О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.В. Цегельник

Решения системы дифференциальных уравнений

$$y = -w + \varphi(t) + \frac{[w' + (b-1)\varphi'(t)]^2}{2w^2}, \tag{1.1}$$

$$w = -y + \varphi(t) + \frac{[y' + b\varphi'(t)]^2}{2y^2} \tag{1.2}$$

с неизвестными функциями y, w независимой переменной t, произвольной аналитической функцией $\varphi(t)$ и параметром b подчинены одному из условий:
либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y + [y' - b\varphi'(t)]w = 0, \tag{2}$$

либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y - [y' - b\varphi'(t)]w = 0. \tag{3}$$

При выполнении условия (2) система (1) эквивалентна по y $(y' - b\varphi'(t) \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2\varphi y^2 + 2b\varphi'' y - b^2\varphi'^2, \tag{4}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi'(t) \neq 0)$ — уравнению

$$2ww'' = w'^2 + 4w^3 - 2\varphi w^2 - 2(b-1)\varphi'' w - (b-1)^2\varphi'^2. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* $y_b = y(b,t) \not\equiv 0$ *— решение уравнения* (4) *при фиксированном значении параметра* b. *Тогда функция* w, *определяемая* (1.2), *является решением уравнения* (5).

Легко видеть, что уравнение (4) получается из (5) заменой $w \to y$, $b \to 1 - b$.

Теорема 2. *Пусть* $w_{b-1} = w(b-1,t) \not\equiv 0$ *— решение уравнения* (5) *при фиксированном значении параметра* b. *Тогда функция* y, *определяемая* (1.1), *является решением уравнения* (4).

При выполнении условия (3) система (1) эквивалентна по y $(y' - b\varphi' \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = 3y'^2 - 4b\varphi' y' + 2\varphi y^2 + 2by\varphi'' + b^2\varphi'^2, \tag{6}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi' \neq 0)$ — уравнению

$$2ww'' = 3w'^2 + 4(b-1)\varphi' w' + 2\varphi w^2 - 2(b-1)w\varphi'' + (b-1)^2\varphi'^2. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $y_b = y(b,t) \not\equiv 0$ *— решение уравнения* (6) *при фиксированном значении параметра* b. *Тогда функция* w, *определяемая* (1.2), *является решением уравнения* (7).

Теорема 4. *Пусть* $w_{b-1} = w(b-1,t) \not\equiv 0$ *— решение уравнения* (7) *при фиксированном значении параметра* b. *Тогда функция* y, *определяемая* (1.1), *является решением уравнения* (6).

Уравнение (6) получается из (7) заменой $w \to y$, $b \to 1 - b$.

Пусть $\varphi(t) = c$ — const. Тогда уравнения (4), (6) принимают соответственно вид

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2cy^2, \tag{8}$$

$$2yy'' = 3y'^2 + 2cy^2. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет первый интеграл

$$y'^2 - 2y^3 + 2cy^2 = Hy, \tag{10}$$

где H — произвольная постоянная. Уравнение (10) интегрируется в эллиптических функциях [1].

Уравнение (9) заменой

$$y = p^{-2}(t) \tag{11}$$

сводится к линейному $p'' = -\frac{c}{2}p$.

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Уравнения* (4), (6) *при* $\varphi(t) = c$ — *const являются уравнениями Пенлеве–типа.*

Отметим, что уравнение (4) при $\varphi(t) = t$ есть уравнение XXXIV из списка [2].

Теорема 6. *Уравнение* (6) *при* $b = 0$ *либо при* $\varphi(t) = t$ *является уравнением Пенлеве–типа.*

Доказательство. Если в (6) $b = 0$, то преобразованием (11) оно сводится к уравнению Эйри $p'' = -\frac{\varphi}{2}p$. При $\varphi(t) = t$ уравнение (6) принимает вид

$$2yy'' = 3y'^2 - 4by' + 2ty^2 + b^2. \tag{12}$$

Пусть $b \neq 0$. Заменой $y \to by^{-1}$ от уравнения (12) перейдем к уравнению

$$2yy'' = y'^2 - 4y^2y' - y^4 - 2ty^2. \tag{13}$$

Наряду с (13) рассмотрим более общее уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(t)v^2 - \gamma, \tag{14}$$

в котором $F(t)$ — произвольная аналитическая функция; γ — параметр. Уравнение (13) с точностью до обозначения совпадает с (14) при $F(t) = -t$, $\gamma = 0$.

Используя подход в [2], в [3] показано, что уравнение (14) является уравнением Пенлеве–типа. А именно, общее решение уравнения (14) есть рациональная функция постоянных интегрирования. Теорема доказана.

Замечание. Уравнение (14) в случае $\gamma = 1$ есть XXVII каноническое уравнение в списке [2]. Преобразование Беклунда для уравнения (14) в случае $F(t) = 2(t^2 + \alpha)$, $\gamma = -2\beta$ (α, β — произвольные параметры) получено в [4].

Следствие. Уравнение (4) при $\varphi''(t) \not\equiv 0$, а уравнение (6) при $b \neq 0$, $\varphi''(t) \not\equiv 0$ не являются уравнениями Пенлеве–типа.

Литература

1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М: Наука, 1971.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ОНТИ, 1939.

3. Цегельник В. В. *О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве.* // Теоретическая и математическая физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 361–367.

4. Цегельник В. В. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа.* Минск: Издательский центр БГУ, 2007.