УДК 168.51

Н.В. Михайлова
(Минск, Белорусский государственный университет)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОЗНАНИЕ В КОНТЕКСТЕ ФИЛОСОФСКОЙ ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Появление и массовое распространение компьютеров не только изменило отношение к приложениям математики, но и привело к появлению новой реальности использование компьютеров в самой математике. В работе рассматривается новое понимание того, как можно доказывать в математике, точнее, на что можно надеяться при понимании двух типов доказательства – традиционно концептуального и компьютерного. В современной практике математического познания привычным понятием становится компьютерное доказательство, несмотря на то, что все еще продолжаются дискуссии о философском статусе таких доказательств.

Ключевые слова: *компьютерные доказательства, математика.*

* * *

Даже самые проницательные философы математики начала XX века не могли предвидеть появления такого мощного нового направления современной математики, как компьютерная математика, а последняя треть XX века характеризуется инновационным развитием математических конструкций, используемых в информатике. Самым революционным техническим изобретением прошедшего века можно считать компьютер, который первоначально создавался для математических расчетов, но затем позволил проводить математическое моделирование разнообразных как естественнонаучных, так и сложных социально-гуманитарных процессов, эксплицирующих новые образовательные перспективы математического познания в философском контексте понимания проблемы компьютерного доказательства. Благодаря новым теориям математики, например, теории алгоритмов и теории игр, а также информационным технологиям, в сферу математики включаются и исследования человеческой деятельности, способствующие моделированию понимания математики. С одной стороны, повсеместное внедрение компьютерного образования и развитие новых информационных технологий способствует прежде всего качественному изменению организации информационных ресурсов, включая их хранение и обеспечение доступа к ним. С другой стороны, одна из основных причин ограниченных возможностей эвристического потенциала компьютерного эксперимента в образовании состоит в том, что задачи, при решении которых можно и даже целесообразно использовать компьютер, должны иметь определенную структуру. Кроме того, когда мы говорим о применении компьютера, следует осознавать то, что компьютер считает так, как ему алгоритмически указано, а не так, как хотелось бы.

Что же способствовало принципиальному изменению математики? Наиболее тривиальный ответ – это возрастание практической необходимости сверхсложных вычислений. Но философская сущность столь радикального изменения познавательных механизмов не только в этом. Реальный масштаб произошедших изменений и тем более того, что неминуемо произойдет в математике в ближайшее время, с трудом осознается современниками. Независимо от новых компьютерных доказательств появление компьютеров уже по сути, изменило как работу математиков, так и наше восприятие математики. «Это касается самых базовых представлений, гораздо более глубоких и важных, чем любые теории: контакт с математической реальностью, роль эксперимента, баланс идей и вычислений, соотношение большого и маленького – проблема промежуточных размеров, о которой мы ранее не задумывались, – конечного и бесконечного, случайного и детерминированного, доказуемого и недоказуемого, вычислимого и невычислимого, возможного и невозможного…»[1]. Только в формальных математических рамках понимания можно рассчитывать на возможность сколько-нибудь строгой демонстрации невычислимости, хотя бы некоторой части нашей сознательной математической деятельности, поскольку философско-методологический вопрос вычислимости по самой своей природе является, безусловно, математическим.

При анализе классических математических доказательств их формальная составляющая, опирающаяся на когнитивную связь дедуктивных выводов, создает иллюзию автоматического вывода математических доказательств, в которых каждый последующий шаг неизбежно следует из предыдущего, обеспечивая тем самым формирование нового знания при использовании сложившейся системы понятий. Заметим, что фактически компьютерному моделированию поддаются лишь некоторые частные процессы, а не вся сложная математическая теория целиком, поскольку при исследовании математической модели иногда используются рациональные рассуждения, которые не носят конкретно выраженный дедуктивный характер. Поэтому прогресс компьютерной математики выглядит все же иначе, чем прогресс естественных наук, косвенно влияющий на общественное сознание. Несмотря на все возрастающую роль компьютерных систем в современном математическом познании, информационная модель, частично реализованная с помощью компьютера, является лишь «эксплицированным намеком» на научное знание, в отличие от формализованных математических теорий, позволяющих реконструировать всю архитектуру моделируемого знания. Целостная концепция современного компьютерного образования тоже не исчерпывается только свойствами его частей, хотя и характеризуется их свойствами. В философии есть методологическое положение о том, что часть внутри целого и вне него обладает разными свойствами.

Философско-методологические трудности обоснования возникают, когда критический этап математического доказательства требует применения компьютера, и его «ответ» подменяет собой выявление математически

---

[1] Вавилов Н.А. Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 6.

формализованной истинности. Речь идет о том, что в трудно обозримом математическом рассуждении с неявным использованием компьютерного доказательства приходится переводить относительное в абсолютное с помощью конечного и строго неопределенного числа проверок. «Компьютерные доказательства сами по себе представляли и представляют собой интересный предмет исследований, однако причина особого внимания к ним состоит в надежде на то, что компьютерные доказательства позволят упростить труд работающего математика»[2]. Благодаря этому, обоснование правильности компьютерных вычислений неявно попадает под такие же методологические ограничения, что и хорошо известные результаты о неразрешимости некоторых математических проблем, причем обосновывать их тем сложнее, чем эффективней работает соответствующая компьютерная программа. Тем не менее использование «кремниевой логики» в перспективе меняет практику понимания математического доказательства. Компьютерные доказательства по сути обозначили также принципиально новый этап осмысления роли компьютерного образования и понимания математического моделирования процессов, протекающих в реальном мире. И хотя для некоторых математиков доказательства теорем, осуществленных с использованием сложных компьютерных программ, не могут считаться надежными и рассматриваются в качестве направляющих теоретический поиск гипотез, они все же могут рассматриваться как теоретический конструкт предпосылки для выработки новой концепции обоснования математики, учитывающей ее практические запросы.

Использование компьютерных доказательств – один из наиболее ярких и поучительных примеров методологической сложности современной проблемы понимания математических доказательств. Эту ситуацию можно классифицировать как кризис, который относится как раз к тем математическим доказательствам, которые проводились с использованием современного компьютера. Соответствующую философскую проблему можно сформулировать так: можно ли считать математическим такое доказательство, которое выполнено на компьютере? С одной стороны, кризисы философии математического познания носят эпистемологический характер и вроде бы не связаны с онтологией математики, но, с другой стороны, если рассматривать математику как созидательный процесс, то ее структурно можно уподобить некой новой «архитектуре». Но тогда эти кризисы можно интерпретировать как кризисы человеческой мысли, когда архитекторы науки осознали, что невозможно построить такое сооружение и поэтому нет смысла обсуждать, какими свойствами устойчивости они бы обладали. По поводу кризиса, связанного с применением компьютера в доказательстве теорем, можно сказать, что никакой ясности в эту проблему внести пока не удалось, поскольку нет реальных технологий доказательства корректности компьютерных программ.

---

[2] Ламберов Л.Д. Практика компьютерных доказательств и человеческое понимание: эпистемологическая проблематика // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2021. Вып. 1. С. 6.

В информатике в отличие от классической математики, связанной с непрерывными объектами, значительно больший вес, по сути, принадлежит дискретной математике, так как даже самый мощный компьютер не может работать с произвольными вещественными числами, составляющими основу математического анализа. Классическая математическая теория вычислений, которая более полувека оставалась методологическим основанием для вычислительных процедур, сейчас превратилась в формализованную схему аппроксимации. «Развитие логики XX века заставило научное сообщество осознать несостоятельность мифа об абсолютности научной истины и эвфемизмов, гласящих, что научное познание является приближением к истине. Выяснилось, что даже в математике исходные понятия гораздо более относительны, чем это можно было ожидать, когда формировалось научное мировоззрение»[3]. А существует ли такой универсальный метод, с помощью которого можно было бы доказать истинность или ложность любого математического утверждения? В философии математики этот вопрос был переформулирован так, что в новой интерпретации по существу речь идет о различии между знанием, что конкретное математическое утверждение истинно, и когнитивным пониманием, почему оно истинно.

Формализованность математического доказательства – это по сути важная и необходимая упрощающая процедура, делающая математическое доказательство более универсальным и доступным для задания его реализации на компьютере. С помощью компьютера можно найти варианты решения математических задач в том случае, если он используется не только как вычислительное устройство, но и как особое инструментальное средство, позволяющее изменить стереотипы в усвоении математических знаний и в самой умственной деятельности. В связи с этим выдающийся немецкий математик Давид Гильберт задавался вопросом, можно ли в принципе заменить математический стиль мышления каким-нибудь автоматическим процессом, имитирующим механическое мышление. Сущность его состоит в том, что новые этапы в развитии современной математики не устраняют результатов прежних теорий как ложных или даже неэффективных, а в подавляющем числе случаев целиком подтверждают их, меняясь только в плане своего языкового компьютерного оформления, то есть в сущности ассимилируются в новых понятиях. Следует отметить, что до конца XIX века все вычисления считались чисто мыслительным процессом. Особенность математики состоит в том, что она развивается отчасти автономно, поскольку, как развивающийся организм, она подобна саморегулирующимся системам. Это в свою очередь способствует процессу самообоснования математической теории, который за конечное число шагов доводит содержательную теорию до логического совершенства, достаточным признаком которого служит стабилизация ее аксиоматического основания.

Сопоставление традиционного математического доказательства и компьютерного доказательства требует такого философского понимания

[3] Непейвода Н.Н. Какая математика нужна информатикам? // Открытие системы. 2005. № 9. С. 29.

компьютерного доказательства как специфического средства убеждения, которое позволит найти нечто общее в этих двух видах аргументации. Формальная сложность такого сопоставления проявляется в том, что комбинаторная методика, свойственная компьютерным доказательствам, не сочетается с математической креативностью. «Формальная верификация математического дискурса не дает никаких намеков по поводу того, почему доказанная компьютером теорема является истинной. Поскольку к компьютерным программам не применимы, как уже указывалось выше, толкования понимания, свойственные обыденному математическому дискурсу…»[4]. Применение математической теории шире, чем решение той практической задачи, с которой эта теория была первоначально связана, поскольку оно заключается уже не в доказательстве истины, а, в связи с развитием компьютерных технологий, в доказательстве разрешимости. Однако что касается «мира абстрактной математики», то он, как и прежде, редко сразу открыт для непосредственного восприятия, поэтому его нельзя отождествить с концептуальными идеями реальности. Различные философские взгляды на источники человеческого знания, а также трудности математического познания, опирающегося на онтологическое единство знаковых конструкций, обусловили плюралистические, на первый взгляд, несовместимые точки зрения на будущее математики.

Воплощение креативной идеи в строгие математические утверждения с допустимыми дедуктивными выводами, способными доступно передавать информацию, требует немалых сил и теоретических возможностей. Хотя многие рассуждения философов и математиков прошлого кажутся на первый взгляд далекими от обсуждаемой темы компьютерного доказательства и компьютерной виртуальной реальности, но многое в их исследованиях может оказаться актуальным для осмысления нового феномена. Например, этими вопросами успешно занимался английский инженер и математик Алан Тьюринг, смелость идеи которого заключалась в изобретении механического устройства, фактически являющегося аналогом пишущей машинки, а именно бумажной перфоленты с символической логикой. Для решения абстрактных логических проблем он предложил гипотетическую машину, позволяющую определять, какие математические проблемы разрешимы, а какие нет, которая привела к инструментальному перевороту в выполнении сложных математических вычислений на реальных машинах. Тьюринга интересовала общая проблема, которую в современной методологической интерпретации можно сформулировать следующим образом: существует ли некая универсальная механическая процедура, позволяющая, в принципе, решать все математические задачи определенного класса?

Тьюринг уловил определенную связь между проблемой разрешимости и идеей вычислимости функции. Он показал, что теоретически возможно создать «универсальный компьютер», который даже сможет имитировать работу любого другого вычислительного устройства. Кроме того, Алан

---

[4] Целищев В.В. Доказательство, понимание и компьютеры // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. 2020. № 1. С. 62.

Тьюринг эффективно увязал идею вычислимой функции с философско-математическими результатами Георга Кантора по теории бесконечных множеств. Используя идею Кантора, можно показать, что множество всех вычислимых функций имеет ту же мощность, что и множество всех натуральных чисел, которые образуют счетное множество. Отсюда следует блестящий вывод о том, что не все функции вычислимы. В современной компьютерной математике еще важно иметь теоретическую возможность установить именно тот момент, когда машина Тьюринга остановится. Сам же Тьюринг также показал, что алгоритмической процедуры для решения механическим путем общей проблемы остановки на самом деле нет. С образовательной точки зрения есть еще одна проблема. «В классической триаде "модель–алгоритм–программа" наметилась опасная тенденция. Стремление поскорее внедрить компьютерные технологии во все сферы жизни привело к тому, что качество используемых теоретических моделей стало снижаться»[5]. Кроме того, философский анализ новых математических методов, используемых в компьютерной математике, следовал за развитием компьютерных технологий значительно медленнее, поэтому за истину даже стала приниматься ее правдоподобная иллюзия.

По существу, все современные компьютеры, использующие как традиционно механические, так и новые квантово-механические процессы, в которых квантовый компьютер является новым познавательным инструментом, требующим более глубокого проникновения в его сущность, в философском плане являются различными технологическими реализациями одной и той же классической идеи универсальной машины Тьюринга. Это означает, что даже математическая обработка сложной информации является трудной задачей, состоящей из разнообразных методологических подходов и методологических идей, которые невозможно объединить в одной программе обоснования математики. Заметим, что это уже непосредственно связано с теоремами Гёделя о неполноте. Не преувеличивая философскую роль теорем Гёделя о неполноте, можно сказать, что гёделевский результат говорит о том, что множество арифметических истин, интерпретируемых как формальные математические утверждения, практически не может быть перечислено машиной Тьюринга. Хотя квантовых компьютеров пока нет и до сих пор неясно, когда же наконец появятся их практически полезные конструкции, Дэвид Дойч формализовал сам вопрос о квантовых вычислениях в рамках современной теории вычислений, рассмотрев первую приближенную схему работы квантового компьютера.

Однако есть методологические причины, которые не позволяют считать компьютерное доказательство убедительным, даже несмотря на то, что, хотя компьютерная программа доказательства утверждения реализуется по законам формальной логики, в нее могут вкрасться ошибки. Ведь вера основывается на надежности компьютера, в работе которого иногда случаются сбои и который может содержать ошибки даже в программном

[5] Краснощеков П.С. Компьютеризация… будем осторожны // Математика в высшем образовании. 2007. № 5. С. 66.

обеспечении. Критика сосредоточена на тех компьютерных вычислениях, которые рассматриваются в качестве доказательства. В такой ситуации общезначимым критерием является надежность полученных результатов, и до тех пор, пока неформально соблюдается это условие, вычисления, произведенные с помощью компьютера, будут столь же убедительны, как и сделанные «вручную». «Но поскольку мы не имеем перечня условий, определяющих надежность математического доказательства, то вошедшие в математическую практику компьютерные доказательства ставят вопрос о методологической допустимости компьютерных доказательств, решать который, исходя из рациональных критериев, пока приходится в философском плане»[6]. Тем не менее философский анализ современного развития математического познания показывает, что современные компьютерные доказательства реально способствовали новому пониманию подходов к обоснованию некоторых разделов математики, которые соотносятся с вопросами об убедительности традиционного «ручного» доказательства, сделанного работающими математиками.

В контексте философии математики, если учесть существующую тенденцию создания быстродействующих компьютеров с более эффективным и компактным математическим обеспечением, то уже новые современные информационные технологии должны стать в этом смысле универсально квантовыми, так как квантово-механические процессы доминируют сейчас во всех достаточно малых физических системах. А с точки зрения философии математического образования, компьютерные доказательства обозначили принципиально новый этап осмысления роли компьютерного образования и математического моделирования процессов, протекающих в реальном мире. Фактически математическая модель, как «общепризнанный канон репрезентации» внешнего мира, и еще ее конвенциальный характер фиксируют определенное отношение к моделируемому объекту самого познающего субъекта. То, что происходит при решении математических проблем с помощью компьютера, можно попытаться объяснить на различных уровнях понимания математики с точки зрения осуществления мыслительных процессов в терминах компьютерного инструментария. Тем не менее принципы операций, осуществляемых через компьютерные программы, не могут быть поняты и обоснованы только через архитектуру современного компьютерного оборудования.

Появление компьютеров не только изменило философские подходы к применению математических конструкций, используемых в информатике, но и породило сомнение в надежной методологической обоснованности машинных способов доказательства сложных математических теорем. Это предопределило в философии математики и философии математического образования следующую важную проблему: как понимать и применять компьютерные результаты? Философско-методологическая идея состоит в том, что появился новый способ получения информации, которая ранее не

---

[6] Еровенко В.А. «Синдром Саймона» как проблема надежности компьютерных доказательств // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1. С. 26.

проявлялась в строгих формально-математических рассуждениях. В заключение нельзя не согласиться с таким утверждением: «Применение компьютера в математической практике привело к постановке целого спектра проблем: от логико-эпистемологических до социально-психологических»[7]. Соответствующие вопросы оказались тесно переплетенными. В классической математике вопросы о вычислениях и построениях традиционно играли подчиненную роль, но теперь их значение существенно изменилось. Поэтому прогресс компьютерной математики связан также и с интуитивной составляющей, точнее, он зависит от гибкости математического мышления автора компьютерной программы и воображения.

В середине прошлого века фантасты мечтали о том, что «умные компьютеры» заменят человека во всех рутинных работах, предполагая передать компьютерам и сложные математические вычисления. Прошло время, то, о чем «мечталось», наступило, но счастье не наступило, поскольку приходится решать новые нестандартные проблемы, в том числе и в компьютерной математике. Поэтому не только философской, но и чисто практической и методологической проблемой становится обоснование стратегии роста современной математики, исходя из трансформации ее развития. В условиях информационного «наводнения» математические инструменты, использовавшиеся ранее, перестают работать не потому, что чересчур уж разрослись традиционные математические дисциплины, а потому, что новых направлений современной математики стало очень много. Но поскольку, умножая математическое знание, мы в еще большей степени умножаем информационное незнание, то поэтому нельзя зацикливаться на традиционном научном стиле, декларирующем стремление к прогрессу и замалчивающем трудности и недостатки, обостряя тем самым концептуальные противоречия, которые являются непременным атрибутом любой концепции развития математики и информатики.

Список литературы

1. Вавилов Н.А. Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 6.
2. Еровенко В.А. «Синдром Саймона» как проблема надежности компьютерных доказательств // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1. С. 26.
3. Краснощеков П.С. Компьютеризация… будем осторожны // Математика в высшем образовании. 2007. № 5. С. 66.
4. Ламберов Л.Д. Практика компьютерных доказательств и человеческое понимание: эпистемологическая проблематика // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2021. Вып. 1. С. 6.
5. Непейвода Н.Н. Какая математика нужна информатикам? // Открытие системы. 2005. № 9. С. 29.

[7] Хлебалин А.В. Интерактивное доказательство: верификация и генерирование нового математического знания // Философия науки. 2020. № 1. С. 88.

6. Хлебалин А.В. Интерактивное доказательство: верификация и генерирование нового математического знания // Философия науки. 2020. № 1. С. 88.
7. Целищев В.В. Доказательство, понимание и компьютеры // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. 2020. № 1. С. 62.