

Математика

в примерах и задачах

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для учащихся учреждений
образования, реализующих
образовательные программы
среднего специального образования*

Под общей редакцией Л.И. Майсени

УДК 51(075.32)
ББК 74.262.21я723
М34

Авторы: Л.И. Майсеня, В.Э. Жавнерчик, И.Ю. Мацкевич, М.В. Ламчановская, А.А. Ермолицкий, А.В. Титова

Рецензенты: заведующий кафедрой физических и математических основ информатики Белорусской государственной академии связи доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор *Г.М. Булдык*; цикловая комиссия преподавателей естественно-математических учебных дисциплин Минского государственного колледжа электроники

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства

ISBN 978-985-06-3483-2

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2022

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное издание «Математика в примерах и задачах» состоит из 13 разделов, каждый из которых структурирован на параграфы.

В начале каждого параграфа содержится необходимый теоретический материал, затем приводится решение нескольких типовых примеров и набор заданий трех уровней сложности. Учебное пособие позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении: каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности. Кроме того, пособие может быть использовано в обучении на различных специальностях системы среднего специального образования с разными по содержанию и сложности планируемого материала учебными программами дисциплины «Математика» (профессиональный компонент).

Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учреждений среднего специального и высшего образования, усвоение обучающимися разработанного содержания данного учебного издания будет способствовать качественной реализации непрерывного обучения математике в университете.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам книги – заведующему кафедрой физических и математических основ информатики Белорусской государственной академии связи доктору педагогических наук, кандидату физико-математических наук, профессору Г.М. Булдыку и коллективу цикловой комиссии преподавателей естественно-математических учебных дисциплин Минского государственного колледжа электроники – за внимательное прочтение рукописи и предложения по ее усовершенствованию.

Авторы надеются, что предлагаемое издание будет способствовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности процесса обучения математике.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск, e-mail: info@vshph.com

Авторы

1. ВВЕДЕНИЕ В КУРС МАТЕМАТИКИ

1.1. Высказывания. Типы теорем

Под *простым высказыванием* понимают утверждение (повествовательное предложение), в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно (но не то и другое вместе).

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots , а их значения *истина* и *ложь* — соответственно «И» и «Л». *Сложные высказывания* получают из простых с помощью логических операций, к которым относятся отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность (эквиваленция).

Если A — высказывание, то *отрицание высказывания* A определяется как такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание высказывания A обозначается \bar{A} (или $\neg A$); читается: «не A ».

Истинность или ложность операции отрицания выражает истинностная таблица (табл. 1.1).

Таблица 1.1

A	\bar{A}
И	Л
Л	И

Конъюнкцией двух высказываний A, B называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны. Конъюнкция обозначается $A \wedge B$ (или $A \& B$); читается: « A и B ». Конъюнкции соответствует истинностная таблица (табл. 1.2).

Таблица 1.2

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией двух высказываний A, B называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B ложны. Дизъюнкция обозначается $A \vee B$; читается: « A или B ». Союз «или» здесь употребляется в соединительном, а не в разделительном смысле, т.е. истинность высказывания $A \vee B$ имеет место в трех случаях: 1) только A – истина; 2) только B – истина; 3) и A , и B – истина. Дизъюнкции соответствует истинностная таблица (табл. 1.3).

Таблица 1.3

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Импликация высказываний A, B определяется как такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Импликация двух высказываний A, B обозначается $A \Rightarrow B$; читается: «если A , то B ». Высказывание A называется *посылкой импликации*, а B – *заключением*. Импликации соответствует истинностная таблица (табл. 1.4).

Таблица 1.4

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Эквивалентность двух высказываний A, B определяется как высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A, B оба истинны или оба ложны. Обозначается $A \Leftrightarrow B$; читается: « A тогда и только тогда, когда B ». Эквивалентности соответствует истинностная таблица (табл. 1.5).

Таблица 1.5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Если теорема сформулирована в виде $A \Rightarrow B$, то она называется **признаком** или **достаточным условием** для B (A – достаточное условие выполнимости B), где A, B – некоторые высказывания. Теоремы такого вида называются также **необходимым условием** для A (B – необходимое условие выполнимости A).

Теорема типа $B \Rightarrow A$ называется **обратной** для теоремы $A \Rightarrow B$ (прямой).

Если теорема имеет вид $A \Leftrightarrow B$, то она называется **критерием** или **необходимым и достаточным условиями** (и для B , и для A). Теорема такого типа объединяет прямую и обратную теоремы.

Теорема типа $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ называется **противоположной к обратной теореме**.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. На этом факте основан **метод доказательства теорем от противоположного (от противного)**.

Пример 1. Заданы высказывания:

A : «Число 7 больше числа 6»;

B : «Число 7 равно числу 6»;

C : «Сумма углов треугольника равна 180° ».

Рассмотреть следующие высказывания и установить их значения (И или Л): $\bar{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow C, B \Leftrightarrow C, (A \vee C) \Rightarrow \bar{B}$.

Решение. Рассмотрим высказывание \bar{A} : «Число 7 не больше числа 6». Оно есть Л, так как A – И.

$A \vee B$: «Число 7 больше или равно числу 6». Это высказывание является дизъюнкцией высказываний A, B , где A – И, B – Л. Согласно табл. 1.3 оно есть И.

$A \wedge B$: «Число 7 больше и равно числу 6». Это конъюнкция высказываний, где A – И, B – Л. По табл. 1.2 оно есть Л.

$A \Rightarrow C$: «Если число 7 больше числа 6, то сумма углов треугольника равна 180° ». Это импликация двух истинных высказываний, а потому оно есть И.

$B \Leftrightarrow C$: «Число 7 равно числу 6 тогда и только тогда, когда сумма углов треугольника равна 180° ». Поскольку $B - \text{Л}$, $C - \text{И}$, то, согласно табл. 1.5, получаем, что $B \Leftrightarrow C$ есть Л.

$(A \vee C) \Rightarrow \bar{B}$: «Если число 7 больше числа 6 или сумма углов треугольника равна 180° , то число 7 не равно числу 6. Высказывание $A \vee C$ является И (по табл. 1.3 как дизъюнкция двух истинных высказываний). Высказывание \bar{B} также есть И. Тогда рассматриваемая импликация по своему значению есть И.

Пример 2. Доказать истинность эквивалентности

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B). \quad (1.1)$$

Решение. Для доказательства рассмотрим четыре возможных случая.

1. Пусть оба высказывания A , B есть истина. Тогда, согласно табл. 1.4, $A \Rightarrow B$ есть И. Поскольку B есть И, то по табл. 1.3 $\bar{A} \vee B$ есть И. Значит, высказывания в левой и правой частях истинны, т.е. эквивалентность также есть И.

2. Пусть A является истинным высказыванием, а $B -$ ложным. Тогда импликация $A \Rightarrow B$ есть Л. В правой части эквивалентности (1.1) также имеем ложное высказывание, поскольку это дизъюнкция двух ложных высказываний. Следовательно, эквивалентность (1.1) является истиной.

3. Пусть A есть ложь, $B -$ истина. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\bar{A} \vee B -$ И, а потому эквивалентность (1.1) является истиной.

4. Пусть оба высказывания A , B есть Л. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\bar{A} \vee B -$ И.

Мы доказали, что во всех возможных случаях исходных значений высказываний A , B эквивалентность (1.1) есть И.

Задания

I уровень

1.1. Определите, является ли предложение высказыванием, и установите его значение (истина или ложь):

- 1) «Пусть всегда будет солнце!»;
- 2) «Минск – столица Болгарии»;
- 3) «Число 7 больше числа 5»;
- 4) «Ты идешь сегодня в школу?»;
- 5) «Выражение x^2 принимает значения больше нуля или равно нулю»;
- 6) «Беларусь – европейская страна».

1.2. Определите тип высказывания (простое или сложное):

- 1) «Если сумма углов четырехугольника равна 360° , то четырехугольник является квадратом»;
- 2) «Квадрат является ромбом»;
- 3) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны»;
- 4) «Если высота треугольника проведена к основанию и она является медианой, то треугольник – равнобедренный».

1.3. Даны высказывания:

A: «Диагонали четырехугольника равны»;

B: «Четырехугольник является прямоугольником».

Сформулируйте высказывание и установите его значение (И или Л):

- 1) $A \Rightarrow B$;
- 2) $B \Rightarrow A$;
- 3) $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

1.4. Определите тип теоремы:

1) «Если x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ »;

2) «Окружность вписана в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон четырехугольника равны».

II уровень

2.1. Даны высказывания, сформулированные для натуральных чисел:

A: «Число является четным»;

B: «Сумма цифр числа делится на 3»;

C: «Число делится на 6».

Сформулируйте сложное высказывание и установите его значение (И или Л):

- 1) $(A \wedge B) \Rightarrow C$;
- 2) $C \Leftrightarrow (A \wedge B)$.

2.2. Для теоремы «Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату наибольшей стороны» сформулируйте:

- 1) обратную;
- 2) противоположную;
- 3) противоположную к обратной;
- 4) необходимые и достаточные условия.

Определите значение (И или Л) сформулированных утверждений.

2.3. Приведите пример конкретных математических высказываний *A*, *B*, *C*, которые бы содержательно соответствовали высказыванию $(A \vee B) \Rightarrow C$ со значением И.

III уровень

3.1. Докажите, что высказывания $A \Rightarrow B$, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ имеют одинаковые значения при всех возможных значениях высказываний A , B .

3.2. На вопрос, кто из трех студентов сдал экзамен на «отлично», был получен ответ: «Правда, что если сдал первый, то сдал и третий, но неправда, что если сдал второй, то сдал и третий». Определите, какой студент сдал экзамен на «отлично».

1.2. Множества и операции над ними. Числовые множества

Множество – неопределяемое первичное понятие. Обозначают множества прописными буквами латинского алфавита A , B , C , X , Под множеством понимают совокупность (группу, набор и т.д.) элементов, которые характеризуются одинаковыми свойствами.

Множества изображают *диаграммами (кругами) Эйлера – Вена* (рис. 1.1).

Если элемент a принадлежит множеству A , то пишут: $a \in A$; если элемент a не принадлежит множеству A , то пишут: $a \notin A$.

Множество может задаваться с указанием его элементов (например, $A = \{1, 3, 8\}$) или с указанием *характеристического свойства* (например, если B состоит из элементов x , для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут: $B = \{x \mid P(x)\}$).

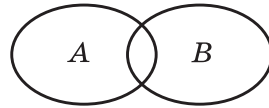
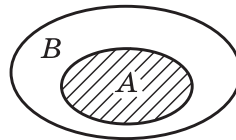


Рис. 1.1

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B , то множество A называется *подмножеством множества B* (или говорят, что A включено в B).



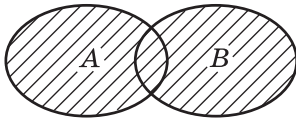
$A \subset B$

Рис. 1.2

Пишут: $A \subset B$ (или $B \supset A$) (рис. 1.2). Два множества A , B называются *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

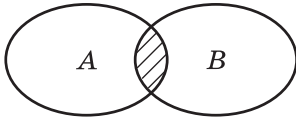
Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$. Множество, которое не имеет элементов, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset .

К основным операциям над множествами относят объединение, пересечение, разность, дополнение.



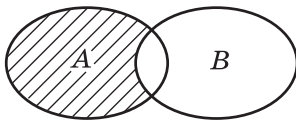
$A \cup B$

Рис. 1.3



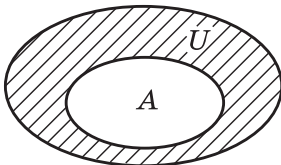
$A \cap B$

Рис. 1.4



$A \setminus B$

Рис. 1.5



\bar{A}

Рис. 1.6

Объединением множеств A, B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A , или множеству B (хотя бы одному из множеств A, B) (рис. 1.3).

Пересечением множеств A, B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A , и множеству B (рис. 1.4).

Разностью множеств $A \setminus B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.5).

Дополнением множества A до конкретного (универсального) множества U называется множество \bar{A} , которое определяется равенством $\bar{A} = U \setminus A$ (рис. 1.6).

Пусть $m(A), m(B)$ — количество элементов множеств A и B соответственно, тогда справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (1.2)$$

Числовые множества

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел.

\mathbf{Q} — множество рациональных чисел: это множество всех обыкновенных дробей, т.е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$.

Множество \mathbf{Q} определяется также как множество всех бесконечных периодических десятичных дробей.

\mathbf{I} — множество иррациональных чисел: это множество всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

\mathbf{R} — множество действительных чисел: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Верны соотношения

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset.$$

Произведение первых n натуральных чисел называется **факториалом**, для него введен специальный символ:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

По определению принимают $0! = 1$.

Для всякого $x \in \mathbf{R}$ определены следующие понятия:

$[x]$ — **целая часть (антье) числа** x , определяется как целое число такое, что

$$[x] \leq x < [x] + 1;$$

$\{x\}$ — **дробная часть (мантисса) числа** x , определяется равенством

$$\{x\} = x - [x].$$

Модулем (абсолютной величиной) числа $x \in \mathbf{R}$ называется неотрицательное число:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация модуля: $|x - a|$ — это расстояние от точки a до точки x на координатной оси, в частности $|x|$ — это расстояние от точки 0 до точки x .

Если a_1, a_2, \dots, a_n — некоторые действительные числа, то сумме этих величин обозначают с использованием **знака суммы**:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

где k — **индекс суммирования**.

Свойства суммы

1. $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{p=1}^n a_p$ — сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования.

2. $\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$, где $c = \text{const}$.

$$3. \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k.$$

$$4. \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - \text{свойство «сдвига» индекса суммирования.}$$

мирования.

Для доказательства истинности некоторого утверждения $A(n)$ при всех значениях натуральной переменной n , от которой оно зависит (начиная с $n_0, n_0 \in \mathbf{N}$), часто используют *метод математической индукции*. Для этого необходимо сделать следующие три шага:

- 1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;
- 2) допустить, что $A(k)$ истинно для любого $k \geq n_0$;
- 3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}, k \geq n_0$.

Пример 1. На первом курсе учатся 200 студентов. Из них своевременно сдали зачет по математике 175 человек, по физике – 185 человек. Не сдали зачет ни по математике, ни по физике 10 человек. Определить, сколько студентов сдали оба зачета.

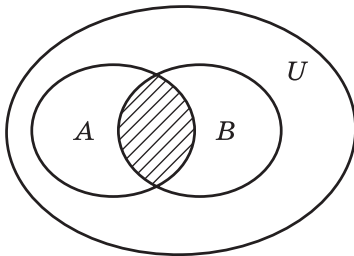


Рис. 1.7

Решение. Пусть U – множество всех студентов курса; A – множество студентов, которые сдали зачет по математике, B – по физике (рис. 1.7).

Согласно условию задачи $m(U) = 200, m(A) = 175, m(B) = 185, m(U \setminus (A \cup B)) = 10$ и надо найти $m(A \cap B)$.

Находим, сколько человек сдали хотя бы один зачет:

$$m(A \cup B) = m(U) - m(U \setminus (A \cup B)) = 200 - 10 = 190.$$

Используем далее формулу (1.2), из которой выражаем

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B).$$

Получаем

$$m(A \cap B) = 175 + 185 - 190 = 170.$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{(2n-1)! + (2n)!}{(2n+1)!}$.

Решение. Выделим общий множитель в числителе и знаменателе. Очевидно, что

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n = (2n-1)! \cdot 2n,$$

$$(2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n(2n+1) = (2n-1)! \cdot (2n)(2n+1).$$

Поэтому

$$\frac{(2n-1)! + (2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!(1+2n)}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n}.$$

Пример 3. Вычислить сумму $\sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(n-1)!}$.

Решение. Запишем последовательно слагаемые, придавая переменной n значения 1, 2, ..., 7:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}}{0!} + \frac{(-1)^{\lfloor 1 \rfloor}}{1!} + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}}{2!} + \frac{(-1)^{\lfloor 2 \rfloor}}{3!} + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor}}{4!} + \frac{(-1)^{\lfloor 3 \rfloor}}{5!} + \\ &+ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{7}{2} \rfloor}}{6!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^1}{2!} + \frac{(-1)^2}{3!} + \frac{(-1)^2}{4!} + \frac{(-1)^3}{5!} + \frac{(-1)^3}{6!} = \\ &= 1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Вычисляя, приходим к ответу:

$$\sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(n-1)!} = -\frac{217}{720}.$$

Пример 4. Доказать справедливость формулы

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (1.3)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Используем метод математической индукции.

1. Проверяем справедливость равенства (1.3) при $n=1$. Для этого в равенстве (1.3) полагаем $n=1$, причем левая часть равенства будет состоять из одного слагаемого:

$$(2 \cdot 1 - 1) = 1^2,$$

т.е. $1 = 1$ выполняется.

2. Допускаем, что для $n = k$ утверждение (1.3) верно, т.е.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2. \quad (1.4)$$

3. Доказываем справедливость формулы (1.3) для $n = k + 1$. Рассмотрим левую часть равенства (1.3) при $n = k + 1$ и преобразуем ее:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1) + 2k + 1.$$

Используем далее тот факт, что выражение в последних скобках, согласно соотношению (1.4), равно k^2 . В итоге получаем

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Правая часть равенства (1.3) для $n = k + 1$ имеет вид $(k + 1)^2$. Очевидно, что левая и правая части равенства (1.3) при $n = k + 1$ равны.

Так как все три шага математической индукции реализованы, формула (1.3) верна для любого $n \in \mathbb{N}$.

Задания

I уровень

1.1. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = (-\infty, 0)$, $C = [0, 4)$. Покажите эти множества на числовой оси и найдите множество:

- 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cup C$;
4) $(A \cup B) \cap C$; 5) $A \cup (B \cap C)$; 6) $B \setminus (A \cup C)$.

1.2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 15, B – множество простых чисел, меньших числа 10, C – множество четных чисел, меньших числа 9. Найдите множество:

- 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cap C$;
4) $(A \cup C) \cap B$; 5) $A \cup (C \cap B)$; 6) $A \cap B \cap C$.

1.3. В группе учатся 28 студентов, каждый из которых умеет кататься на лыжах или коньках. При этом 20 человек умеют кататься на лыжах, 15 человек – на коньках. Определите, сколько студентов умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Введение в курс математики	4
1.1. Высказывания. Типы теорем	4
1.2. Множества и операции над ними. Числовые множества	9
1.3. Понятие комплексного числа, алгебраическая форма записи	17
1.4. Модуль и аргумент. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа	24
1.5. Многочлены. Действия над многочленами	33
1.6. Рациональные дроби	41
<i>Ответы</i>	47
2. Линейная алгебра	51
2.1. Матрицы и операции над ними	51
2.2. Определители	61
2.3. Обратная матрица	68
2.4. Системы линейных алгебраических уравнений	72
<i>Ответы</i>	79
3. Векторная алгебра	82
3.1. Векторы и действия над ними в геометрической форме	82
3.2. Действия над векторами в координатной форме	88
3.3. Скалярное произведение векторов	93
3.4. Векторное произведение	99
3.5. Смешанное произведение векторов	103
3.6. Полярная система координат	107
<i>Ответы</i>	110
4. Аналитическая геометрия	112
4.1. Прямая на плоскости	112
4.2. Кривые второго порядка	119
4.3. Плоскость в пространстве	130
4.4. Прямая в пространстве	134
4.5. Поверхности второго порядка	140
<i>Ответы</i>	147
	451

5. Функция. Предел последовательности и функции	150
5.1. Понятие функции, ее свойства и график	150
5.2. Обратная функция. Функции, заданные неявно, параметрически и в полярной системе координат	156
5.3. Числовая последовательность	161
5.4. Предел последовательности	166
5.5. Предел функции в точке и на бесконечности	172
5.6. Замечательные пределы	180
5.7. Односторонние пределы. Непрерывность функции. Асимптоты графика	187
<i>Ответы</i>	194
6. Дифференциальное исчисление	197
6.1. Понятие производной. Дифференциал	197
6.2. Производная сложной функции	203
6.3. Геометрический и физический смысл производной. Вычисление пределов с использованием производной	207
6.4. Производные и дифференциалы высших порядков	214
6.5. Монотонность функции и экстремумы	220
6.6. Исследование функций	229
<i>Ответы</i>	239
7. Функции многих переменных	242
7.1. Основные понятия теории функций многих переменных	242
7.2. Частные производные и дифференциал первого порядка	248
7.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков	254
<i>Ответы</i>	259
8. Неопределенный интеграл	262
8.1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Таблица интегралов	262
8.2. Методы замены переменной и поднесения под дифференциал	267
8.3. Метод интегрирования по частям	272
8.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен	277
8.5. Рациональные функции. Интегрирование простейших дробей	282
8.6. Интегрирование тригонометрических функций	289

8.7. Интегрирование иррациональных функций	295
<i>Ответы.</i>	299
9. Определенный интеграл. Несобственные интегралы.	304
9.1. Понятие определенного интеграла и его свойства	304
9.2. Методы вычисления определенного интеграла	310
9.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	317
9.4. Несобственные интегралы	324
<i>Ответы.</i>	334
10. Дифференциальные уравнения.	336
10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	336
10.2. Однородные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка	341
10.3. Дифференциальные уравнения высших порядков.	349
<i>Ответы.</i>	359
11. Ряды	362
11.1. Числовые ряды. Знакоположительные ряды.	362
11.2. Знакопеременные числовые ряды.	372
11.3. Функциональные ряды	377
11.4. Степенные ряды	382
11.5. Ряд Фурье.	390
<i>Ответы.</i>	396
12. Теория вероятностей	399
12.1. Комбинаторика.	399
12.2. Основные понятия теории вероятностей. Действия над событиями	407
12.3. Вероятность и ее свойства.	411
12.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.	415
<i>Ответы.</i>	422

13. Графы	424
13.1. Основные понятия теории графов	424
13.2. Маршрут в графе	435
13.3. Деревья	441
<i>Ответы</i>	449

Математика в примерах и задачах : учебное пособие /
М34 Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. –
Минск : Вышэйшая школа, 2022. – 454 с. : ил.
ISBN 978-985-06-3483-2.

Содержатся теоретические сведения, решения типовых примеров и задания трех уровней сложности по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу и дискретной математике.

Для учащихся учреждений образования, реализующих образовательные программы среднего специального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 74.262.21я723

Учебное издание

**Майсеня Людмила Иосифовна
Жавнерчик Валерий Эдуардович
Мацкевич Ирина Юрьевна и др.**

**МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Компьютерная верстка *Н.В. Шабуня*
Корректор *Е.В. Савицкая*

Подписано в печать 24.10.2022. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «NewtonС». Офсетная печать. Усл. печ. л. 28,5.
Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 800 экз. Заказ 3282.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавляя, 11, 222310, Молодечно.