

УДК 621.391.23(075.8)
ББК 32.811.3 я 73

ISBN 978-985-488-262-8

© Ходыко Д. Л., Саломатин С. Б., 2008
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2008

Содержание

1. Введение в Matlab	4
1.1. Начало работы с Matlab	5
2. Описание линейных дискретных систем	6
2.1. Уравнения в конечных разностях.....	6
2.3. Z-преобразование	9
2.3. Моделирование и анализ временных рядов.....	10
3. Примеры вычисления Z-преобразования и моделирования уравнений в конечных разностях	11
3.1. Примеры вычисления Z-преобразования.....	11
3.2. Расчет импульсной характеристики с помощью разностного уравнения	12
3.3. Расчет импульсной характеристики по коэффициентам разностного уравнения	13
3.4. Вычисление реакции ЛДС на входное воздействие на основе разностного уравнения	14
3.5. Вычисление реакции ЛДС на основе уравнения свертки	15
3.6. Расчет АЧХ и ФЧХ фильтра.....	17
4. Введение в Simulink	18
4.1. Моделирование ЛДС в Simulink.....	20
5. Порядок выполнения работы	24
6. Варианты	24
7. Контрольные вопросы	26
8. Предварительное задание	26
9. Содержание отчета	27
Литература	27

Цель лабораторной работы

1. Исследование линейных разностных уравнений и Z-преобразований.
2. Ознакомление со средой математического моделирования Matlab.
3. Моделирование линейных дискретных систем в среде Matlab.

1. Введение в Matlab

Matlab (MATrix LABoratory) – одна из старейших систем автоматизации математических расчетов, построена на расширенном представлении и применении матричных операций.

Matlab – это высокопроизводительный язык для технических расчетов, включающий вычисления, визуализацию и программирование в удобной среде, где задачи и решения выражаются в форме, близкой к математической. Типичное использование Matlab это:

- математические вычисления,
- создание алгоритмов,
- моделирование,
- анализ данных, исследования и визуализация,
- научная и инженерная графика,
- разработка приложений, включая создание графического интерфейса.

В Matlab важная роль отводится специализированным группам, называемым *toolboxes*. Они очень важны для большинства пользователей Matlab, так как позволяют изучать и применять специализированные методы. *Toolboxes* – это всесторонняя коллекция функций Matlab, которые позволяют решать частные классы задач. *Toolboxes* применяются для обработки сигналов, систем контроля, нейронных сетей, нечеткой логики, вейвлетов, моделирования и т.д.

Система Matlab состоит из пяти основных частей.

Язык Matlab – это язык матриц и массивов высокого уровня с управлением потоками, функциями, структурами данных, вводом–выводом и особенностями объектно-ориентированного программирования. Это позволяет программировать как в «небольшом масштабе» для быстрого создания черновых программ, так и в «большом» для создания больших сложных приложений.

Среда Matlab – это набор инструментов и приспособлений, с которыми работает пользователь или программист Matlab. Она содержит средства для

управления переменных в рабочем пространстве Matlab, вводом–выводом данных, а также для создания, контроля и отладки рабочих программ в Matlab.

Управляемая графика – это графическая система Matlab, которая включает команды высокого уровня для визуализации двух- и трехмерных данных, обработки изображения, анимации и иллюстрированной графики. Она также включает команды низкого уровня, позволяющие полностью редактировать внешний вид графики так же, как при создании графического пользовательского интерфейса для Matlab-приложений.

Библиотека математических функций – это обширная коллекция вычислительных алгоритмов от элементарных функций до более сложных преобразований.

Программный интерфейс – это библиотека, которая позволяет писать программы на Си и Фортране, которые взаимодействуют с Matlab. Она включает средства для вызова программы из Matlab (динамическая связь), вызывая Matlab как вычислительный инструмент для чтения записи MAT-файлов.

1.1. Начало работы с Matlab

После запуска Matlab на экране появится основное окно системы Matlab, показанное на рис. 1. Указаны и подписаны необходимые и часто используемые окна и ярлычки.

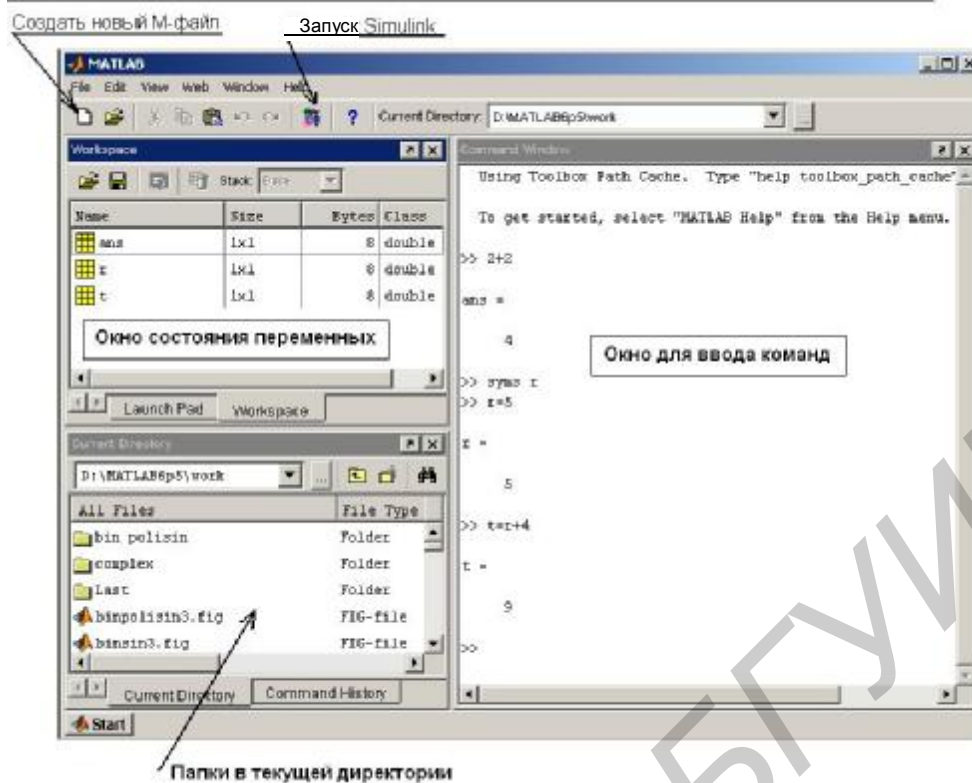


Рис. 1. Окно системы Matlab после запуска и выполнения простых вычислений

Замечание. Для дальнейшей работы необходимо создать новый М-файл. Как в окне Command Windows, так и в М-файле можно записывать команды для вычисления. Расчеты сохранять можно в М-файле. На рис. 2 показан новый М-файл.

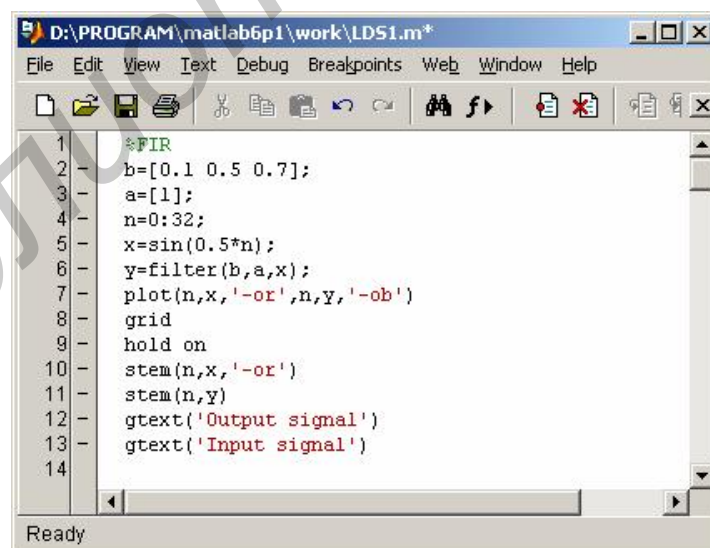


Рис. 2. М-файл

Замечание. Имя файла должно содержать латинские символы, цифры, следующие непосредственно после латинских символов или через подчеркивание, например: Lb.m; Lb1.m; Lb_1.m; My_Lb_1.m.

2. Описание линейных дискретных систем

2.1. Уравнения в конечных разностях

Математическое моделирование обработки сигналов линейной дискретной системой (ЛДС) включает:

- расчет характеристик ЛДС во временной области;
- расчет реакции ЛДС на входное воздействие во временной области.

Приведем в соответствие терминологию и обозначения, используемые в лабораторной работе.

ЛДС описывает соотношения между входом и выходом в виде уравнения или системы уравнений, позволяющих вычислить реакцию на заданное воздействие.

Во временной области ЛДС описывается *уравнением в конечных разностях или разностным уравнением (РУ)*, имеющим вид

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]x[n-i] - \sum_{m=1}^{M-1} a[m]y[n-m], \quad (1)$$

которое задается *вектором коэффициентов воздействия \mathbf{b}* :

$$\mathbf{b} = [b[0] \ b[1] \ b[2] \ b[3] \ \dots \ b[i] \ b[N-1]]$$

и *вектором коэффициентов реакции \mathbf{a}* :

$$\mathbf{a} = [a[0] \ a[1] \ a[2] \ \dots \ a[m] \ a[M-1]].$$

Замечание. Первый элемент вектора \mathbf{a} всегда равен 1: $a[0]=1$. Если это условие не выполняется, тогда необходимо произвести нормировку векторов \mathbf{b} и \mathbf{a} по $a[0]$.

Для выражения (1) $x[n]$ является входным воздействием на ЛДС, а $y[n]$ – реакцией ЛДС на заданное воздействие, n – дискретные отсчеты времени.

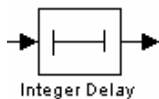
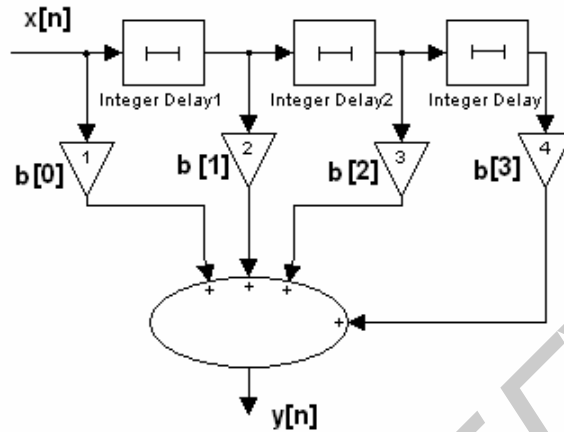
Выходной сигнал $y[n]$ можно определить с помощью формулы *свертки*:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h[i] \cdot x[n-i], \quad (2)$$

где импульсная характеристика $h[i]$ задается в виде вектора конечной последовательности.

РУ описывает работу некоторого фильтра, который можно рассматривать как произвольную систему обработки дискретного сигнала, обладающего свойствами линейности и стационарности.

Уравнение (2) описывает сигнал $y[n]$ на выходе фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ), вид которого показан на рис. 3.



– элемент задержки на один отсчет

Рис. 3. Цифровой нерекурсивный фильтр 3-го порядка

Пример. Найдем реакцию $y[n]$ ЛДС (см. рис. 3) на входное воздействие $x[n]$. Входное воздействие и вектор коэффициентов воздействия имеют следующие значения: $x = [2 \ 4 \ 1 \ 5]$, $b = [4 \ 1 \ 3 \ 6]$.

Решение. Подадим на вход ЛДС входное воздействие и вычислим последовательно реакцию на выходе:

$$y[0] = x[0] \cdot b[0] = 2 \cdot 4 = 8;$$

$$y[1] = x[1] \cdot b[0] + x[0] \cdot b[1] = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 18;$$

$$y[2] = x[2] \cdot b[0] + x[1] \cdot b[1] + x[0] \cdot b[2] = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14;$$

$$y[3] = x[3] \cdot b[0] + x[2] \cdot b[1] + x[1] \cdot b[2] + x[0] \cdot b[3] = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 45;$$

$$y[4] = x[3] \cdot b[1] + x[2] \cdot b[2] + x[1] \cdot b[3] = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 32;$$

$$y[5] = x[3] \cdot b[2] + x[2] \cdot b[3] = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 21;$$

$$y[6] = x[3] \cdot b[3] = 5 \cdot 6 = 30.$$

Уравнение (1) позволяет определить выходной сигнал $y[n]$ на выходе фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).

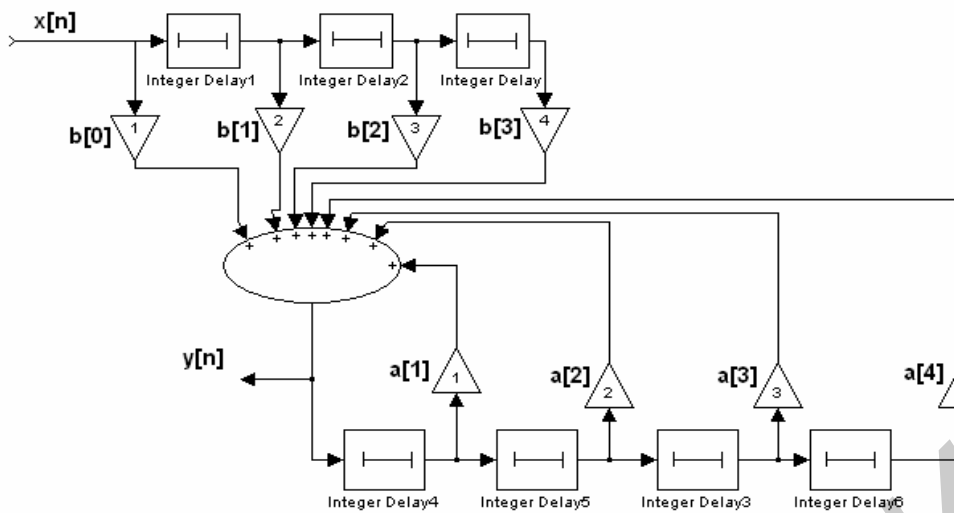


Рис. 4. Прямая реализация цифрового рекурсивного фильтра с обратными связями

Пример. Определим шесть отсчетов импульсной характеристики БИХ-фильтра (рис. 4).

Решение. Подадим на вход последовательность $\underline{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

$$x[0] = 1;$$

$$h[0] = y[0] = x[0] * b[0];$$

$$x[1] = 0;$$

$$h[1] = y[1] = x[1] * b[0] + x[0] * b[1] + y[0] * a[1] = x[0] * b[1] + h[0] * a[1];$$

$$x[2] = 0;$$

$$h[2] = y[2] = x[2] * b[0] + x[1] * b[1] + x[0] * b[2] + y[1] * a[1] + y[0] * a[2] = \\ = x[0] * b[2] + h[1] * a[1] + h[0] * a[2];$$

$$x[3] = 0;$$

$$h[3] = y[3] = x[3] * b[0] + x[2] * b[1] + x[1] * b[2] + x[0] * b[3] + y[2] * a[1] + y[1] * a[2] + y[0] * a[3] = \\ = x[0] * b[3] + h[2] * a[1] + h[1] * a[2] + h[0] * a[3];$$

$$x[4] = 0;$$

$$h[4] = y[4] = h[3] * a[1] + h[2] * a[2] + h[1] * a[3] + h[0] * a[4];$$

$$x[5] = 0;$$

$$h[5] = y[5] = h[4] * a[1] + h[3] * a[2] + h[2] * a[3] + h[1] * a[4].$$

2.2. Z-преобразование

Удобным способом анализа дискретных последовательностей и ЛДС является Z-преобразование. Смысл его заключается в том, что последовательности дискретных отсчетов сигнала $x[n]$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , определяемая следующим выражением:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad (3)$$

где $z = e^{pT_d}$, T_d – интервал дискретизации.

Комплексная функция $X[z]$ определена только для области z , в которой степенной ряд (3) сходится. Условие сходимости: $|x[n]| < cr_0^n$ при любых $n \geq 0$, где $c > 0$ – постоянное действительное число, а $r_0 > 0$ – также действительное число, являющиеся радиусом сходимости, зависящим от свойств последовательности данных $x[n]$, $n = 0 \dots \infty$.

Пример. Найдем Z -преобразование для четырех отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра $h = \{h[0] \ h[1] \ h[2] \ h[3]\}$.

Решение. Подставляем h в выражение (3):

$$H[z] = \sum_{n=0}^3 h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3}.$$

Из полученного выражения можно сделать вывод: если во временной области дана дискретная последовательность конечной длины равностоящих отсчетов импульсной характеристики (сигнала), то Z -преобразование есть результат взвешенного суммирования отсчетов импульсной характеристики (сигнала) с Z -коэффициентами. При этом, сомножитель z^{-n} в Z -области есть эквивалент задержки отсчета сигнала на один такт во временной области.

Применим Z -преобразование к разностному уравнению (1) и запишем передаточную функцию ЛДС:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b[n]z^{-n}}{1 - \sum_{m=1}^{M-1} a[m]z^{-m}}. \quad (4)$$

Замечание. Передаточная функция дискретного фильтра есть отношение Z -преобразований выходного сигнала к входному сигналу и является дробно-рациональной. По полученному выражению (4) удобно составить структурную схему (см. рис. 3, 4), определяющую алгоритм преобразования входной дискретной последовательности в выходную.

Для рис. 4 передаточная характеристика имеет вид

$$H[z] = \frac{\sum_{n=0}^{4-1} b[n]z^{-n}}{1 - \sum_{m=1}^{5-1} a[m]z^{-m}} = \frac{b[0] + b[1]z^{-1} + b[2]z^{-2} + b[3]z^{-3}}{1 - a[1]z^{-1} - a[2]z^{-2} - a[3]z^{-3} - a[4]z^{-4}}.$$

Пример. Найдем передаточную характеристику счетчика без сброса, который накапливает поступающие на его вход положительные и отрицательные импульсы.

Решение. Счетчик является цифровым интегратором и описывается разностным уравнением (1), где $b_0 = 1$, $a_1 = 1$:

$$y[n] = x[n] + y[n-1].$$

Применим к разностному уравнению Z-преобразование. В результате получим

$$Y[z] = X[z] + Y[z]z^{-1}.$$

После простого преобразования запишем

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

2.3. Моделирование и анализ временных рядов

Разностные уравнения широко используются для анализа временных рядов и моделирования случайных процессов с заданными спектрально-корреляционными характеристиками. В качестве входного сигнала чаще всего рассматривают модель дискретного белого шума, называемого возбуждающим процессом. Модель выходного процесса, полученная по выражению (1), называется авторегрессионной со скользящим средним (АРСС). Если используются только коэффициенты $b[i]$ или $a[i]$, тогда модель выходного сигнала будет называться скользящей средней (СС) или авторегрессионной (АР) соответственно. Для примера можно рассмотреть АР-модель, описываемую стохастическим разностным уравнением

$$y[n] = x[n] - \sum_{m=1}^{M-1} a[m]y[n-m],$$

где $x[n]$ – дискретный белый шум.

Корреляционная функция $r[l]$ такого процесса имеет вид

$$M(y[n]y^*[n-l]) = r[l] = \begin{cases} -\sum_{m=1}^{M-1} a[m]r[l-m], & l > 0; \\ -\sum_{m=1}^{M-1} a[m]r[l-m] + s_u^2, & l = 0; \\ r^*[-l], & l < 0, \end{cases}$$

где $M(\cdot)$ – оператор математического ожидания, s_u^2 – мощность возбуждающего процесса.

Спектральная плотность мощности $P(f)$ АР-процесса определяется коэффициентами фильтра $a[i] \in \mathbf{a}$ в соответствии с выражением

$$P(f) = \frac{T S_u^2}{\mathbf{e}^H(f) \mathbf{a} \mathbf{a}^H \mathbf{e}(f)}, \quad \mathbf{e}^H(f) = (1 \exp(-j2\pi fT) \dots \exp(-j2\pi f(M-1)T)),$$

где H – оператор транспонирования и комплексного сопряжения, \mathbf{a} – вектор-столбец коэффициентов фильтра, T – интервал дискретизации.

3. Примеры вычисления Z-преобразования и моделирования уравнений в конечных разностях

3.1. Примеры вычисления Z-преобразования

Задание. Найти Z-преобразование для функции $f[n] = n$.

Решение. Воспользуемся встроенной функцией `ztrans(f)` и напишем программу:

```
clear all;
syms f n a;
f=n
ztrans(f)
```

Результат: $z/(z-1)^2$.

Задание. Найти Z-преобразование для функции $f[n] = e^{an}$.

Решение. Аналогично, как и для вышерассмотренного примера:

```
clear all;
syms f n a;
f=exp(a*n)
ztrans(f)
```

Результат: $z/\exp(a)/(z/\exp(a)-1)$.

3.2. Расчет импульсной характеристики с помощью разностного уравнения

Для того чтобы вычислить импульсную характеристику БИХ (КИХ)-фильтра по РУ, необходимо в качестве воздействия выбрать единичный цифровой импульс – вектор $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots]$, где количество нулей соответствует длине импульсной характеристике (ИХ).

Замечание. Длина импульсной характеристики (ИХ) КИХ-фильтра конечна и равна длине вектора воздействия. Длина импульсной характеристики БИХ-фильтра бесконечна, поэтому будет введено ограничение.

Пример. Вычислим импульсную характеристику КИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = 0.2x[n] + 0.3x[n-1] + 0.4x[n-2] + 0.9x[n-3] + 0.4x[n-4] + 0.3x[n-5] + 0.4x[n-6].$$

Решение. Введем обозначения: h – импульсная характеристика, δ – единичный цифровой импульс длиной N отсчетов (одна единица и $N-1$ нулей). Составим программу в М-файле для вычисления ИХ.

```
b=[0.2 0.3 0.4 0.9 0.4 0.3 0.2];           вектор воздействия
a=[1];                                       вектор реакции
N= length(b);                               длина импульсной характеристики
delta=[1; zeros(N-1, 1)];                  формирует вектор единичного выброса (модель
                                           дельта-функции )
h=filter(b,a,delta);                       расчет импульсной характеристики
stem(0:N-1,h)                              построение графика
grid on                                     наложение сетки
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу $F5$.

Пример. Вычислим импульсную характеристику БИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + 0.7y[n-2] - 0.25y[n-3]. \quad (5)$$

Решение. Используем декретную модель d -импульса и составим программу:

```
b=[1 1 1];                                 вектор воздействия
a=[1 0.7 -0.25];                          вектор реакции
N= length(a)*10;                           ограничение длины импульсной характеристики
delta=[1; zeros(N,1)];
h=filter(b,a,delta);
stem(0:length(delta)-1,h)
grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу $F5$. Результат решения показан на рис. 5.

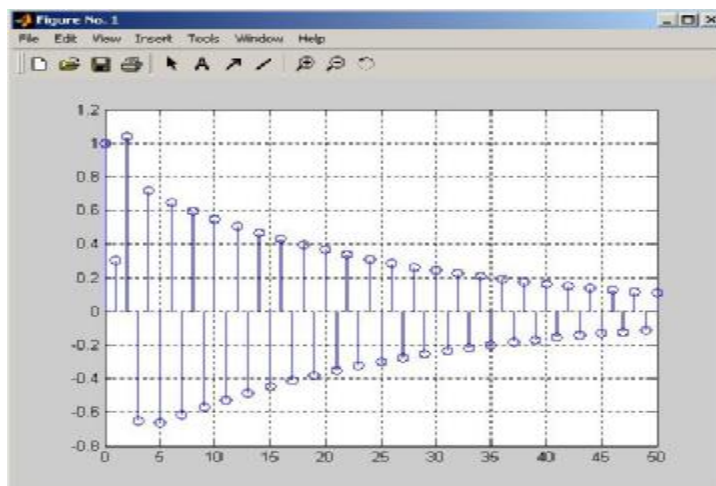


Рис. 5. Импульсная характеристика БИХ-фильтра

3.3. Расчет импульсной характеристики по коэффициентам разностного уравнения

Импульсная характеристика может быть рассчитана непосредственно по коэффициентам разностного уравнения с помощью функции `impz`, формат которой имеет вид

$$[h, nT] = \text{impz}(b, a, N, F_s),$$

где \mathbf{b} – вектор коэффициентов в порядке их следования, \mathbf{a} – вектор коэффициентов в порядке их следования, $a_0 = 1$, N – рассчитываемое количество отсчетов импульсной характеристики, F_s – частота дискретизации сигнала, Гц, \mathbf{h} – вектор-столбец импульсной характеристики, T – интервал дискретизации, $T = 1/F_s$, nT – вектор-столбец значений дискретного времени.

Пример. Определим импульсную характеристику БИХ-фильтра по данным предыдущего примера (5) при $N = 50$ и $F_s = 2000$ Гц.

Решение.

```
b=[1 1 1];
```

```
a=[1 0.7 -0.25];
```

```
N=50;
```

```
Fs=2000;
```

```
[h,nT]=impz(b,a,N,Fs);
```

```
stem(nT,h), grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу $F5$.

Чтобы получить зависимость импульсную характеристику в виде вектора, необходимо записать в строчке `h=impz(b,a,N)` вместо `[h,nT]=impz(b,a,N,Fs)`.

3.4. Вычисление реакции ЛДС на входное воздействие на основе разностного уравнения

Моделирование ЛДС на основе РУ – вычисление реакции на входное воздействие при помощи функции **filter**, формат которой имеет вид `filter (b,a,x)`.

Пример. Рассчитаем реакцию КИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ: $y[n]=0.1x[n]+0.5x[n-1]+0.7x[n-2]$, где $n=0:32$, $2\pi fT = \omega T = 0.5$, $x[n]=\sin(\omega Tn)$.

Решение.

<code>b=[0.1 0.5 0.7];</code>	<i>вектор воздействия</i>
<code>a=[1];</code>	<i>вектор реакции</i>
<code>n=0:32;</code>	<i>дискретные индексы времени</i>
<code>x=sin(0.5*n);</code>	<i>входное воздействие</i>
<code>y=filter(b,a,x);</code>	<i>вычисление реакции</i>
<code>plot(n,x,'-or', n,y,'-ob')</code>	<i>построение графика воздействия и реакции</i>
<code>grid</code>	<i>сетка</i>
<code>hold on</code>	<i>построение двух графиков в одном окне</i>
<code>stem(n,x, '-or')</code>	<i>построение вертикальных линий в графике</i>
<code>stem(n,y)</code>	
<code>gtext('Output signal')</code>	<i>метка для выходного сигнала</i>
<code>gtext('Input signal')</code>	<i>метка для входного сигнала</i>

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*. Результат решения показан на рис. 6.

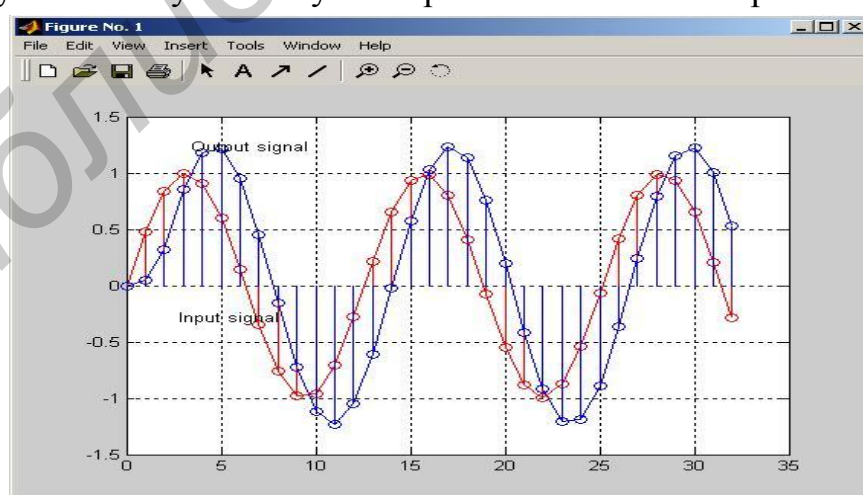


Рис. 6. Входной (Input) и выходной (Output) сигналы

Пример. Рассчитаем реакцию БИХ-фильтра 2-го порядка, заданного РУ (5) и $n = 0:32$, $2\pi fT = \omega T = 0.5$, $x[n] = \sin(\omega T n)$.

Решение.

```
b=[1 1 1];  
a=[1 0.7 -0.25];  
n=0:32;  
x=sin(0.5*n);  
y=filter(b,a,x);  
plot(n,x,'-or',n,y,'-ob')  
grid  
hold on  
stem(n,x,'-or')  
stem(n,y)  
gtext('Output signal')  
gtext('Input signal')
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*.

3.5. Вычисление реакции ЛДС на основе уравнения свертки

Моделирование работы ЛДС на основе уравнения свертки (2) выполняется с помощью функции **conv**, формат которой имеет вид

$conv(x,h)$ или $conv(h,n)$,

где x – вектор отсчетов воздействия длиной $k=length(x)$, h – вектор отсчетов импульсной характеристики длиной $v=length(h)$.

В результате вычисления функция **conv** возвращает вектор реакции длиной $k+v-1$.

Пример. Вычислить реакцию КИХ-фильтра, заданного РУ $y[n] = 0.1x[n] + 0.5x[n-1] + 0.7x[n-2]$.

Решение. Примем во внимание, что импульсная характеристика равна вектору коэффициентов РУ, и составим программу вычисления реакции:

```
b=[0.1 0.5 0.7];           импульсная характеристика  
h=b;  
n=0:32;  
x=sin(0.5.*n);           входное воздействие  
y=conv(h,x);             вычисление свертки  
k=length(y);
```



```

hold on
plot(n,x,'-or'), grid      построение графика входного воздействия
stem(n,x,'-or')
nc=0:(k-1);
plot(nc,y,'-ob')         построение графика реакции
stem(nc,y)
gtext('Output signal')
gtext('Input signal')

```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*.

Пример. Вычислить импульсную характеристику БИХ-фильтра, заданного РУ (5).

Решение.

```

b=[1 1 1];
a=[1 0.7 -0.25];
delta=[1;zeros(50,1)];
h=filter(b,a,delta);
n=0:32;
x=sin(0.5.*n);
y=conv(x,h);
k=length(y);
stem(0:82,y),grid

```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*.

3.6. Расчет АЧХ и ФЧХ фильтра

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) $H[k]$ фильтра вычисляется при помощи прямого преобразования Фурье от импульсной характеристики:

$$\begin{aligned}
 Ah[k] &= \sum_n h[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, n = 0..N-1, k = 0..N-1, \\
 H[k] &= \sqrt{[\operatorname{Re}(Ah[k])]^2 + [\operatorname{Im}(Ah[k])]^2}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра вычисляется как

$$j[k] = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(Ah[k])}{\operatorname{Re}(Ah[k])} \right).
 \tag{7}$$

Пример. Вычислим АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра, заданного РУ:

$$y[n] = 0.00634x[n] + 0.0317x[n-1] + 0.07x[n-2] + 0.126x[n-3] + 0.1684[x-4] + 0.18[x-5] + 0.1684[x-6] + 0.126x[n-7] + 0.07x[n-8] + 0.0317x[n-9] + 0.00634x[n-10]$$

Решение.

`b=[6.34E-3 0.032 0.07 0.126 0.17 0.18 0.17 0.126 0.07 0.032 6.34E-3];`

`a=[1];`

`N=length(b)*10;` *длина импульсной характеристики и преобразования Фурье*

`h=impz(b,a,N);` *вычисление импульсной характеристики по РУ*

`Ah=fft(h,N);` *преобразования Фурье от импульсной характеристики*

`H=abs(Ah);` *вычисление АЧХ*

`ph=angle(Ah);` *вычисление ФЧХ*

`dl=round(N/2);` *ограничение длины преобразования*

`H=H(1:dl);` *ограничение длины АЧХ*

`ph=ph(1:dl);` *ограничение длины ФЧХ*

`n=0:dl-1;`

`plot(n,H,'-or',n,ph,'-ob');` *построение графика АЧХ и ФЧХ*

`grid` *сетка на графике*

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*.

Как видно по АЧХ (рис. 7), РУ определяет работу фильтра низкой частоты (ФНЧ).

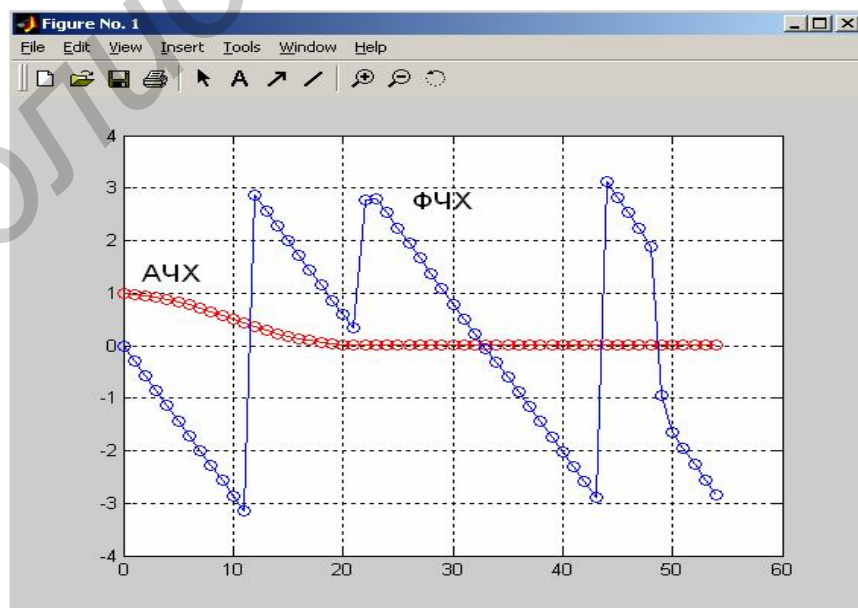


Рис. 7. АЧХ и ФЧХ фильтра низкой частоты

Пример. Вычислим АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра по РУ (5).

Решение.

```
b=[1 1 1];  
a=[1 0.7 -0.25];  
N=length(a)*30;   длина вектора а равна 3, а длина преобразования Фурье N  
равна 3*30  
h=impz(b,a,N);  
Ah=fft(h,N);  
H=abs(Ah);  
ph=angle(Ah);  
dl=round(N/2);  
H=H(1:dl);  
ph=ph(1:dl);  
n=0:dl-1;  
plot(n,H,'-or',n,ph,'-ob');  
grid
```

После набора программы для получения результатов необходимо нажать функциональную клавишу *F5*.

4. Введение в Simulink

Simulink – сопутствующая Matlab программа. Это интерактивная система, которая работает с линейными, нелинейными, непрерывными, дискретными, многомерными системами. Она представляет собой среду, управляемую мышью, в которой для создания исследуемой системы достаточно перетащить математический блок на рабочее поле.

Blocksets – это дополнения к Simulink, которые обеспечивают библиотеки блоков для специализированных приложений, таких, как коммуникации, обработка сигналов, энергетические системы.

Real-Time Workshop – это программа, которая позволяет генерировать C-код из блоков диаграмм и запускать их на выполнение в различных системах реального времени.

После загрузки Simulink окно имеет вид, показанный на рис. 8

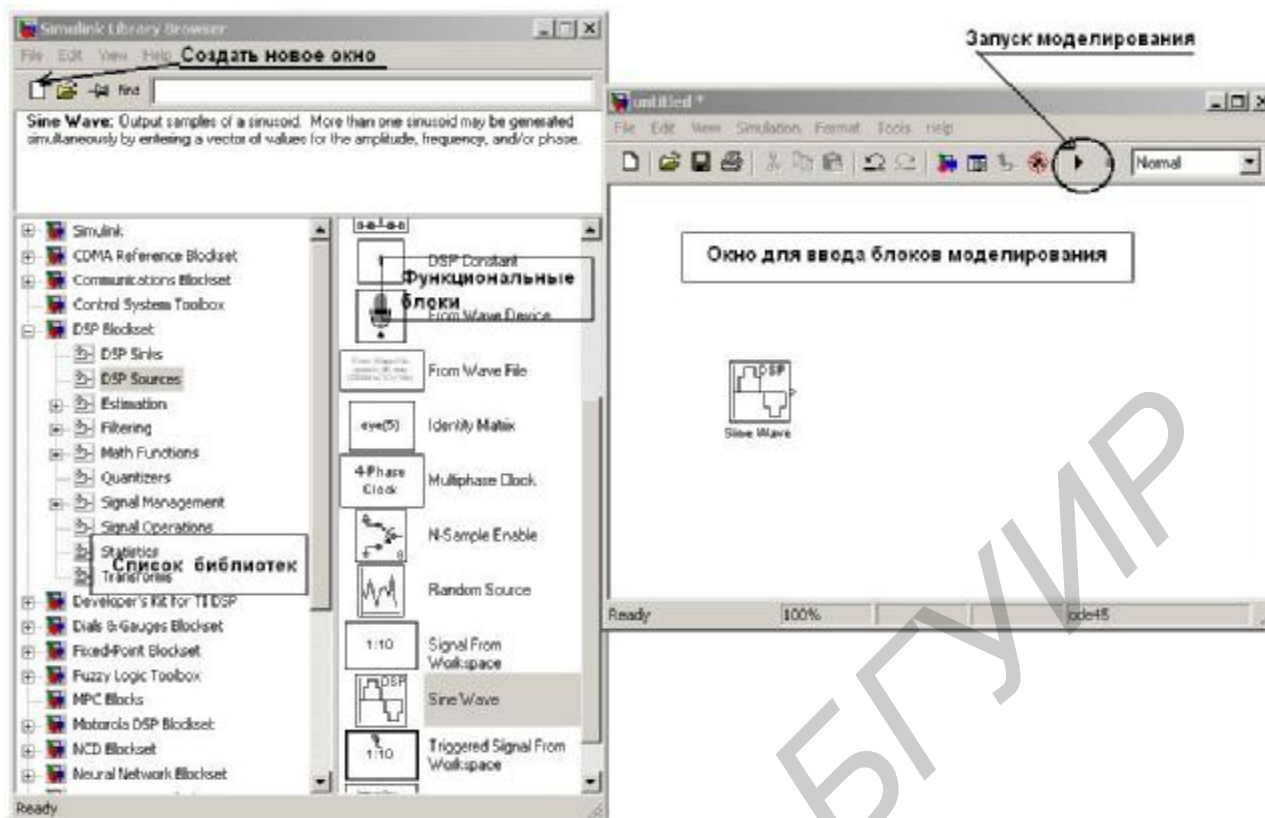


Рис. 8. Вид окна библиотек с математическими блоками и окна моделирования Simulink

В левой части располагаются библиотеки для различных инженерных и научных приложений. В правой части отражаются структурные блоки, содержащиеся в библиотеках.

Замечание. На функциональный блок необходимо нажать левой кнопкой мыши и, удерживая, перенести блок на окно моделирования.

Основные библиотеки для моделирования: *Simulink* и *DSP Blockset*.

В библиотеке *Simulink* находятся:

- набор непрерывных моделей сигналов;
- математические операции;
- приборы регистрации (осциллограф);
- модели аналоговых и дискретных фильтров.

В библиотеке *DSP* находятся:

- набор дискретных моделей сигналов;
- математические операции над векторами и матрицами;
- цифровые фильтры;
- блоки вычисления спектров сигналов.

4.1. Моделирование ЛДС в Simulink

Пример. Определим импульсную характеристику КИХ-фильтра с произвольными коэффициентами b путем динамического моделирования.

Решение. Первоначально построим КИХ-фильтр. Для этого потребуются следующие блоки:

- задержки Integer Delay из DSP Blockset / Signal Operation;
- модель дельта-функции Discrete Impulse из DSP Blockset / DSP Sources;
- усилители Gain из Simulink/Math;
- сумматор Sum из Simulink/Math;
- осциллограф Scope из Simulink/Sinks.

Для настройки блока нужно быстро нажать два раза левую кнопку мыши, предварительно установив курсор на выбранный блок. В результате откроется окно для настроек.

Собранная модель показана на рис. 9.

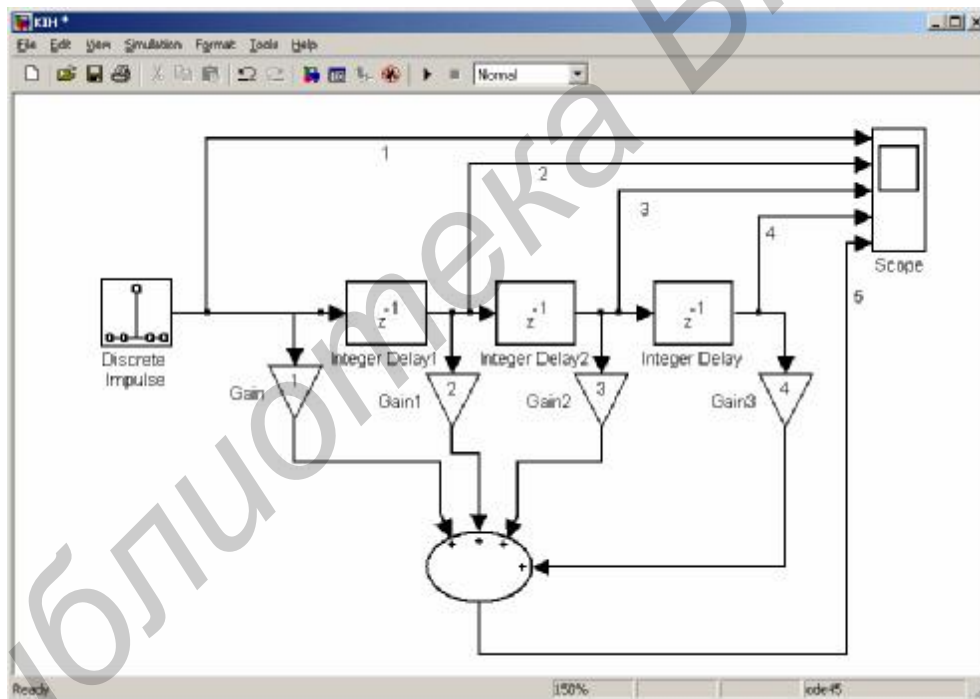


Рис. 9. Модель КИХ-фильтра

Временной интервал моделирования задается в окне, которое вызывается нажатием Ctrl+E (рис. 10). Значение Stop Time оставим неизменным.

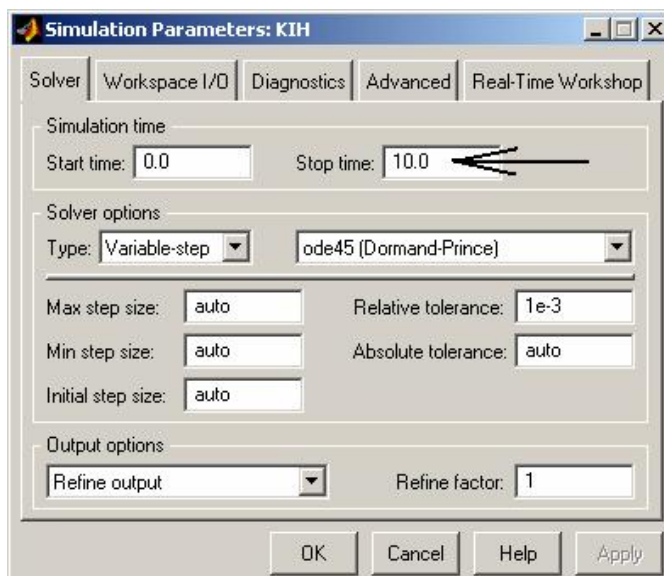


Рис. 10. Окно настроек параметров моделирования

После окончания моделирования смотрим результат, дважды щелкнув по левой кнопке мыши по блоку Score (рис. 11).

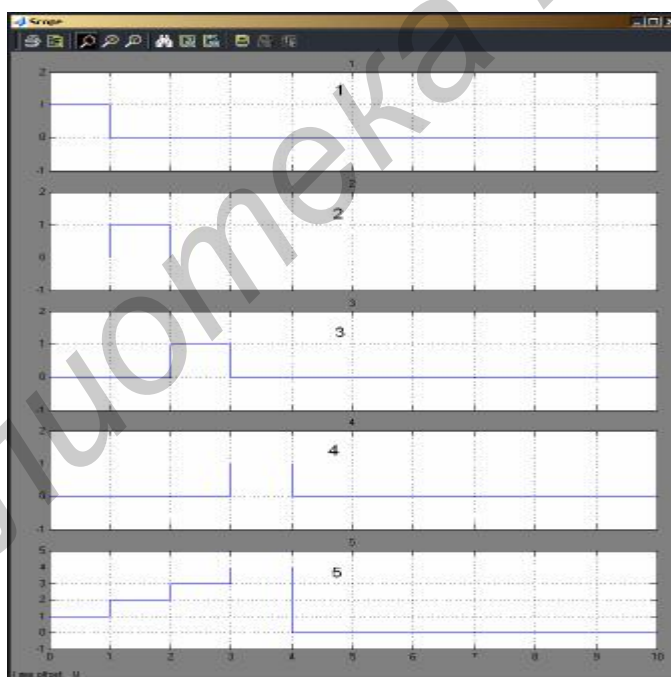


Рис. 11. Результат моделирования

Окна «1–4» осциллографа показывают значения сигналов в задержках в дискретные моменты времени. Окно «5» показывает график дискретных отсчетов импульсной характеристики КИХ-фильтра.

Пример. Определим ИХ БИХ-фильтра путем моделирования. Параметры фильтра выберем произвольно.

Решение. По аналогии с КИХ-фильтром создадим модель БИХ-фильтра (рис. 12). Параметр Stop Time выберем 50.

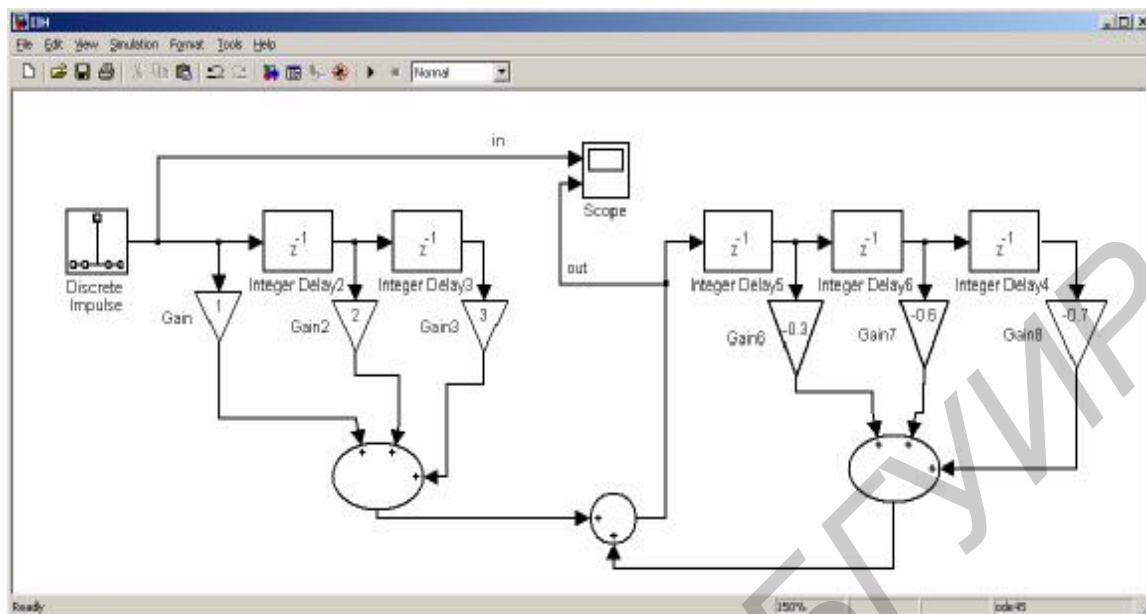


Рис. 12. Модель БИХ-фильтра

В Simulink есть возможность использовать модели фильтра (см. рис. 9, 12) в виде блока Discrete Filter (рис. 13). В блок Discrete Filter записываются коэффициенты фильтра в числитель (Numerator) и знаменатель (Denominator).

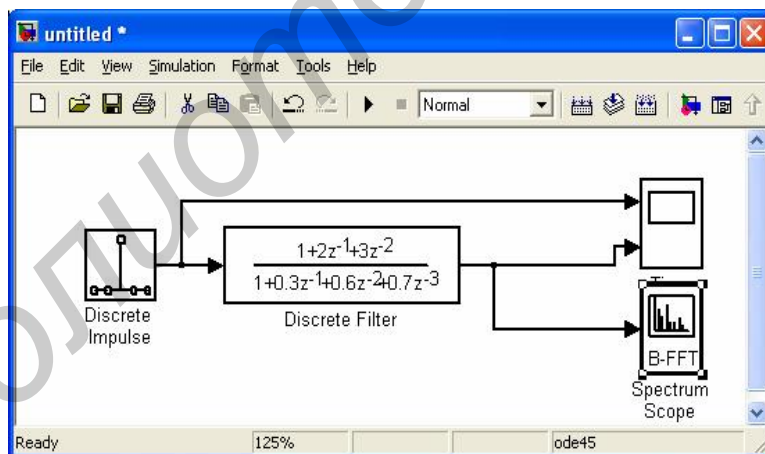


Рис. 13. Применение блока дискретного фильтра

Для вычисления преобразования Фурье от импульсной характеристики можно воспользоваться блоком Spectrum Scope из DSP Blockset/DSP Sinks с указанными настройками (рис. 14).

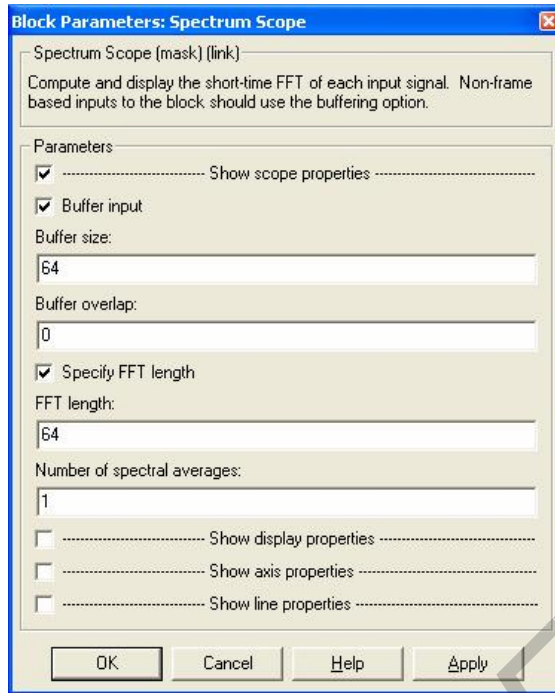


Рис. 14. Окно параметров блока Spectrum Scope

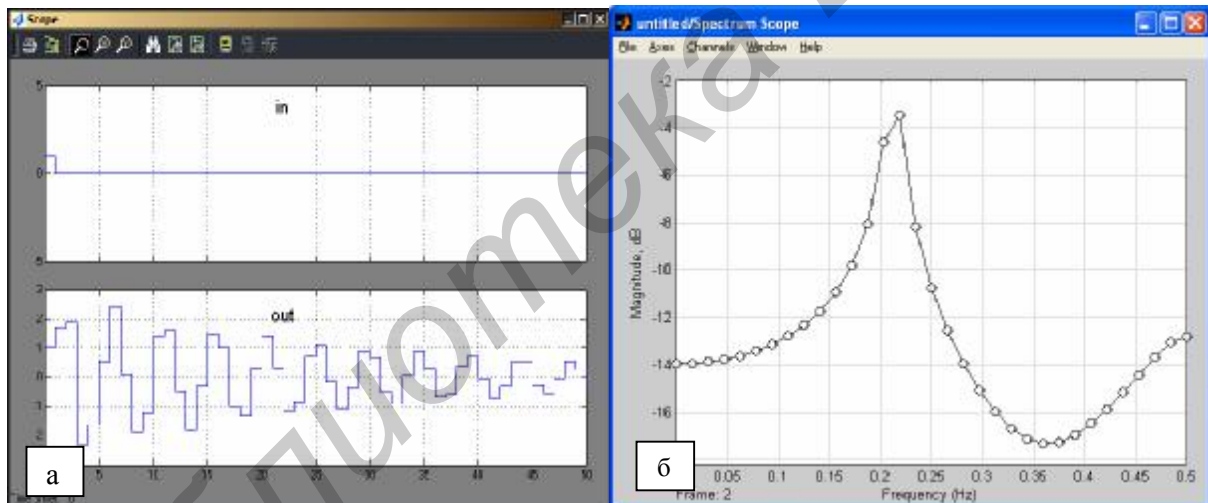


Рис. 15. Результат моделирования:

- а) импульсная характеристика;
- б) частотная характеристика БИХ-фильтра

Как видно из двух примеров, пользователь в Simulink с легкостью может создавать любые структуры фильтров, а также измерить значения сигналов в любой точке фильтра.

5. Порядок выполнения работы

Для каждого варианта задан тип фильтра (КИХ или БИХ), а также отсчеты векторов воздействия b и реакции a . Дополнительно заданы два значения w_1T , для построения гармонических колебаний.

Необходимо определить:

- импульсную характеристику фильтра, подав на вход дельта-функцию;
- импульсную характеристику по отсчетам РУ;
- вычислить реакцию ЛДС на входное воздействие на основе разностного уравнения. В качестве входного воздействия использовать сумму двух гармонических колебаний $\sin(w_1T n) + \sin(w_2T n)$. Амплитуды двух колебаний принять равными 1 В;
- вычислить реакции ЛДС на основе уравнения свертки. В качестве входного воздействия использовать сумму двух гармонических колебаний. Амплитуды двух колебаний принять равными 1 В;
- рассчитать АЧХ и ФЧХ фильтра и построить графики.

В работе с программой Simulink необходимо:

- собрать КИХ-фильтр 4-го порядка; коэффициенты фильтра выбрать из заданного варианта;
- определить импульсную и частотную характеристики фильтра;
- собрать БИХ-фильтр по передаточной характеристике из предварительного задания п. 2 разд. 8;
- определить импульсную и частотную характеристики фильтра.

6. Варианты

1. ФНЧ КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 500$ Гц. Вектор воздействия: 0.0031, 0.0083, 0.016, 0.026, 0.037, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.098, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05, 0.037, 0.026, 0.016, 0.0083, 0.0031. $w_1T = 0.039$, $w_2T = 0.131$.

2. Полосовой КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_{c1} = 5000$ Гц, $F_{c2} = 6000$ Гц. Полоса пропускания $F_{pass} = F_{c2} - F_{c1} = 6000 - 5000 = 1000$ Гц. Вектор воздействия: 0.0038, 0.016, 0.027, 0.0164, -0.028, -0.09, -0.122, -0.083, 0.022, 0.136, 0.185, 0.136, 0.022, -0.083, -0.122, -0.09, -0.029, 0.016, 0.027, 0.016, 0.0038. $w_1T = 0.72$, $w_2T = 0.524$.

3. ФВЧ КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 5000$ Гц. Вектор воздействия: -0.00030, 0.0013, 0.0062, 0.013, 0.016, 0.0046, -0.027, -0.08, -0.14, -0.19, 0.79, -0.19, -0.14, -0.08, -0.027, 0.0046, 0.016, 0.013, 0.0062, 0.0013, -0.0003. $w_1T = 0.785$, $w_2T = 0.262$.

4. Режекторный КИХ-фильтр. Частота среза $F_{c1} = 5000$ Гц, $F_{c2} = 6000$ Гц. Полоса подавления $F_{pass} = F_{c2} - F_{c1} = 6000 - 5000 = 1000$ Гц. Вектор воздействия: -0.00086, -0.00365, -0.0061, -0.0037, 0.0064, 0.02, 0.027, 0.019, -0.005, -0.03, 0.95, -0.03, -0.0049, 0.019, 0.027, 0.020, 0.0064, -0.0037, -0.0061, -0.0036, -0.00086. $w_1T = 0.72$, $w_2T = 0.524$.

5. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 5000$ Гц. Вектор воздействия: 4.38e-008, 4.38e-007, 1.97e-006, 5.26e-006, 9.2e-006, 1.1e-005, 9.2e-006, 5.26e-006, 1.97e-006, 4.38e-007, 4.38e-008. Вектор реакции: 1, -8.38, 32.5, -76.8, 122.2, -136.6, 108.72, -60.78, 22.85, -5.22, 0.55. $w_1T = 0.131$, $w_2T = 0.916$.

6. Полосовой БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_{c1} = 7000$ Гц, $F_{c2} = 8000$ Гц. Полоса пропускания $F_{pass} = F_{c2} - F_{c1} = 8000 - 7000 = 1000$ Гц. Вектор воздействия: 1.39e-007, 0, -6.95e-7, -3.18e-022, 1.39e-006, 0, -1.39e-006, 2.12e-022, 6.95e-007, 0, -1.39e-007. Вектор реакции: 1, -5.49, 16.9, -34.59, 51.93, -58.62, 50.68, -32.93, 15.7, -4.97, 0.88. $w_1T = 0.982$, $w_2T = 0.524$.

7. ФВЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 7000$ Гц. Вектор воздействия: 0.012, -0.123, 0.55, -1.48, 2.59, -3.1, 2.59, -1.48, 0.55, -0.12, 0.012. Вектор реакции: 1, -1.87, 3.43, -2.78, 2.66, -0.9, 0.88, -0.06, 0.38, -0.06, 0.13. $w_1T = 0.982$, $w_2T = 0.524$.

8. Режекторный БИХ-фильтр. Частота среза $F_{c1} = 5000$ Гц, $F_{c2} = 6000$ Гц. Полоса подавления $F_{pass} = F_{c2} - F_{c1} = 6000 - 5000 = 1000$ Гц. Вектор воздействия: 0.74, -5.59, 20.56, -47.75, 77.09, -90.08, 77.09, -47.75, 20.56, -5.59, 0.742. Вектор реакции: 1, -7.1, 24.58, -53.73, 81.62, -89.68, 72.12, -41.93, 16.93, -4.31, 0.53. $w_1T = 0.707$, $w_2T = 0.262$.

9. ФНЧ КИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 10\,000$ Гц. Вектор воздействия: 0.00058, -0.0024, -0.0062, 0.0034, 0.022,

0.0091, -0.048, -0.061, 0.073, 0.3, 0.42, 0.3, 0.073, -0.061, -0.048, 0.0091, 0.022, 0.0034, -0.0062, -0.0024, 0.00058. $w_1T = 0.262$, $w_2T = 0.916$.

10. ФНЧ БИХ-фильтр. Частота дискретизации $F_s = 48\,000$ Гц, частота среза $F_c = 10\,000$ Гц. Вектор воздействия: 4.38e-008, 4.38e-007, 1.97e-006, 5.26e-006, 9.2e-006, 1.1e-005, 9.2e-006, 5.26e-006, 1.97e-006, 4.34e-007, 4.34e-008. Вектор реакции: 1, -8.38, 32.53, -76.82, 22.2, -136.63, 108.73, -60.78, 22.85, -5.22, 0.55. $w_1T = 0.262$, $w_2T = 0.916$.

7. Контрольные вопросы

1. Какими уравнениями описывается работа ЛДС?
2. Запишите выражение Z-преобразования.
3. Дайте определение передаточной характеристики ЛДС.
4. Изобразите структуру КИХ-фильтра 4-го порядка.
5. Изобразите структуру БИХ-фильтра 3-го порядка.
6. Запишите выражение для передаточной характеристики КИХ-фильтра.
7. Запишите выражение для передаточной характеристики БИХ-фильтра.
8. Какие встроенные функции Matlab позволяют вычислить ИХ и реакцию на выходе ЛДС?

8. Предварительное задание

1. Вычислить Z-преобразование от разностного уравнения:

$$y[n] = b[0]x[n] + b[1]x[n-1] - a[2]y[n-1] + a[3]y[n-2].$$

2. По передаточной характеристике ЛДС $H(z) = \frac{b[0] + b[1]z^{-1} + b[2]z^{-2}}{1 + a[2]z^{-2} + a[3]z^{-3}}$ записать

РУ и определить ИХ $h = \{h[0] \ h[1] \ h[2] \ h[3] \ h[4] \ h[5] \ h[6]\}$.

3. По передаточной характеристике $H(z) = \frac{b[0] - b[1]z^{-1} - b[2]z^{-2} + H_1(z)}{1 + a[1]z^{-1} + a[5]z^{-5}}$,

$H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-2}}$ записать РУ и нарисовать структуру фильтра.

4. По РУ $y[n] = b[0]x[n] + a[2]y[n-1] - a[3]y[n-3]$ записать передаточную характеристику. Вычислить реакцию на выходе РУ с нулевыми начальными условиями на входное воздействие $x[n] = 2 \cdot n$.

Замечание. Численные значения $b[i]$ и $a[i]$ выбрать из варианта, заданного преподавателем.

9. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Расчет предварительного задания.
3. Результаты моделирования (текст программы, схемы фильтров и графики)
4. Выводы.

Литература

1. Гольденберг, Л. М. Цифровая обработка сигналов : справочник / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1985.
2. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко – СПб. : Питер, 2002.
3. Саломатин, С. Б. Цифровая обработка сигналов в радиоэлектронных системах : учеб. пособие / С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 2002.
4. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М : Техносфера, 2006.

Учебное издание

Саломатин Сергей Борисович

Ходыко Дмитрий Леонидович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Методическое пособие по выполнению лабораторных работ
по дисциплине

«Цифровая обработка сигналов»

для студентов радиотехнических специальностей

дневной и заочной форм обучения

Редактор Н. В. Гриневич

Корректор М. В. Тезина

Подписано в печать 25.01.2008.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 1,5.

Формат 60×84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 120 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л.
Заказ 10.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6